

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于屏障控制函数的轮式机器人系统多目标分布式协同控制

娜茜泰, 赵国亮, 翁智, 夏元清

引用本文:

娜茜泰, 赵国亮, 翁智, 夏元清. 基于屏障控制函数的轮式机器人系统多目标分布式协同控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2235–2244.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0309>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### [基于分布式模型预测控制的无人机编队控制](#)

Formation control of multi-UAV based on distributed model predictive control algorithm  
控制与决策. 2022, 37(7): 1763–1771 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0447>

#### [基于收缩约束模型预测控制的无人车辆路径跟踪](#)

Unmanned vehicle path tracking based on contraction constraint model predictive control  
控制与决策. 2022, 37(3): 625–634 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1239>

#### [基于观测优化的双机协同控制与避障](#)

Cooperative control and collision avoidance for two UAVs based on optimization of observation  
控制与决策. 2022, 37(3): 593–604 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1168>

#### [输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化](#)

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input  
控制与决策. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

#### [带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制](#)

Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints  
控制与决策. 2021, 36(2): 387–394 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0974>

# 基于屏障控制函数的轮式机器人系统 多目标分布式协同控制

娜茜泰<sup>1†</sup>, 赵国亮<sup>1</sup>, 翁智<sup>1</sup>, 夏元清<sup>2</sup>

(1. 内蒙古大学 电子信息工程学院, 呼和浩特 010021; 2. 北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

**摘要:** 受多目标优化理论的启发, 针对非完整约束轮式机器人设计基于屏障控制函数的多目标协同控制算法. 该方法可实现队形控制主目标、连通性次级目标以及避碰次级目标, 其中将连通性保持和避碰问题建模为两个系统约束, 屏障控制函数作为约束对应的惩罚函数, 可解决系统有输入或状态约束的问题. 通过获取的局部信息将系统状态约束转化为屏障控制函数, 利用屏障控制函数的类李雅普诺夫特性对其导数引入约束, 再通过保证约束集的正不变性, 达到控制目标. 所提出方法可有效地避免控制器在连通性约束和避碰约束边界处的频繁切换, 减小机械疲劳, 在理论上可进一步扩展次级目标的数目, 实现多目标控制. 另外, 所提出的协同控制算法对编队队形没有特殊要求, 适用于不同编队需求和通信拓扑情况. 最后通过数值仿真验证了所提出算法在不同情况下的有效性.

**关键词:** 多机器人协同控制; 屏障控制函数; 多目标控制; 不等式约束; 非完整约束; 避碰; 连通性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0309

引用格式: 娜茜泰, 赵国亮, 翁智, 等. 基于屏障控制函数的轮式机器人系统多目标分布式协同控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2235-2244.

## Multi-objective control of wheeled robot system using control barrier functions

NA Xi-tai<sup>1†</sup>, ZHAO Guo-liang<sup>1</sup>, WENG Zhi<sup>1</sup>, XIA Yuan-qing<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Information Engineering, Inner Mongolia University, Huhhot 010021, China; 2. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** A single controller is designed for a nonholonomic wheeled robot systems to synthesize formation, connectivity and collision avoidance, yielding a distributed control barrier function (CBF) based controller, which is naturally relevant to the Lyapunov-like function. A novel class of Lyapunov-like barrier functions which encode the inequality constraints of connectivity and collision avoidance, is introduced into the controller. The corresponding barrier inequality constraints are proposed, and the robot achieves connectivity maintenance and collision avoidance objectives when ensuring the positive invariance of the constraint set. This method provides continuous change of control velocity reducing the mechanical fatigue of the actuator. In addition, it can be extended to more secondary control objectives considering different control barrier functions. Moreover, the proposed cooperative control algorithm has no special requirements for formation, and is suitable for different formation requirements and communication topologies. Simulation results are included to verify the effectiveness of the cooperative control algorithm under different situations.

**Keywords:** multi-robot cooperative control; control barrier function; multi-objective control; inequality constraint; nonholonomic constraint; collision avoidance; connectivity

## 0 引言

目前, 多机器人技术的研究与应用达到了前所未有的高度. 从民生领域的智能交通、智能物流、无

人移动商城等, 到军事领域的多无人战机协同、分布式雷达系统、多卫星姿态控制都有了非常广泛的应用. 尤其是 2019 年末, 突如其来的新型冠状病毒引

收稿日期: 2021-02-23; 录用日期: 2021-06-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61941304, 61966026); 内蒙古自治区自然科学基金项目 (2019BS06006, 2020BS06004).

责任编辑: 易建强.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: naxitai@163.com.

起的肺炎疫情,严重地影响了人们的正常工作与生活以及很多传统行业的发展.无人系统是帮助人民打赢疫情狙击战的重要角色,尤其是疫情之下的货运物流、卫生消杀、物资分发、巡逻作业等刻不容缓的需求和任务,都可以利用无人系统解决<sup>[1-2]</sup>.这些无人车和无人机,即所说的机器人,都具备有限且独立的感知能力、计算决策能力、通信能力以及执行能力.

本文研究的是多机器人系统的编队、避障和连通性保持分布式协同控制.很多时候,一些次级控制目标,如动态避障、连通性保持、围捕等,通常作为辅助控制量引入到上层主控制器中.这些上层控制器利用不同的数学方法设计来实现编队、跟踪或一致性等主要控制目标.文献[3]算法由两部分组成,一部分实现运动轨迹的全局渐近收敛,另一部分根据机器人的加速度约束实现动态避障,并补偿了机器人反应时间引起的滞后.基于零空间行为控制架构,文献[4]采用两个梯度场相互正交的能量函数,实现了目标环绕和避免与环境中的障碍物发生碰撞两个任务.张启彬等<sup>[5]</sup>针对非完整轮式移动机器人提出了一种基于速度空间的同时避障和轨迹跟踪方法,通过优化过程找到最优的无碰控制量.张红强等<sup>[6]</sup>提出了自组织协同动态多目标围捕方法,可以根据距离目标的远近与近邻交换围捕目标,达到避障的同时节省能量.这类方法通常是面向特定任务的,当改变主要控制目标时,原控制算法失效.另一方面,次级目标和主目标可能成为两个相悖的控制目标<sup>[7]</sup>,此时需要重新对系统的性能进行分析.

区别于上述引入辅助量的协同策略,本文采用基于屏障控制函数(control barrier function)或栅栏函数<sup>[8-9]</sup>的控制器设计方法.Wiel等<sup>[10]</sup>将屏障函数(barrier function)运用到有控制输入的非线性系统中,定义了屏障控制函数的概念,其是一种类李雅普诺夫函数,通过保证集合的正不变性,可避免计算系统的正可达集<sup>[11]</sup>.文献[12]通过运用屏障控制函数解决了二次规划问题,对期望轨迹的收敛性和系统轨迹的安全性进行了权衡.Panagou等<sup>[13]</sup>将屏障控制函数与多目标协同控制问题相结合,实现了安全的静态编队和连通性保持.这类文献中<sup>[13-14]</sup>,将多个目标建模为不同的屏障控制函数,当对应约束集是系统轨迹的正不变集时,约束条件得以满足.Borrmann等<sup>[15]</sup>利用屏障控制函数实现了大规模二阶线性系统的无碰撞集群运动.Wang等<sup>[16]</sup>基于屏障控制函数实现了异构多机器人系统的无碰撞运动.文献[17]进一步对特定规则和约束进行分类.Panagou等<sup>[18]</sup>在屏障控制函数

的基础上设计了切换结构的多目标控制器,将系统输入与状态约束转化为屏障控制函数,并对其导数引入不等式约束,通过保证约束集的正不变性可达到控制目标<sup>[19-20]</sup>.

本文针对领航者-跟随者框架下的非完整约束多机器人系统,利用机器人局部信息提出了一种基于屏障控制函数的分布式控制器,在实现任意队形编队目标的同时始终保持连通性,同时实现机器人之间/机器人-障碍物之间的无碰撞运动.首先,根据控制目标的特点,定义连通性屏障函数与相关约束集,该屏障函数是一种调零屏障函数,并给出调零屏障函数的相关性质;其次,定义避障屏障函数与相关约束集,该屏障函数是一种倒数屏障函数;然后,对应两种不同的屏障控制函数分别构建子李雅普诺夫函数,并使总李雅普诺夫函数在目标位置点一致为零;最后,对跟随者机器人设计相应的分布式多目标协同控制算法,证明避障性、队形的连通性以及两种不同情况下编队误差的全局渐近收敛性或ISS(input-to-state stability, 输入-状态稳定性)特性.通过数值仿真结果验证了非完整约束时变系统所提出基于屏障函数的多目标控制算法下的有效性.值得一提的是,该方法对编队队形和领航者的速度没有特殊要求,队形误差均能渐近收敛.另外,该方法相比以往的多目标控制算法,在需要避障时可避免控制器的频繁切换,对硬件的机械损耗更小.此外,跟随者机器人只需要其领航者机器人以及避障区域内有限个障碍物的局部信息即可实现分布式多目标控制.

## 1 问题描述

### 1.1 系统描述

本文研究的非完整约束机器人的运动学方程为

$$\dot{p}_i = \begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中: $r_i$ 为机器人质心的平面坐标, $r_i = [x_i \ y_i]^T$ ; $\theta_i$ 为相对于给定坐标系 $x-y$ 的方向角; $v_i$ 和 $w_i$ 为控制输入,分别为线速度和角速度.

智能小车为空间圆柱形结构,在 $x-y$ 平面半径为 $d_a$ ,如图1所示.为简化分析,使用连通性半径 $R_c$ 的概念,统一测量范围半径和通信范围半径,这样并不影响后续控制器设计的普适性,当测量范围与通信范围不一致时可选取其中较小的一项作为连通性半径.此外,定义机器人的避碰区域是以机器人质心为圆心、 $R_z$ 为半径的圆形区域.避碰区域内一个等圆心、半径为 $d_z$ ( $d_z > 2d_a$ )的区域定义为不可触犯区

域,该区域内不允许出现任何障碍物.

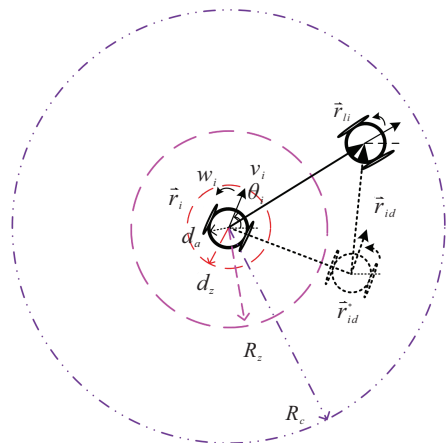


图1 非完整约束机器人与环境建模

### 1.2 控制目标

对于跟随者机器人,控制目标分为以下3方面:

1) 使跟随者机器人  $i$  实现与其领航者  $l_i$  之间的编队. 期望队形  $r_{id} \in \mathbf{R}^2$  是一个常向量,定义为  $i$  在队形内相对于领航者  $l_i$  之间的期望目标点,如图1所示. 期望队形应满足  $\|r_{id}\| < R_c, \forall i \in \mathcal{V}$ . 给出实际期望位置

$$r_{id}^* = r_{l_i} - r_{id}. \quad (2)$$

当给定不同的队形  $r_{id}$  时,实际期望位置  $r_{id}^*$  也是不同的.  $r_{id}^*$  与领航者相关且时变,因此可将  $r_{id}^*$  视作动态目标点,从而容易扩展到轨迹跟踪问题.

2) 在  $\|r_i(0) - r_{l_i}(0)\| < R_c$  即初始连通条件下,保证领航者  $l_i$  始终位于跟随者机器人  $i$  的连通性区域内(以跟随者机器人  $i$  的质心为圆心、 $R_c$  为半径的圆形区域).

3) 编队过程中,当有其他机器人/障碍物进入到跟随者机器人的避碰区域(以跟随者机器人  $i$  的质心为圆心、 $R_z$  为半径的圆形区域)内时,实现机器人-机器人/机器人-障碍物之间的动态避碰,使两者相对距离始终大于  $d_z$ .

需要特别指出的是,本文中的领航者与跟随者的角色并不一定是固定不变的. 比如在3个机器人编队过程中,机器人B作为跟随者时的领航者是机器人A,而机器人B又可同时作为机器人C的跟随者. 这种角色的划分可视具体情况而定,如队形的需求、通信拓扑结构的限制等.

### 1.3 数学定义

下面给出一些定义和引理. 假设集合  $C$  满足

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbf{R}^n : h(x) \geq 0\}, \\ \partial C &= \{x \in \mathbf{R}^n : h(x) = 0\}, \\ \text{Int}(C) &= \{x \in \mathbf{R}^n : h(x) > 0\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  为连续可微函数. 设计一个连续可微函数  $B(x) : \text{Int}(C) \rightarrow \mathbf{R}$ ,使其满足

$$\inf_{x \in \text{Int}(C)} B(x) \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \partial C} B(x) = \infty. \quad (4)$$

由LaSalle不变集原理与文献[21-22]可知,当  $\dot{B} \leq 0$  时,  $\text{Int}(C)$  是正不变集. 然而  $\dot{B} \leq 0$  要求集合  $C$  的所有子水平集都是正不变集,这是相当严格的条件. 文献[19-20]放宽了此条件,仅要求一个子水平集是不变的. 给出如下不等式条件:

$$\dot{B} \leq \frac{\gamma_B}{B}, \quad (5)$$

其中  $\gamma_B$  为正常数. 条件(5)允许  $\dot{B}$  在远离集合  $C$  的边界处增长,当系统解靠近边界时,增长速率衰减为零.

**定义1** 考虑动态系统  $\dot{x} = f(x)$ , 一个连续可微函数  $B(x) : \text{Int}(C) \rightarrow \mathbf{R}$  为倒数屏障函数(reciprocal barrier function, RBF), 对于由式(3)定义的集合  $C$  和  $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 存在  $\mathcal{K}$  类函数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 对于所有  $x \in \text{Int}(C)$ , 使下式成立:

$$\frac{1}{\alpha_1(h(x))} \leq B(x) \leq \frac{1}{\alpha_2(h(x))}, \quad (6)$$

$$L_f B(x) \leq \alpha_3(h(x)), \quad (7)$$

其中  $L_f B(x) = \frac{\partial B(x)}{\partial x} f(x)$  为Lie导数<sup>[23]</sup>.

可以看出,式(6)给出了  $B(x)$  沿系统  $\dot{x} = f(x)$  的一个类李雅普诺夫界,表明  $B(x)$  基本表现如  $1/\alpha(h)$  形式. 与式(4)相似,满足

$$\inf_{x \in \text{Int}(C)} \frac{1}{\alpha(h)} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \partial C} \frac{1}{\alpha(h)} = \infty.$$

不等式(7)给出了导数项  $\dot{B} = L_f B(x)$  的限制要求,与不变集条件(5)对应,允许  $\dot{B}$  在远离  $C$  的边界处增长迅速,在系统解靠近边界  $\partial C$  时,增长速率衰减为零.

**引理1**<sup>[12]</sup> 考虑动态系统  $\dot{x} = f(x)$ , 对于连续可微函数  $h$ , 集合  $C$  由式(3)定义. 当存在一个倒数屏障函数  $B(x) : \text{Int}(C) \rightarrow \mathbf{R}$  时,  $\text{Int}(C)$  是正不变集.

**引理2**<sup>[12]</sup> 考虑动态系统  $\dot{x} = f(x)$ , 对数形式函数

$$B(x) = -\log\left(\frac{h(x)}{1+h(x)}\right) \quad (8)$$

为一个倒数屏障函数,满足条件(5).

与倒数屏障函数对应,给出调零屏障函数定义.

**定义2** 考虑动态系统  $\dot{x} = f(x)$ , 连续可微函数  $h(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  为一个调零屏障函数(ZBF, zeroing barrier function), 对于由式(3)定义的集合  $C$ , 存在扩展  $\mathcal{K}$  类函数<sup>[12]</sup>  $\alpha$  和集合  $D, C \subseteq D \subset \mathbf{R}^n$ , 对于所有  $x \in D$ , 使下式成立:

$$L_f h(x) \geq -\alpha(h(x)), \quad (9)$$

其中  $L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$  为Lie导数.

**引理3**<sup>[12]</sup> 考虑动态系统  $\dot{x} = f(x)$ , 对于连续可微函数  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 集合  $\mathcal{C}$  由式(3)定义. 若  $h$  是定义在  $\mathcal{D}$  的一个调零屏障函数,  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ , 则  $\mathcal{C}$  是正不变集.

可知, 当  $x \in \partial \mathcal{C}, \dot{h}(x) \geq -\alpha(h(x)) = 0$  时, 根据 Nagumo 定理<sup>[24]</sup>,  $\mathcal{C}$  是正不变的.

## 2 屏障控制函数

### 2.1 连通性屏障控制函数

考虑到编队的动态性质, 不同于文献[18]的距离约束, 定义机器人  $i$  与领航者机器人  $l_i$  之间的连通性约束为

$$c_i = R_c - \|r_i - r_{l_i}\| \geq 0. \quad (10)$$

当上述约束不等式成立时, 可保证机器人  $i$  与领航者之间的连通性. 进一步, 定义机器人  $i$  的连通性约束集

$$\mathcal{C}_{i0} = \{r_i \in \mathbf{R}^2 | c_i \geq 0\}. \quad (11)$$

下面, 设计对应的连通性屏障控制函数, 其在期望位置点取值为零, 在连通性约束集边界上趋于无穷. 作为约束条件(10)的惩罚函数, 给出如下对数形式连通性屏障控制函数:

$$g_i = b_i - b_{i|r_i=r_{id}^*} - (\nabla_{r_i} b_{i|r_i=r_{id}^*})^T (r_i - r_{id}^*). \quad (12)$$

其中:  $b_i = -\ln(c_i)$ ,  $b_{i|r_i=r_{id}^*}$  为  $b_i$  在期望动态位置点  $r_i = r_{id}^*$  处的取值,  $\nabla_{r_i} b_i = \left[ \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \quad \frac{\partial b_i}{\partial y_i} \right]^T$  为  $b_i$  沿轨迹  $r_i$  的梯度. 由式(12)可知,  $g_i$  在  $r_i \rightarrow r_{id}^*$  时趋于零; 当  $r_i$  趋近于连通性约束集  $\mathcal{C}_{i0}$  的边界时,  $g_i \rightarrow \infty$ . 领航者  $l_i$  通过无线网络发送自身位置信息  $r_{l_i}$  给跟随者  $i$ ; 跟随者跟踪期望位置  $r_{id}^*$ , 并保证与领航者  $l_i$  之间的距离不大于连通性半径  $R_c$ . 此处, 显然需要满足  $\|r_i(0) - r_{l_i}(0)\| \neq 0, \|r_i(0) - r_{l_i}(0)\| \neq R_c$ .

### 2.2 避碰屏障控制函数

除可靠的数据传递外, 避免机器人之间或机器人与外界的碰撞也是多机器人协同控制考虑的重要因素. 定义由机器人  $i$  避碰区域内障碍物  $j$  构成的集合  $\mathcal{M}_i = \{j | \|r_i - r_j\| \leq R_z\}$ . 当机器人  $i$  与障碍物  $j \in \mathcal{N}_i$  之间的质心距离小于等于避碰区域半径  $R_z$  时, 将采取避障策略确保两者之间的距离不小于不可触犯区域半径  $d_z$ . 需要指出的是, 这里的障碍物通指避碰区域内所有检测到的移动或静止物体. 对于智能体  $i$  及障碍物  $j$ , 定义避碰约束函数  $a_{ij}$  为

$$a_{ij} = \|r_{ij}\| - d_z \geq 0, \quad (13)$$

其中  $r_{ij} \triangleq r_i - r_j$ . 由式(13)可知, 当机器人  $i$  相对于  $j$  的避碰约束  $a_{ij}$  始终大于零时可以避免碰撞, 对应的避碰约束集为

$$\mathcal{C}_{ij} = \{r_i, r_j \in \mathbf{R}^2 | a_{ij} \geq 0\}, \quad (14)$$

表明机器人  $i$  相对于障碍物  $j$  的无碰撞安全区域. 与连通性屏障控制函数类似, 定义避碰屏障控制函数为

$$h_{ij} = -\ln\left(\frac{a_{ij}}{1 + a_{ij}}\right). \quad (15)$$

由式(15)可知, 当  $a_{ij} \rightarrow 0$  时, 屏障控制函数  $h_{ij}$  趋于无穷. 而在避碰区域外  $\|r_{ij}\| > R_z$  时不需要考虑避障因素. 为简化书写, 定义  $d_{ij} \triangleq \|r_{ij}\|$ .  $R_z - d_a < d_{ij} \leq R_z$  的区域定义为机器人  $i$  的避碰屏障控制函数  $h_{ij}$  的一个缓冲区域, 引入缓冲函数  $\sigma_{ij}$  如下:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & d_z \leq d_{ij} \leq R_z - d_a; \\ B(d_{ij}), & R_z - d_a < d_{ij} \leq R_z; \\ 0, & d_{ij} > R_z. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} B(d_{ij}) &= B_1 d_{ij}^3 + B_2 d_{ij}^2 + B_3 d_{ij} + B_4, \\ B_1 &= \frac{2}{d_a^3}, \quad B_2 = -\frac{3(2R_z - d_a)}{d_a^3}, \quad B_3 = \frac{6R_z(R_z - d_a)}{d_a^3}, \\ B_4 &= 1 - \frac{(R_z - d_a)^2(d_a + 2R_z)}{d_a^3}. \end{aligned}$$

$h_{ij}$  与  $\sigma_{ij}$  沿机器人轨迹  $r_i$  的梯度分比为

$$\begin{aligned} \nabla_{r_i} h_{ij} &= -\frac{r_{ij}}{\|r_{ij}\| a_{ij} (1 + a_{ij})} = -\nabla_{r_j} h_{ij}, \quad (17) \\ \nabla_{r_i} \sigma_{ij} &= \frac{(3B_1 d_{ij}^2 + 2B_2 d_{ij} + B_3) r_{ij}}{\|r_{ij}\|} = -\nabla_{r_j} \sigma_{ij}. \quad (18) \end{aligned}$$

### 2.3 多目标控制李雅普诺夫函数

为建立屏障控制函数与分布式协同控制算法之间的联系, 给出一系列李雅普诺夫函数表征第1.2节提出的多个控制目标, 这一系列子李雅普诺夫函数需要在各自定义域内所有点处取值均非负. 针对连通性约束与避碰约束, 分别设计子李雅普诺夫函数:

$$V_i^I = \frac{1}{2} g_i^2, \quad (19)$$

$$V_{ij}^{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} h_{ij}^2. \quad (20)$$

由避碰屏障控制函数的数学表达式可知, 子李雅普诺夫函数(20)仅描述了机器人  $i$  在避碰区域  $d_z \leq \|r_{ij}\| \leq R_z$  内相对于障碍物  $j$  之间的避碰约束关系. 考虑安全因素, 引入相对于所有邻近障碍物 ( $j \in \mathcal{N}_i$ ) 的子李雅普诺夫函数  $V_i^{II}$ , 有

$$V_i^{II} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_{ij}^{II}(r_i, r_j). \quad (21)$$

为完成给定队形, 跟随者机器人  $i$  最终需要收敛到实际期望位置  $r_{id}^*$ , 并始终与其领航者  $l_i$  保持连通性, 且避免与其他机器人 (或环境障碍物) 发生碰撞. 因此, 给出一个统一的李雅普诺夫函数, 使其在实际期望位置  $r_{id}^*$  处一致取值为零, 在连通性约束边界和避碰约束边界趋于无穷. 为此, 定义跟随者机器人  $i$  的总约束集为  $C_i = C_{io} \cup_{j \in \mathcal{N}_i} C_{ij}$ . 给出机器人  $i$  的总李雅普诺夫函数为

$$V_i = \frac{\kappa_i}{1 + \kappa_i}, \quad (22)$$

其中  $\kappa_i = V_i^I + V_i^{II}$ . 显然, 当所有子李雅普诺夫函数  $V_i^I$ 、 $V_{ij}$  均为零时,  $V_i$  为零; 当  $V_i^I$ 、 $V_{ij}$  中任意一个子李雅普诺夫函数趋于  $+\infty$  时,  $V_i$  也将取其最大值. 具体地, 当机器人轨迹  $r_i(t)$  接近约束集  $C_i$  内任意一条约束边界时, 对应约束的子李雅普诺夫函数趋于无穷, 使式 (21) 中  $\kappa_i$  也趋于无穷, 此时  $V_i$  取其最大值为 1. 由  $V_i^I$ 、 $V_{ij}$  的数学表达式可知, 实际期望位置  $r_{id}^*$  是子李雅普诺夫函数取值为零的点, 因此  $V_i$  也在  $r_{id}^*$  处取零值. 然而,  $r_{id}^*$  是否是唯一零点有待分析.

**定理 1** 如式 (19) 所示的子李雅普诺夫函数  $V_i^I$  是正定的, 且仅在动态目标点  $r_{id}^*$  处取值为零.

定理 1 证明略.

### 3 多目标分布式协同控制

在考虑避障问题时, 文献 [18] 设计的多目标分布式控制算法受  $u_{jc}$  与  $d_{ij}$  影响, 导致被控机器人速度频繁切换, 进而加剧执行机构的损坏. 在  $t$  时刻, 被控对象需要计算与避碰区域内机器人  $j \in \mathcal{N}_i$  之间的避碰速度, 从中选取最小值, 并取最小避碰速度对应的相对距离  $d_{ij}$ . 每个时刻的避碰速度与对应相对距离的离散性, 将导致控制器与执行机构的突变. 因此, 考虑机器人工作空间中的避障问题时, 本文给出一种新颖的基于屏障控制函数的多目标分布式控制算法.

#### 3.1 多目标分布式控制算法设计

多目标分布式协同控制算法设计如下:

$$v_i = \begin{cases} v_{io} + \sum_{j \in \mathcal{M}_i} \frac{\|r_{ij}^T \vartheta_j v_j\|}{r_{ij}^T \vartheta_i}, & d_z \leq d_{ij} \leq R_z; \\ v_{io}, & d_{ij} > R_z. \end{cases} \quad (23)$$

$$w_i = -\lambda_i(\theta_i - \phi_i) + \dot{\phi}_i. \quad (24)$$

其中

$$v_{io} = k_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) + |v_{li} \cos(\theta_i - \theta_{li})|,$$

$$\vartheta_i \triangleq [\cos \theta_i \quad \sin \theta_i]^T, \quad \lambda_i > k_i + k_{M_i} > 0,$$

$$k_{M_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{N}_i \cup \{r_{li}\}} \sup \{v_j\},$$

$$\phi_i = \operatorname{atan2}\left(-\frac{\partial V_i}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right).$$

#### 3.2 编队收敛性、连通性与避碰性能分析

**定理 2** 对于非完整约束机器人 (1), 在初始连通条件下, 设计多目标分布式控制器 (23) 和 (24), 当  $\|r_{id}\| > R_z$  时, 机器人轨迹  $r_i(t)$  将渐近收敛到实际期望位置  $r_{id}^*(t)$ ; 当  $\|r_{id}\| \leq R_z$ , 即期望队形与避碰要求矛盾时, 机器人轨迹  $r_i(t)$  将渐近收敛到以实际期望位置  $r_{id}^*(t)$  为圆心的圆形区域内, 其半径由  $\sup_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq l_i} \max\{\mu_2 v_j\} + \mu_3 \lambda_i$  决定. 同时, 可避开与邻近障碍物  $j \in \mathcal{N}_i$  之间的碰撞, 并始终保持与领航者  $l_i$  之间的连通性, 其中  $\mathcal{N}_i = \{j \mid \|r_i - r_j\| \leq R_z\}$ . 当  $t \rightarrow \infty$  时, 编队误差  $r_i - r_{id}^*$  是毕竟有界的, 李雅普诺夫函数是局部 ISS 李雅普诺夫函数.

定理 2 中,  $v_j$  为避碰区域内的障碍物的线速度, 正常数  $\mu_2, \mu_3 > 1$ .

**证明** 当  $\|r_{id}\| > R_z$ , 即在靠近实际期望位置时, 避障区域内将不会再有障碍物出现, 控制器 (23) 退化为  $v_i = v_{io} = k_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) + |v_{li} \cos(\theta_i - \theta_{li})|$ . 这种情况是原线速度控制器 (23) 的一个特例, 因此可先通过验证原控制器 (23) 和 (24) 的性能再进行特殊化分析.

连通性的保持与碰撞的避免, 可通过分别使  $c_i \geq 0$  与  $a_{ij} \geq 0 (\forall j \in \mathcal{N}_i)$  成立而得到保证. 具体地, 保证起始于约束集  $C_i$  内的机器人轨迹曲线  $r_i(t)$ , 始终属于  $C_i$  的充要条件是满足条件  $\frac{d}{dt} c_i \geq 0$  和  $\frac{d}{dt} a_{ij} \geq 0, \forall r_i \in \partial C_i, j \in \mathcal{N}_i$ . 由 Nagumo 定理 [24] 可知, 该条件的实质是要求被控对象的位置轨迹的导数始终指向约束集内部或与其相切, 则被控系统轨迹始终位于约束集内部或边界上. 因此, 定理 2 的证明由编队收敛性分析、连通性分析和避碰分析等 3 个部分组成.

**step 1:** 证明编队收敛性. 需要证明系统轨迹  $r_i(t)$  从所有初始连通位置全局收敛到期望动态目标点, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \frac{\dot{\kappa}_i}{(1 + \kappa_i)^2} = \\ &= \frac{(\nabla_{r_i} \kappa_i)^T}{(1 + \kappa_i)^2} \dot{r}_i - \frac{g_i (\nabla_{r_i} g_i)^T}{(1 + \kappa_i)^2} \dot{r}_{li} + \\ &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_j} h_{ij})^T + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_j} \sigma_{ij})^T}{(1 + \kappa_i)^2} \dot{r}_j. \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\nabla_{r_i} \kappa_i = g_i \nabla_{r_i} g_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (h_{ij} \nabla_{r_i} h_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} h_{ij}^2 \nabla_{r_i} \sigma_{ij}),$$

$$\nabla_{r_{li}} \kappa_i = g_i \nabla_{r_{li}} g_i,$$

$$\nabla_{r_j} \kappa_i = h_{ij} \nabla_{r_j} h_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} h_{ij}^2 \nabla_{r_j} \sigma_{ij}.$$

由式(12)和(15)可知,存在 $\nabla_{r_i} g_i = -\nabla_{r_i} g_i$ ,进而下式成立:

$$\nabla_{r_j} V_i = [\partial V_i / \partial x_j, \partial V_i / \partial y_j]^T = -\left(\sigma_{ij} h_{ij} \nabla_{r_i} h_{ij} + \frac{1}{2} h_{ij}^2 \nabla_{r_i} \sigma_{ij}\right) = -(\nabla_{r_i} V_i - g_i \nabla_{r_i} g_i).$$

因此,式(25)等价于

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= (\nabla_{r_i} V_i)^T (\dot{r}_i - \dot{r}_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_j} V_i)^T \dot{r}_j + \\ &\frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T}{(1 + \kappa_i)^2} \dot{r}_i = \\ &(\nabla_{r_i} V_i)^T (\dot{r}_i - \dot{r}_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_j} V_i)^T (\dot{r}_j - \dot{r}_i) = \\ &-k_i \|\nabla_{r_i} V_i\| \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) - \\ &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_i} V_i\| \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_i} V_i\| \eta_i^T \eta_j v_j - \\ &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_i} V_i)^T \dot{r}_j - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_j} V_i)^T \dot{r}_i, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\eta_i \triangleq [\cos \phi_i \quad \sin \phi_i]^T$ . 下面计算李雅普诺夫函数 $V_i$ 在边界层子系统平衡点 $\theta_i = \phi_i$ 处的导数,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \\ &-k_i \|\nabla_{r_i} V_i\| \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) - \\ &\|\nabla_{r_i} V_i\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i} - \eta_i^T \eta_j v_j \right) + \\ &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_i} V_i + \nabla_{r_j} V_i)^T \dot{r}_j - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\nabla_{r_j} V_i)^T \dot{r}_i = \\ &-k_i \|\nabla_{r_i} V_i\| \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) - \\ &\|\nabla_{r_i} V_i\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i} - \eta_i^T \eta_j v_j \right) - \\ &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_i} V_i\| \eta_i^T \eta_j v_j - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\|\nabla_{r_j} V_i\| r_{ij}^T}{\|r_{ij}\|} (\dot{r}_j - \dot{r}_i). \end{aligned} \quad (27)$$

$\nabla_{r_j} V_i / \|\nabla_{r_j} V_i\| = -r_{ij} / \|r_{ij}\|$ 显然成立. 通过负梯度方向 $\phi_i$ 的选取,迫使被控机器人的运动方向角 $\theta_i$ 远离障碍物,即当 $\theta_i = \phi_i$ 时, $r_{ij}^T \eta_i > 0$ ,从而避免与障碍物发生碰撞. 因此,等式(27)右端第2项小于等于零,当且仅当 $\|r_{ij}^T \eta_j v_j\| \geq r_{ij}^T \eta_i \eta_i^T \eta_j v_j$ ,且该不等式显然成立. 等式(27)中的 $\|\nabla_{r_i} V_i\|$ 与 $\|\nabla_{r_j} V_i\|$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数,因此存在常数 $0 < \mu_1 < 1, \mu_2, \mu_3 > 1$ 满足 $\mu_1 V_i < \|\nabla_{r_i} V_i\|, \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_i} V_i\| < \mu_2 V_i, \sum_{j \neq l_i, j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_j} V_i\| < \mu_3 V_i$ . 最终, $\dot{V}_i$ 可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \\ &-k_i \|\nabla_{r_i} V_i\| \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|\nabla_{r_i} V_i\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i} - \eta_i^T \eta_j v_j \right) + \\ &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_i} V_i\| v_j + \sum_{j \neq l_i, j \in \mathcal{N}_i} \|\nabla_{r_j} V_i\| (v_j + v_{l_i}) \leq \\ &-k_i \mu_1 V_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) + \mu_2 V_i \max_{j \in \mathcal{N}_i} \{v_j\} + \\ &\mu_3 V_i \max_{j \neq l_i, j \in \mathcal{N}_i} \{v_j + v_{l_i}\} \leq \\ &-k_i \mu_1 V_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) + \\ &(\mu_2 + \mu_3) \max_{j \neq l_i, j \in \mathcal{N}_i} \{v_j\} + \mu_3 \lambda_i. \end{aligned} \quad (28)$$

在约束集内部,李雅普诺夫函数 $V_i$ 有界, $V_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|)$ 是关于 $r_i - r_{id}^*$ 的 $\mathcal{K}$ 类函数. 由此可知, $V_i$ 是局部ISS李雅普诺夫函数,上界为 $\sup_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq l_i} \{\max\{(\mu_2 + \mu_3)v_j\} + \mu_3 \lambda_i\}$ . 随着 $t$ 增加,编队误差 $r_i - r_{id}^*$ 毕竟有界,界为 $\mathcal{K}$ 类函数 $\sup_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq l_i} \{\max\{(\mu_2 + \mu_3)v_j\} + \mu_3 \lambda_i\}$ . 换言之,存在避碰问题时被控机器人位置轨迹 $r_i(t)$ 最终收敛到以动态目标点 $r_{id}^*(t)$ 为圆心的圆形区域内,其半径由 $\sup_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq l_i} \{\max\{(\mu_2 + \mu_3)v_j\} + \mu_3 \lambda_i\}$ 决定.

此处需要指出的是,以上编队收敛性的分析是针对 $\|r_{id}\| \leq R_z$ 的情况进行分析的. 当期望队形满足 $\|r_{id}\| > R_z$ 时,在靠近实际期望位置处,避障区域内将不会再有障碍物出现,控制器(23)退化为 $v_i = v_{io} = k_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|) + |v_i \cos(\theta_i - \theta_{l_i})|$ . 此时由式(28)可知,李雅普诺夫函数的导数 $\dot{V}_i$ 衰减为 $\dot{V}_i \leq -k_i \|\nabla_{r_i} V_i\| \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|)$ ,此时编队误差是渐近收敛的.

step 2: 证明连通性. 考虑连通性约束函数 $c_i = R_c - \|r_i - r_{l_i}\|$ 的导数,并在边界层子系统(快变子系统)平衡点 $\theta_i = \phi_i, \theta_{l_i} = \phi_{l_i}$ 处计算得到

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &= \\ &\frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| \eta_i^T + \frac{g_i r_{id}^T}{c_{id} \|r_{id}\|} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T + \right. \\ &\left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T \right\} (\eta_i v_{io} - \eta_i v_{l_i}) + \\ &\frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| + \frac{g_i r_{id}^T \eta_i}{c_{id} \|r_{id}\|} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T \eta_i + \right. \\ &\left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T \eta_i \right\} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i}. \end{aligned} \quad (29)$$

其中: $f_{ij} = 3B_1 d_{ij}^2 + 2B_2 d_{ij} + B_3, \nabla_{r_i} \sigma_{ij} = f_{ij} \frac{r_{ij}}{\|r_{ij}\|}$ 与 $\nabla_{r_i} h_{ij}$ 由式(16)定义. 进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &\geq \\ &\frac{c_i k_i \tanh(\|r_i - r_{id}^*\|)}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| + \frac{g_i r_{id}^T \eta_i}{c_{id} \|r_{id}\|} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T \eta_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T \eta_i \Big\} + \\
 & \frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| \eta_i^T + \frac{g_i r_{id}^T}{c_{id} \|r_{id}\|} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T + \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T \right\} (\eta_i |\eta_i \eta_i| - \eta_i) v_{li} + \\
 & \frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| + \frac{g_i r_{id}^T \eta_i}{c_{id} \|r_{id}\|} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2}{2} (\nabla_{r_i} \sigma_{ij})^T \eta_i + \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} h_{ij} (\nabla_{r_i} h_{ij})^T \eta_i \right\} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i} \geq \\
 & \frac{c_i (k_i - \sup\{v_{li}\})}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| - \frac{g_i}{c_{id}} - \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2 f_{ij}}{2} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sigma_{ij} h_{ij} a_{ij}}{1 + a_{ij}} \right\} + \frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| - \right. \\
 & \left. \frac{g_i}{c_{id}} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2 f_{ij}}{2} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sigma_{ij} h_{ij} a_{ij}}{1 + a_{ij}} \right\} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{r_{ij}^T \eta_i}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

由于  $r_{ij}^T \eta_i > -\|r_{ij}\|$ ,  $\|r_{ij}^T \eta_j v_j\| \leq \|r_{ij}\| |v_j|$ , 式(30)变为

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_i & \geq \\
 & \frac{c_i k_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| - \frac{g_i}{c_{id}} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2 f_{ij}}{2} - \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sigma_{ij} h_{ij} a_{ij}}{1 + a_{ij}} \right\} - \frac{c_i}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| - \frac{g_i}{c_{id}} - \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2 f_{ij}}{2} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sigma_{ij} h_{ij} a_{ij}}{1 + a_{ij}} \right\} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |v_j| + \sup\{v_{li}\} \right). \tag{31}
 \end{aligned}$$

如多目标分布式控制算法(23)和(24)所定义,  $k_{M_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{N}_i \cup \{l_i\}} \sup\{v_j\}$ , 由式(31)可进一步计算得到

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_i & \geq c_i \frac{(k_i - k_{M_i})}{g_i} \left\{ \|\nabla_{r_i} \kappa_i\| - \frac{g_i}{c_{id}} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{h_{ij}^2 f_{ij}}{2} - \right. \\
 & \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sigma_{ij} h_{ij} a_{ij}}{1 + a_{ij}} \right\}. \tag{32}
 \end{aligned}$$

显然, 假设初始时刻领航者轨迹  $r_{li}(0)$  起始于连通性约束集  $C_{i0}$  内部时,  $c_i > 0$  且  $\|\nabla_{r_i} \kappa_i\|$  有界. 式(32)满足调零屏障函数  $\dot{c} \geq -\alpha(c)$ , 其中  $\alpha(\cdot)$  为定义2所描述的扩展  $\mathcal{K}$  类函数. 由此可知, 式(32)满足调零屏障函数条件, 等价于与领航者之间的连通性约束集  $C_{i0}$  为正不变集, 则起始于不变集内的领航者轨迹  $r_{li}(t)$ , 将始终位于跟随者机器人  $r_i(t)$  的连通性范围内.

step 3: 证明避碰性. 结合不等式条件(6)和倒数屏障函数  $h_{ij} = -\ln\left(\frac{a_{ij}}{1+a_{ij}}\right)$  可知, 倒数屏障函数

需满足条件

$$\dot{h}_{ij} = -\frac{\dot{a}_{ij}}{a_{ij} + a_{ij}^2} \leq \frac{\gamma_B}{h_{ij}}, \tag{33}$$

其中  $\gamma_B$  为正常数. 由引理3可知, 对于调零屏障函数  $a_{ij}$ , 需满足条件  $L_{d_{ij}} a_{ij} \geq -\alpha(a_{ij})$ , 结合式(33)计算得到如下不等式条件:

$$\dot{a}_{ij} \geq \frac{\gamma_B (a_{ij} + a_{ij}^2)}{\ln\left(\frac{a_{ij}}{1+a_{ij}}\right)}. \tag{34}$$

对于  $x > 0$  存在  $x \ln x \geq x - 1$ , 则如下不等式成立:

$$\frac{a_{ij}}{1+a_{ij}} \cdot \ln\left(\frac{a_{ij}}{1+a_{ij}}\right) \geq \frac{a_{ij}}{1+a_{ij}} - 1 = -\frac{1}{1+a_{ij}}. \tag{35}$$

由此可得

$$\frac{\gamma_B a_{ij}^2}{a_{ij} \ln\left(\frac{a_{ij}}{1+a_{ij}}\right)} \leq \frac{\gamma_B a_{ij}^2}{-1}. \tag{36}$$

不等式条件(34)变为

$$\dot{a}_{ij} \geq -\gamma_B a_{ij}^2 (1+a_{ij}). \tag{37}$$

另一方面, 在跟随者机器人  $i$  与邻近障碍物  $j$  的边界层子系统平衡点  $\theta_i = \phi_i, \theta_j = \phi_j$  处计算得到

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{ij} & = \\
 & \frac{r_{ij}^T}{\|r_{ij}\|} (\dot{r}_i - \dot{r}_j) = \frac{r_{ij}^T}{\|r_{ij}\|} (\eta_i v_i - \eta_j v_j) = \\
 & \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} v_{i0} + \frac{\|r_{ij}^T \eta_j v_j\|}{\|r_{ij}\|} - \frac{r_{ij}^T \eta_j}{\|r_{ij}\|} v_j + \\
 & \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \sum_{k \neq j} \frac{\|r_{ik}^T \eta_k v_k\|}{r_{ik}^T \eta_i} \geq \\
 & \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} v_{i0} + \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \sum_{k \neq j} \frac{\|r_{ik}^T \eta_k v_k\|}{r_{ik}^T \eta_i}. \tag{38}
 \end{aligned}$$

由于  $\eta_i, \eta_j, \eta_k$  分别为各自边界层系统的平衡点, 可进一步得到

$$\dot{a}_{ij} \geq \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} v_{i0} + \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \sum_{k \neq j} \eta_i^T \eta_k v_k. \tag{39}$$

假设  $m$  为需要避碰的障碍物集合  $\mathcal{N}_i$  中的障碍物个数, 下面分3种情况考虑:

1) 当机器人  $i$  的运动方向在  $\mathcal{N}_i$  内只远离障碍物  $j$ , 即  $r_{ij}^T \eta_i > 0$  时,  $r_{ik}^T \eta_i \leq 0, \forall k \neq j, k \in \mathcal{N}_i$ , 有

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{ij} & \geq \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \left( v_{i0} - \sum_{k \neq j}^{M_i} v_k \right) \geq \\
 & -\frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{i0} - (m-1) \sup_{k \neq j} \{v_k\}|. \tag{40}
 \end{aligned}$$

2) 当机器人  $i$  的运动方向在  $\mathcal{N}_i$  内除障碍物  $j$  外还远离  $p$  个障碍物而朝向  $m-p-1$  个障碍物时, 有



$$\begin{aligned} \dot{a}_{ij} \geq & \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \left( v_{io} + \sum_{k \neq j}^p v_k - \sum_{k \neq j}^{m-p-1} v_k \right) \geq \\ & - \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{io} - (m-2p-1) \sup_{k \neq j} \{v_k\}|. \end{aligned} \quad (41)$$

对于式(40)和(41),结合不等式条件(37),当满足如下条件时, $a_{ij}$ 为调零屏障函数, $h_{ij}$ 为倒数屏障函数:

$$\frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{io} - (m-1) \sup_{k \neq j} \{v_k\}| \leq \gamma_B a_{ij}^2 (1 + a_{ij}). \quad (42)$$

由于控制器设计中控制器参数 $\lambda_i > k_i + k_{M_i} > 0$ , $k_{M_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{N}_i \cup \{r_i\}} \sup \{v_j\}$ ,机器人 $i$ 的运动方向远离障碍物 $j$ , $r_{ij}^T \eta_i > 0$ ,可得到

$$\frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{io} - (m-2p-1) \sup_{k \neq j} \{v_k\}| < \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \lambda_i. \quad (43)$$

由式(42)可知,当

$$\frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} \lambda_i \leq \lambda_i \leq \gamma_B a_{ij}^2 (1 + a_{ij}) \quad (44)$$

成立时, $a_{ij}$ 为调零屏障函数, $h_{ij}$ 为倒数屏障函数.取 $d_{ij} = R_z$ 时, $a_{ij}$ 取最大值,则有

$$\gamma_B \geq \frac{\lambda_i}{(R_z - d_z)^2 (1 + R_z - d_z)}. \quad (45)$$

因此,一定存在正常数 $\gamma_B$ 满足条件(45),使 $a_{ij}$ 为调零屏障函数, $h_{ij}$ 为倒数屏障函数.由引理1可知,避碰约束集 $\mathcal{C}_{ij} = \{r_i, r_j \in \mathbf{R}^2 \mid a_{ij} = d_{ij} - d_z \geq 0\}$ 是不变集,因此机器人 $i$ 与障碍物 $j$ 之间不会发生碰撞.

3) 当机器人 $i$ 的运动方向在 $\mathcal{N}_i$ 内朝向障碍物 $j$ ,即 $r_{ij}^T \eta_i \leq 0$ 时,至少存在一个障碍物 $l$ ,使 $r_{il}^T \eta_i > 0$ , $r_{ik}^T \eta_i \leq 0, \forall k \neq l, k \in \mathcal{N}_i$ ,有

$$\dot{a}_{ij} \geq - \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{io} + v_l - (m-2) \sup_{k \neq j, l} \{v_k\}|. \quad (46)$$

对比式(46)与不等式条件(37)可知,需要使如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & - \frac{r_{ij}^T \eta_i}{\|r_{ij}\|} |v_{io} + v_l - (m-2) \sup_{k \neq j, l} \{v_k\}| \geq \\ & - \gamma_B a_{ij}^2 (1 + a_{ij}). \end{aligned} \quad (47)$$

由于 $r_{ij}^T \eta_i \leq 0$ ,不等式左边大于零,而右边小于零,式(47)始终成立.

综上所述,当 $\|r_{id}\| > R_z$ 时编队误差将渐近收敛到实际期望位置 $r_{id}^*(t)$ ;当 $\|r_{id}\| \leq R_z$ ,即期望队形与避碰要求矛盾时,编队误差 $\|r_i - r_{id}^*\|$ 是ISS稳定的,跟随者机器人轨迹 $r_i(t)$ 与其领航者机器人轨迹之间距离始终保持在连通性范围 $R_c$ 内以保证可靠的数据交换,同时编队过程中可以避免与临近障碍物(或其他机器人)之间的碰撞.  $\square$

## 4 仿真与分析

仿真分为两部分.仿真1中, $\|r_{id}\| > R_z$ ,在未达到实际期望位置 $r_{id}^*$ 时,通过多目标分布式控制器(23)和(24)实现编队、避碰和连通性保持.在靠近实际期望位置 $r_{id}^*$ 时,由于 $\|r_{id}\| > R_z$ ,不会有障碍物出现,则线速度控制器(23)自然地退化为 $v_i = v_{io}$ ,最终编队误差将全局渐近收敛为零.仿真2中,期望队形 $\|r_{id}\| \leq R_z$ ,跟随者要达到期望队形时领航者必然进入到避碰区域内,仿真结果验证了在期望队形与避碰条件相矛盾时,编队误差是ISS的.

**仿真1** 考虑由4个非完整约束机器人组成的领航-跟随者系统,通信拓扑示意图由图2给出.图3中机器人初始时刻状态为 $p_1 = [0.85, 0.3, \pi/3]^T$ , $p_2 = [0.13, 0.55, 0]^T$ , $p_3 = [-0.47, 0.59, 0]^T$ 和 $p_4 = [0.39, 0.32, 0]^T$ .不失一般性,跟随者机器人相对于各自领航者的期望队形均选取为 $r_{id} = [0.5, 0.5]^T$ .多目标分布式控制算法(23)和(24)中控制器参数取为 $k_i = 0.2, \lambda_i = 1$ .

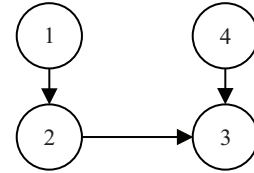
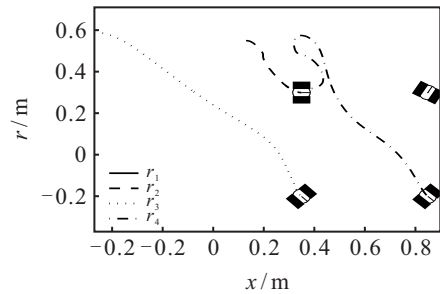
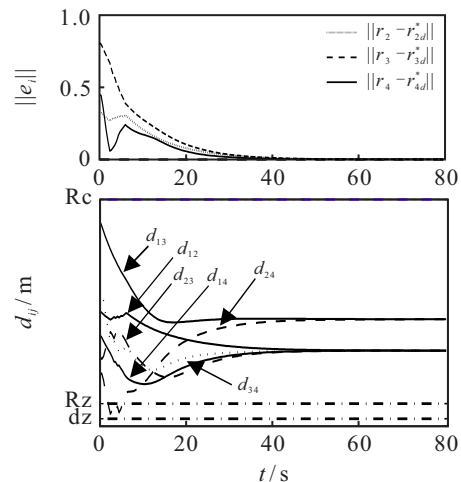


图2 多机器人系统的通信拓扑示意图



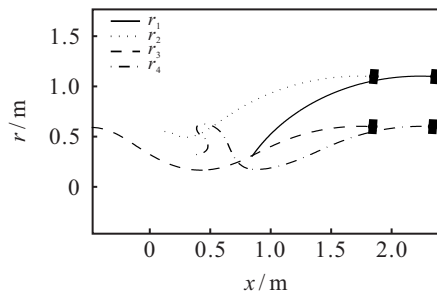
(a) 多目标分布式控制的静态队形编队轨迹



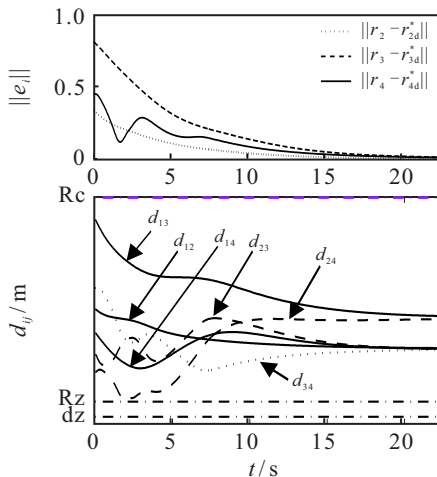
(b) 静态队形编队误差与相对距离变化曲线

图3 多目标分布式控制的静态队形仿真曲线

图3和图4分别给出了多机器人系统在方形期望队形时静态编队与动态编队多目标分布式控制仿真结果. 图3(b)给出了静态编队时跟随者机器人  $i = 2, 3, 4$  的编队误差向量范数  $\|e_i\| = \|r_i - r_{id}^*\|$  以及机器人之间距离  $d_{ij}$  的变化曲线. 可见, 编队误差均渐近收敛为零且机器人间距离始终大于不可触犯区域半径  $d_z = 0.08$ , 小于连通性半径  $R_c = 1.5$ . 另外, 对于方形队形动态编队情况, 图4(a)机器人初始时刻状态与静态编队相同. 1号机器人以速度  $u_1 = [0.08, -0.05]^T$  运动, 机器人相应状态变化曲线如图4(b)所示.



(a) 多目标分布式控制的动态队形编队轨迹

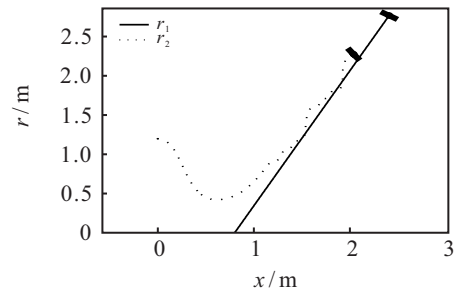


(b) 动态队形编队误差与相对距离变化曲线

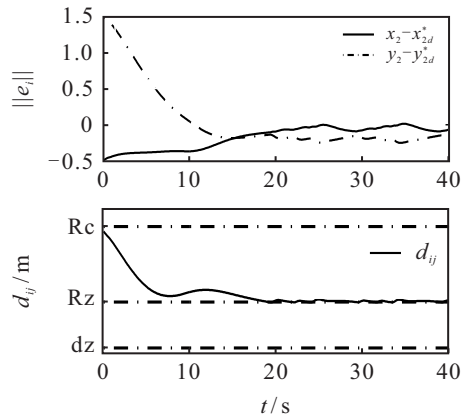
图4 多目标分布式控制的动态队形仿真曲线

**仿真2** 选取期望队形  $r_{id} = [0.3, 0.3]^T$ ,  $k_i = 0.1$ ,  $u_1 = [0.08, 0]^T$ , 避碰半径  $R_z = 0.6$ . 此时,  $\|r_{id}\| \leq R_z$ , 期望队形与避碰条件相矛盾. 图5给出了该情况下机器人轨迹、编队误差、相对距离与控制速度仿真结果.

由图5仿真结果可见, 对于加入避碰约束项后的多目标分布式控制算法(23)和(24), 多机器人系统的编队误差是ISS稳定的, 即误差最终收敛到以期望队形位置为圆心的圆形邻域内, 验证了定理2的正确性. 机器人与其领航者之间的距离始终小于连通性半径  $R_c$ , 机器人与领航者之间的距离始终大于不可触犯半径  $d_z$ , 直接表明了多智能体系统避障控制效果的实现.



(a) 轨迹曲线



(b) 编队误差与相对距离变化曲线

图5 期望队形与避碰条件相矛盾时仿真曲线

### 5 结论

针对非完整约束轮式多机器人系统, 采用基于屏障控制函数理论设计了一种多目标分布式协同控制算法, 将避碰与领航者的连通性保持两个次级目标建模为系统的约束. 进一步对约束分别构建子李雅普诺夫函数, 并与机器人角速度之间建立联系, 通过不变集原理证明了该控制算法可实现上述主次目标的分布式协同控制. 最终通过数值仿真验证了非完整约束轮式机器人在不同队形与不同队形约束下的避碰和连通性保持效果, 进一步表明了算法的正确性和有效性. 不过, 所提出的基于屏障控制函数的多目标分布式协同算法, 均在固定通信拓扑、且领航者信息随时可获取的情况下进行设计, 存在一定的局限性, 因此, 对于切换拓扑以及通信受限等情况, 有待进一步研究.

### 参考文献(References)

[1] 马云宾, 董红军, 孙万磊, 等. 新冠肺炎疫情下管道线路智能感知技术的思考与探索[J]. 油气储运, 2020, 39(4): 389-394.  
(Ma Y B, Dong H J, Sun W L, et al. Thinking and exploration of pipeline intelligent perception technology during the epidemic of COVID-19[J]. Oil & Gas Storage and Transportation, 2020, 39(4): 389-394.)  
[2] 丁逸男. 新冠肺炎疫情倒逼城市治理数字化转型[J]. 中国工业和信息化, 2020(Z1): 12-14.  
(Ding Y N. The epidemic situation of COVID-19 forces

- the digitalization transformation of urban management [J]. *China Industry & Information Technology*, 2020(Z1): 12-14.)
- [3] Tang C, Spong M W. Trajectory tracking with collision avoidance for nonholonomic vehicles with acceleration constraints and limited sensing[J]. *International Journal of Robotics Research*, 2014, 33(12): 1569-1592.
- [4] 易国, 毛建旭, 王耀南, 等. 多移动机器人运动目标环绕与避障控制[J]. *仪器仪表学报*, 2018, 39(2): 11-20. (Yi G, Mao J X, Wang Y N, et al. Moving target surrounding and obstacle avoidance control of multiple mobile robots[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2018, 39(2): 11-20.)
- [5] 张启彬, 王鹏, 陈宗海. 基于速度空间的移动机器人同时避障和轨迹跟踪方法[J]. *控制与决策*, 2017, 32(2): 358-362. (Zhang Q B, Wang P, Chen Z H. Velocity space based concurrent obstacle avoidance and trajectory tracking for mobile robots[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(2): 358-362.)
- [6] 张红强, 吴亮红, 周游, 等. 复杂环境下群机器人自组织协同多目标围捕[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(5): 1054-1062. (Zhang H Q, Wu L H, Zhou Y, et al. Self-organizing cooperative multi-target hunting by swarm robots in complex environments[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(5): 1054-1062.)
- [7] Dong X Y, Xi Y G. Game theory based coverage control of multi-agent systems[J]. *Computer Simulation*, 2009, 26(10): 148-152.
- [8] 甘庭, 夏壁灿. 运用栅栏函数验证连续系统的有界时间安全性[J]. *软件学报*, 2016, 27(3): 645-654. (Gan T, Xia B C. Barrier certificate generation for safety verification of continuous systems for a bounded time[J]. *Journal of Software*, 2016, 27(3): 645-654.)
- [9] 杨旭, 曹凯, 刘秉政, 等. 多目标环境下车辆自主决策可达集分析[J]. *科学技术与工程*, 2019, 19(1): 293-300. (Yang X, Cao K, Liu B Z, et al. Reachability set analysis of vehicle autonomous decision in multi-objective environment[J]. *Science Technology and Engineering*, 2019, 19(1): 293-300.)
- [10] Wiel P, Allgower F. Constructive safety using control barrier functions[C]. *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control System*. Piscataway: IEEE, 2007: 462-467.
- [11] Mitchell I M, Bayen A M, Tomlin C J. A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(7): 947-957.
- [12] Ames A D, Xu X R, Grizzle J W, et al. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3861-3876.
- [13] Panagou D, Stipanovi D M, Voulgaris P G. Multi-objective control for multi-agent systems using Lyapunov-like barrier functions[C]. *The 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Firenze, 2013: 1478-1483.
- [14] Wang L, Ames A D, Egerstedt M. Multi-objective compositions for collision-free connectivity maintenance in teams of mobile robots[C]. *IEEE 55th Conference on Decision and Control*. Las Vegas, 2016: 2659-2664.
- [15] Borrmann U, Wang L, Ames A D, et al. Control barrier certificates for safe swarm behavior[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, 48(27): 68-73.
- [16] Wang L, Ames A, Egerstedt M. Safety barrier certificates for heterogeneous multi-robot systems[C]. *American Control Conference*. Boston, 2016: 5213-5218.
- [17] Panagou D. A distributed feedback motion planning protocol for multiple unicycle agents of different classes[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(3): 1178-1193.
- [18] Panagou D, Stipanovi D M, Voulgaris P G. Distributed coordination control for multi-robot networks using Lyapunov-like barrier functions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(3): 617-632.
- [19] Dai L, Gan T, Xia B, et al. Barrier certificates revisited[J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2017, 80: 62-86.
- [20] Kong H, He F, Song X, et al. Exponential-condition based barrier certificate generation for safety verification of hybrid systems[C]. *CAV2013*. Berlin: Springer, 2013, 8044: 242-257.
- [21] Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918-927.
- [22] Prajna S, Jadbabaie A, Pappas G J. A framework for worst-case and stochastic safety verification using barrier certificates[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1415-1428.
- [23] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. Upper Saddle River: PrenticeHall, 2002: 195-222.
- [24] Blanchini F, Miani S. *Set-theoretic estimation*[M]. Boston: Birkhäuser: 389-413.

### 作者简介

娜茜泰(1991—), 女, 讲师, 博士, 从事群智能算法及其应用等研究, E-mail: naxitai@163.com;

赵国亮(1982—), 男, 讲师, 博士, 从事模糊控制、智能控制等研究, E-mail: ocnzhao@163.com;

翁智(1978—), 男, 教授, 从事模式识别与智能信息等研究, E-mail: wzhi@imu.edu.cn;

夏元清(1971—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多源信息复杂系统、飞行器控制等研究, E-mail: xia\_yuanqing@bit.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)