

# 控制与决策

Control and Decision

基于Householder变换的贪婪正交最小二乘辨识算法

刘艳君, 韩萍, 马君霞

引用本文:

刘艳君, 韩萍, 马君霞. 基于Householder变换的贪婪正交最小二乘辨识算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2281–2286.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1650>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

[有理模型辨识的两类新方法——混合迭代与柔性最小二乘法](#)

Two novel identification methods for rational models—Compound iterative algorithm and flexible least squares algorithm

*控制与决策*. 2022, 37(1): 58–66 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0935>

[多输入C-ARMA系统参数和时延的梯度追踪辨识算法](#)

Parameter and time delay estimation algorithm based on gradient pursuit for multi-input C-ARMA systems

*控制与决策*. 2022, 37(8): 2085–2090 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1773>

[非线性严格反馈系统自适应非反步输出反馈控制](#)

Adaptive non-backstepping output-feedback control of nonlinear strict-feedback systems

*控制与决策*. 2022, 37(9): 2425–2432 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0262>

[基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识](#)

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

*控制与决策*. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

[基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识](#)

Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2946–2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

# 基于Householder变换的贪婪正交最小二乘辨识算法

刘艳君<sup>1,2†</sup>, 韩萍<sup>2</sup>, 马君霞<sup>1,2</sup>

(1. 江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏无锡 214122;

2. 江南大学物联网工程学院, 江苏无锡 214122)

**摘要:** 针对含有未知时滞的多输入受控自回归系统模型的时滞与参数辨识问题, 基于 Householder 变换探讨一种贪婪正交最小二乘辨识算法. 首先, 由于各输入通道的时滞未知, 通过设置输入数据回归长度对系统模型进行过参数化, 得到一个含有稀疏参数向量的高维辨识模型; 其次, 为了避免最小二乘算法中对高维协方差矩阵的求逆运算, 利用 Householder 变换对信息矩阵进行正交分解, 推导基于 Householder 变换的正交最小二乘算法; 然后, 为了提高辨识效率, 降低辨识成本, 推导基于 Householder 变换的贪婪准则, 进而得到基于 Householder 变换的贪婪正交最小二乘辨识算法, 该算法能够在少量采样数据的条件下获得稀疏参数向量的估计值; 最后, 根据估计的稀疏参数向量的结构得到系统时滞估计. 仿真结果表明了所提出算法的有效性.

**关键词:** 多变量系统; 参数辨识; 时滞估计; Householder 变换; 贪婪算法; 贪婪正交最小二乘算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1650

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 刘艳君, 韩萍, 马君霞. 基于 Householder 变换的贪婪正交最小二乘辨识算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2281-2286.

## Greedy orthogonal least squares identification algorithm based on Householder transformation

LIU Yan-jun<sup>1,2†</sup>, HAN Ping<sup>2</sup>, MA Jun-xia<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** For the identification of the multiple-input controlled autoregressive systems with unknown time-delays, a greedy orthogonal least squares identification algorithm based on the Householder transformation is discussed. Since the time-delays are unknown, an over-parameterization identification model with a sparse parameter vector can be obtained by setting an input regression length. In order to avoid computing the inverse of the high-dimensional covariance matrix in the least squares algorithm, an orthogonal least squares algorithm based on the Householder transformation is derived and a greedy criterion based on the Householder transformation is derived to improve the identification efficiency and reduce the identification cost. The proposed algorithm can effectively estimate the sparse parameter vector with a small amount of sampled data. Finally, the time-delays are estimated according to the structure of the sparse parameter vector. A simulation example is used to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** multivariate system; parameter identification; time-delay estimation; Householder transformation; greedy algorithm; greedy orthogonal least squares algorithm

## 0 引言

时滞广泛存在于实际工业生产过程中, 如工程科学、化学工业、石油工业等<sup>[1-2]</sup>, 时滞的存在使系统的输出不能及时响应, 导致系统的稳定性变差. 因此, 在系统辨识中, 未知时滞的估计与参数辨识同样重要, 它对系统的分析与控制具有重要意义.

关于系统时滞的辨识, 常见的方法有非参数辨识

方法(如利用阶跃响应的直接辨识方法<sup>[3]</sup>)或者将时滞与参数进行联合估计. 文献[4]提出了一种自适应辨识方法, 通过在自适应中引入滑模项来实现辨识误差的收敛. 文献[5]基于递阶辨识原理, 采用牛顿方法和梯度方法对时滞和参数进行递阶交互估计. 将文献[3-5]中的方法推广至多变量系统时, 由于系统参数的增加与每个输入通道的时滞不同, 算法的复杂性

收稿日期: 2020-11-27; 录用日期: 2021-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61803183); 江苏省自然科学基金项目(BK20180591).

†通讯作者. E-mail: yjl@jiangnan.edu.cn.

和计算量都将增大. 因此, 多变量系统时滞与参数的估计是一个值得研究的课题.

针对时滞未知的多变量系统, 可以通过设置数据回归长度得到高维辨识模型, 该辨识模型的参数向量是稀疏的<sup>[6]</sup>. 辨识高维模型时, 常规的辨识方法不仅需要大量的采样数据, 而且需要通过设定阈值才能得到稀疏解, 阈值选取不当仍会带来较大的估计误差. 考虑到参数向量的稀疏特性, 受压缩感知理论的启发<sup>[7]</sup>, 可以利用贪婪算法对稀疏向量进行估计. 正交匹配追踪 (OMP) 算法是典型的贪婪算法<sup>[8]</sup>, 文献 [9-11] 针对多输入单输出受控自回归 (MISO-CAR) 系统和多输入输出误差系统, 结合梯度搜索、匹配追踪和辅助模型的思想, 在 OMP 算法的基础上提出了改进算法. 然而, OMP 算法及其改进算法在每次迭代时都需要计算高维协方差矩阵的逆矩阵, 随着迭代次数的增加, 计算量将显著增大. 为了避免计算高维矩阵的逆矩阵, 本文基于 Householder 变换和贪婪思想, 针对含有未知时滞的 MISO-CAR 系统, 提出一种在有限采样数据 (甚至采样次数低于稀疏系统参数维数) 条件下的参数与时滞的辨识方法.

## 1 模型描述与问题提出

考虑 CAR 模型描述的 MISO 系统

$$A(z)y(t) = \sum_{i=1}^r z^{-d_i} B_i(z)u_i(t) + v(t). \quad (1)$$

其中:  $r$  是输入通道的数目;  $u_i(t)$  和  $d_i$  是第  $i$  个输入通道的输入和时滞;  $y(t)$  是系统的输出;  $v(t)$  是均值为零和方差为  $\sigma^2$  的白噪声;  $A(z)$  和  $B_i(z)$  是单位后移算子  $z^{-1}[z^{-1}y(t) = y(t-1)]$  的常系数时不变多项式, 即

$$A(z) := 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a},$$

$$B_i(z) := b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2} + \dots + b_{i n_{b_i}} z^{-n_{b_i}}.$$

假设阶次  $n_a$  和  $n_{b_i}$  已知, 参数  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n_a$ ) 和  $b_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, n_{b_i}$ ) 以及时滞  $d_i$  未知, 且当  $t \leq 0$  时  $y(t) = 0, u_i(t) = 0, v(t) = 0$ .

由于输入通道的时滞  $d_i$  未知, 为了便于写出辨识模型, 设置输入数据回归长度  $l$ , 满足

$$l \geq \max(d_i + n_{b_i}).$$

定义系统信息向量  $\varphi(t)$  和参数向量  $\theta$  为

$$\varphi_i(t) :=$$

$$[u_i(t-1), \dots, u_i(t-d_i), u_i(t-d_i-1), \dots,$$

$$u_i(t-d_i-n_{b_i}), \dots, u_i(t-l)]^T \in \mathbf{R}^l,$$

$$\varphi(t) :=$$

$$[-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n_a),$$

$$\varphi_1^T(t), \varphi_2^T(t), \dots, \varphi_r^T(t)]^T \in \mathbf{R}^n,$$

$$n := n_a + r l, \quad (2)$$

$$\theta_i := \underbrace{[0, \dots, 0]_{d_i}}_{d_i}, b_{i1}, \dots, b_{i n_{b_i}}, \underbrace{[0, \dots, 0]_{l-d_i-n_{b_i}}}_{l-d_i-n_{b_i}}]^T \in \mathbf{R}^l, \quad (3)$$

$$\theta := [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, \theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_r^T]^T \in \mathbf{R}^n, \quad (4)$$

则系统的辨识模型可写为

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + v(t). \quad (5)$$

当  $t = 1, 2, \dots, m$ , 定义如下堆积向量和矩阵:

$$\mathbf{Y} := [y(1), y(2), \dots, y(m)]^T \in \mathbf{R}^m, \quad (6)$$

$$\Phi := [\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(m)]^T \in \mathbf{R}^{m \times n}, \quad (7)$$

$$\mathbf{V} := [v(1), v(2), \dots, v(m)]^T \in \mathbf{R}^m, \quad (8)$$

则式(5)可写为

$$\mathbf{Y} = \Phi\theta + \mathbf{V}. \quad (9)$$

当数据量充足, 即  $m \gg n$  时, 极小化准则函数

$$J(\theta) = \|\mathbf{Y} - \Phi\theta\|^2, \quad (10)$$

可得参数向量  $\theta$  的最小二乘 (LS) 估计<sup>[12]</sup>

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{Y}.$$

由式(2)可知, 参数向量  $\theta$  的维数  $n$  较大时, 要获得良好的参数估计需要大量的采样数据.

由式(3)和(4)可知, 参数向量  $\theta$  是含有大量零元素的稀疏向量,  $K := n_a + \sum_{i=1}^r n_{b_i}$  为  $\theta$  的稀疏度. 如果能确定  $\theta$  中非零参数的位置, 则根据  $\theta$  的结构可以确定系统的时滞. 若系统有  $r$  个输入, 则  $\theta$  中共有  $r+1$  个零元素块. 令零元素块中零的个数为  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r+1$ ), 则各输入通道时滞的估计值为

$$\hat{d}_1 = n_1, \quad (11)$$

$$\hat{d}_i = n_i - (l - \hat{d}_{i-1} - n_{b(i-1)}), \quad i = 2, 3, \dots, r. \quad (12)$$

由于系统存在噪声干扰, LS 算法无法得到稀疏解. 虽然可以通过设定一个很小的阈值  $\epsilon$ , 对参数向量的估计值  $\hat{\theta}$  中每个元素  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 进行滤波, 即当  $|\hat{\theta}_i| < \epsilon$ , 令  $\hat{\theta}_i = 0$ <sup>[13]</sup>. 但阈值选取不当, 会导致时滞估计误差较大, 影响辨识效果. 本文试图寻找一种能够在有限采样数据 (甚至  $m < n$ ) 的条件下辨识稀疏参数向量的方法.

## 2 辨识算法

由于  $\theta$  是稀疏向量, 辨识问题可以描述为下列优化问题:

$$\hat{\theta} = \arg \min \|\theta\|_0; \text{ s.t. } \|\mathbf{Y} - \Phi\theta\| \leq \epsilon.$$

其中:  $\|\cdot\|_0$  表示  $l_0$  范数,  $\|\cdot\|$  表示  $l_2$  范数, 约束项  $\varepsilon > 0$  为给定的误差范围. 这是一个非凸的 NP-hard 问题, 实际中也常用  $l_1$  范数代替  $l_0$  范数<sup>[14]</sup>, 即

$$\hat{\theta} = \arg \min \|\theta\|_1; \text{ s.t. } \|\mathbf{Y} - \Phi\theta\| \leq \varepsilon.$$

其中  $\|\cdot\|_1$  表示  $l_1$  范数. 此类优化问题通常可分别用贪婪算法和凸优化方法解决. 贪婪算法以其速度快、效率高和结构简单等特点获得了广泛的应用<sup>[8]</sup>, 其中正交匹配追踪 (OMP) 算法是典型的贪婪算法, OMP 算法步骤<sup>[15]</sup>如下.

输入: 输出向量  $\mathbf{Y}$ , 信息矩阵  $\Phi$ , 稀疏度  $K$ ;

输出: 参数向量估计值  $\hat{\theta}$ .

初始化: 令  $k = 1, \hat{\theta}_0 = 0, r_0 = Y, \Lambda_0 = \emptyset, \Phi_{\Lambda_k} = 0, \theta_{\Lambda_0} = \emptyset$ .

1) 令  $\Omega := \{1, 2, \dots, n\}$ , 计算

$$\lambda_k = \arg \max_{i \in \Omega \setminus \Lambda_{k-1}} \left| \left\langle r_{k-1}, \frac{\phi_j}{\|\phi_j\|} \right\rangle \right|.$$

2) 更新  $\Lambda_k, \Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \lambda_k$ .

3) 更新  $\Phi_{\Lambda_k}, \Phi_{\Lambda_k} = \Phi_{\Lambda_{k-1}} \cup \Phi_{\Lambda_k}$ .

4) 计算第  $k$  次迭代后参数向量的估计值

$$\hat{\theta}_{\Lambda_k} = (\Phi_{\Lambda_k}^T \Phi_{\Lambda_k})^{-1} \Phi_{\Lambda_k}^T \mathbf{Y}.$$

5) 设定一个阈值  $\epsilon$ , 当  $|\hat{\theta}_i| < \epsilon$ , 令  $\hat{\theta}_i = 0$ .

6) 计算第  $k$  次迭代后的残差

$$r_k = \mathbf{Y} - \Phi_{\Lambda_k} \hat{\theta}_{\Lambda_k}.$$

7) 若  $k > K$ , 则停止迭代; 否则,  $k$  增 1, 返回 1) 继续迭代.

OMP 算法每次迭代时都需要对矩阵求逆, 随着迭代次数  $k$  的增加, 计算量将显著增大; 当  $\Phi_{\Lambda_k}$  的维数较高时, 会引入较大的舍入误差; 当  $\Phi_{\Lambda_k}$  的条件数较大时, 矩阵  $\Phi_{\Lambda_k}$  接近病态. 针对这些问题, 本文提出一种贪婪正交最小二乘算法, 其优势在于能在采样数据有限的情况下, 实现对系统参数和时滞的联合估计, 与其他贪婪辨识算法相比, 能避免计算逆矩阵, 从而避免得到病态解, 减少计算量.

### 2.1 基于Householder变换的正交最小二乘算法

引入置换矩阵  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  由  $n$  阶单位阵经过  $K$  次列交换得到. 信息矩阵  $\Phi$  与  $\mathbf{P}$  相乘可将  $\Phi$  中相应的列交换, 若通过贪婪准则确定了  $\mathbf{P}$ , 则  $\Phi\mathbf{P}$  可将信息矩阵  $\Phi$  中对应于非零参数的列置于前  $K$  列. 由于  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{P}$  的乘积仍为单位阵, 式 (10) 可写为

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \|\mathbf{Y} - \Phi\theta\|^2 = \|\mathbf{Y} - (\Phi\mathbf{P})(\mathbf{P}\theta)\|^2 = \\ &\left\| \mathbf{Y} - \begin{bmatrix} \Phi_K & \Phi_{n-K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_K \\ \theta_{n-K} \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &\|\mathbf{Y} - \tilde{\Phi}_K \theta_K\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

其中:  $\theta_K \in \mathbf{R}^K$  为  $\theta$  中非零元素组成的向量,  $\Phi_K \in \mathbf{R}^{m \times K}$  为  $\Phi$  中非零参数对应的列构成的矩阵,  $\Phi_{n-K} \in \mathbf{R}^{m \times (n-K)}$  为  $\Phi$  中剩余的列构成的矩阵,  $\theta_{n-K} \in \mathbf{R}^{n-K}$  为零向量.

极小化准则函数 (13), 可得

$$\hat{\theta}_K = (\Phi_K^T \Phi_K)^{-1} \Phi_K^T \mathbf{Y}. \quad (14)$$

为了避免式 (14) 中计算逆矩阵, 本文基于 Householder 变换对  $\Phi_K$  进行正交分解<sup>[16]</sup>, 从而利用回代法求最小二乘解.

Householder 变换能将向量  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$  变换为稀疏向量  $\|\mathbf{a}\| \mathbf{e}_k$ , 其中  $\mathbf{e}_k$  表示仅有第  $k$  个元素为 1, 其他元素均为 0 的  $p$  维向量. 令实现这一变换的 Householder 变换矩阵为  $\mathbf{H}_k$ <sup>[17]</sup>, 即  $\mathbf{H}_k \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \mathbf{e}_k$ , 其中

$$\mathbf{H}_k = \frac{(\mathbf{a} - \beta \mathbf{e}_k)(\mathbf{a} - \beta \mathbf{e}_k)^T}{\beta(\beta - a_k)};$$

$$\bar{\beta} = -\frac{|a_k|}{a_k} \|\mathbf{a}\|;$$

$$\beta = \begin{cases} \|\mathbf{a}\|, & a_k = 0; \\ \pm \frac{a_k}{|a_k|} \|\mathbf{a}\|, & a_k \neq 0. \end{cases}$$

将  $\Phi_K$  写为  $\Phi_K = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K], \phi_i = [\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots, \varphi_{mi}]^T, i = 1, 2, \dots, K$ . 对矩阵  $\Phi_K$  进行  $K$  次 Householder 变换, 即  $\Phi_K^{(K)} = \mathbf{H}_K \mathbf{H}_{K-1} \dots \mathbf{H}_1 \Phi_K$ , 其中

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{I} - \frac{\nu_j \nu_j^T}{\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, K; \quad (15)$$

$$\nu_j(i) = \begin{cases} 0, & i < j; \\ \varphi_{jj}^{(j)} + \text{sgn}[\varphi_{jj}^{(j)}] \alpha_j, & i = j; \\ \varphi_{ij}^{(j)}, & i > j; \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_j = \alpha_j (\alpha_j + |\varphi_{jj}^{(j)}|); \quad (17)$$

$$\alpha_j = \sqrt{\sum_{i=j}^m [\varphi_{ij}^{(j)}]^2}. \quad (18)$$

第  $j$  次 Householder 变换的目标是使  $\Phi_K^{(j-1)}$  的前  $j-1$  列不变, 并将  $\Phi_K^{(j-1)}$  中第  $j$  列  $\phi_j^{(j-1)}$  中第  $j$  个元素之后所有的元素变成 0, 即

$$\begin{aligned} \Phi_K^{(j)} &= \mathbf{H}_j \Phi_K^{(j-1)} = \\ &[\phi_1^{(j-1)}, \dots, \phi_{j-1}^{(j-1)}, \phi_j^{(j)}, \dots, \phi_K^{(j)}]. \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{j-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{H}}_j \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_j [\varphi_{jj}^{(j-1)}, \dots, \varphi_{mj}^{(j-1)}]^T = [\varphi_{jj}^{(j)}, 0, \dots, 0]^T, \quad (20)$$

$$\varphi_{jj}^{(j)} = \sqrt{\sum_{i=j}^m [\varphi_{ij}^{(j-1)}]^2}. \quad (21)$$

令  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{H}_K \mathbf{H}_{K-1} \dots \mathbf{H}_1$ , 有

$$\mathbf{Q}^T \Phi_K = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{11} & \tilde{\varphi}_{12} & \tilde{\varphi}_{13} & \dots & \tilde{\varphi}_{1K} \\ 0 & \tilde{\varphi}_{22} & \tilde{\varphi}_{23} & \dots & \tilde{\varphi}_{2K} \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_{33} & \dots & \tilde{\varphi}_{3K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\varphi}_{KK} \end{bmatrix}.$$

其中:  $\tilde{\varphi}_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, K$ ) 为  $\Phi_K$  经过  $K$  次 Householder 变换后的各元素,  $\mathbf{R}_K \in \mathbf{R}^{K \times K}$  为上三角矩阵.

根据 Householder 变换的保范性, 式(13)可写为

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \|\mathbf{Y} - \Phi_K \boldsymbol{\theta}_K\|^2 = \\ &\|\mathbf{Q}^T(\mathbf{Y} - \Phi_K \boldsymbol{\theta}_K)\|^2 = \|\mathbf{Q}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Q}^T \Phi_K \boldsymbol{\theta}_K\|^2 = \\ &\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_K \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_K \right\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{R}_K \boldsymbol{\theta}_K\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

其中:  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^K, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^{m-K}$ . 极小化  $J(\boldsymbol{\theta})$  可得

$$\mathbf{R}_K \boldsymbol{\theta}_K = \mathbf{b}; \quad (23)$$

$$\min J(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{d}\|^2. \quad (24)$$

由于  $\mathbf{R}_K$  为上三角矩阵, 可用回代法求  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_K$ , 即

$$\begin{cases} \hat{\theta}_K = \frac{b_K}{\tilde{\varphi}_{KK}}, \\ \hat{\theta}_i = \frac{1}{\tilde{\varphi}_{ii}} \left( b_i - \sum_{k=1}^{K-i} \tilde{\varphi}_{i+k,i} \hat{\theta}_{i+k} \right). \end{cases} \quad (25)$$

其中:  $i = K-1, K-2, \dots, 1$ ,  $\hat{\theta}_i$  和  $b_i$  分别为  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_K$  和  $\mathbf{b}$  的第  $i$  个元素.

若置换矩阵  $\mathbf{P}$  已知, 则由式(13)可得稀疏向量  $\boldsymbol{\theta}$  的参数估计值为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

再根据式(11)和(12)得到各输入通道的时滞估计.

综上所述, 式(11)、(12)、(15)~(18)、(25)和(26)构成了基于 Householder 变换的正交最小二乘(H-OLS)算法.

众所周知, 矩阵求逆计算量大, 若用初等变换计算式(14)中的逆矩阵, 则式(14)求参数值的总计算量为  $\frac{8}{3}K^3 + \left(2m - \frac{1}{2}\right)K^2 + \left(2m - \frac{7}{6}\right)K$ , 计算复杂度为  $O(K^3)$ . 而 H-OLS 算法避免了矩阵求逆, 因此, 计算量能得到极大改善. 利用 H-OLS 算法求参数值的总计算量为  $(4m-1)K^2 + (7m+3)K$ , 计算复杂度为  $O(K^2)$ .

## 2.2 基于Householder变换的贪婪准则

基于 Householder 变换的 OLS 算法是在假设置换矩阵  $\mathbf{P}$  已知的前提下推导的, 下面讨论基于 Householder 变换的贪婪准则, 以确定置换矩阵  $\mathbf{P}$ .

由式(9)可知, 输出向量  $\mathbf{Y}$  可以表示为信息矩阵  $\Phi$  中各列的线性组合加上白噪声项的形式, 即

$$\mathbf{Y} = \tilde{\phi}_1 \tilde{\theta}_1 + \tilde{\phi}_2 \tilde{\theta}_2 + \dots + \tilde{\phi}_n \tilde{\theta}_n + \mathbf{V}. \quad (27)$$

其中:  $\tilde{\phi}_i$  为  $\Phi$  的第  $i$  列,  $\tilde{\theta}_i$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的第  $i$  个元素. 由于  $\boldsymbol{\theta}$  的稀疏性, 式(27)等号右边只有少量非零项, 贪婪算法的思想就是通过  $K$  次迭代将非零项逐个选出.

设该贪婪算法第  $k$  次迭代要选择的列为  $[\mathbf{x} \ \mathbf{y}]^{-1}$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{k-1}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m-k+1}$ . 由式(19)~(21)可知, 在第  $k$  次 Householder 变换时, 有

$$\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \mathbf{e}_1, \quad (28)$$

式(28)可等价于

$$\mathbf{e}_1^T \tilde{\mathbf{H}}_k = \frac{\mathbf{y}^T}{\|\mathbf{y}\|}. \quad (29)$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Y} &= \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1}^T \mathbf{Y} = \mathbf{H}_k (\mathbf{Q}_{k-1}^T \mathbf{Y}) = \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{H}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{k-1} \\ \mathbf{d}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{k-1} \\ \tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{d}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{k-1} \\ d_1 \\ \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

由式(24)可知, 此时残差平方和为

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \|\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2 - \|\mathbf{b}_{k-1}\|^2 - \|d_1\|^2, \quad (30)$$

其中  $d_1$  为  $\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{d}_{k-1}$  的第 1 个元素. 结合式(29)可得

$$d_1 = \mathbf{e}_1^T (\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{d}_{k-1}) = \mathbf{e}_1^T \tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{d}_{k-1} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{d}_{k-1}}{\|\mathbf{y}\|}.$$

式(30)又可写为

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \|\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2 - \|\mathbf{b}_{k-1}\|^2 - \frac{(\mathbf{y}^T \mathbf{d}_{k-1})^2}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

若要极小化  $J(\boldsymbol{\theta})$ , 应使  $|\mathbf{y}^T \mathbf{d}_{k-1}| / \|\mathbf{y}\|$  极大, 即第  $k$  次贪婪迭代时, 选择的列索引  $j$  需满足

$$j = \arg \max_{l=k:n} \frac{|\Phi(k:m, l)^T \mathbf{Y}(k:m)|}{\|\Phi(k:m, l)\|}. \quad (31)$$

因此, 贪婪选择的步骤如下.

step 1: 令  $k = 1, \mathbf{p} = [1, 2, \dots, n] \in \mathbf{N}^{1 \times n}$ .

step 2: 由式(31)得到第  $k$  次迭代从信息矩阵  $\Phi$  中选出的列的索引.

step 3: 分别交换  $\Phi$  和  $\mathbf{p}$  各自的第  $k$  列和第  $j$  列.

step 4: 若  $k > K$ , 则停止迭代; 否则,  $k$  增 1, 返回 step 2, 继续迭代.

上述步骤中的索引向量  $\mathbf{p}$  能够记录该贪婪算法在每次迭代时选中的列在  $\Phi$  中的位置, 根据索引向量  $\mathbf{p}$  可得置换矩阵  $\mathbf{P}$ , 即  $\mathbf{P}$  为将  $n$  阶单位阵按  $\mathbf{p}$  进行置

换后的矩阵.

### 2.3 基于Householder变换的贪婪正交最小二乘算法

将H-OLS算法与基于Householder变换的贪婪思想相结合,可得到基于Householder变换的贪婪正交最小二乘(H-GOLS)算法.将该算法用于MISO-CAR系统参数与时滞的辨识,既能降低辨识成本,提高辨识效率,又能避免对高维矩阵求逆,减少计算量.针对MISO-CAR系统,利用H-GOLS算法辨识系统参数与时滞的步骤如下.

输入: 数据回归长度 $l$ ,输入输出数据 $\{u_i(t), y(t) : i = 1, 2, \dots, r; t = 1, 2, \dots, m\}$ ,稀疏度 $K$ ;

输出: 参数向量估计值 $\hat{\theta}$ ,时滞估计值 $\hat{d}_i$ .

初始化: 令 $k = 1, p = [1, 2, \dots, n] \in N^{1 \times n}$ .

1) 由式(6)~(8)构造输出向量 $Y \in R^m$ 和信息矩阵 $\Phi \in R^{m \times n}$ .

2) 根据式(31)选出 $\Phi$ 中第 $j$ 列.

3) 交换 $\Phi$ 和 $p$ 中第 $k$ 列和第 $j$ 列.

4) 根据式(15)~(18)计算Householder矩阵 $H_k$ .

5) 对 $\Phi$ 和 $Y$ 进行Householder变换.

6) 若 $k > K$ ,则停止迭代;否则, $k$ 增1,返回2),继续迭代.

7) 根据式(25)求解 $\hat{\theta}_K$ ,再根据 $p$ 得到参数向量 $\theta$ 的估计值 $\hat{\theta}$ .

8) 由式(11)和(12)可得系统时滞的估计值 $\hat{d}_i$ .

### 3 仿真实验

考虑下列具有时滞的MISO-CAR系统:

$$A(z)y(t) = \sum_{i=1}^5 z^{-d_i} B_i(z)u_i(t) + v(t);$$

$$A(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.6z^{-2},$$

$$B_1(z) = 0.5z^{-1} - 1.8z^{-2} + 0.8z^{-3},$$

$$B_2(z) = -0.4z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.3z^{-3},$$

$$B_3(z) = 0.3z^{-1} - 0.5z^{-2} - 0.7z^{-3},$$

$$B_4(z) = -0.8z^{-1} + 2.6z^{-2} - 0.4z^{-3},$$

$$B_5(z) = -0.3z^{-1} + 0.3z^{-2} - 1.6z^{-3}.$$

各输入通道的时滞分别为 $d_1 = 20, d_2 = 10, d_3 = 30, d_4 = 15, d_5 = 20$ .取 $l = 50$ ,则待辨识的参数向量为

$$\theta = [0.2, 0.6, \mathbf{0}_{20}, 0.5, -1.8, 0.8, \mathbf{0}_{37}, -0.4, 0.9, -0.3, \mathbf{0}_{67}, 0.3, -0.5, -0.7, \mathbf{0}_{32}, -0.8, 2.6, -0.4, \mathbf{0}_{52}, -0.3, 0.3, -1.6, \mathbf{0}_{27}]^T \in R^n.$$

其中: $\theta$ 的维数 $n = n_a + rl = 252$ , $\theta$ 的稀疏度 $K = \|\theta\|_0 = n_a + \sum_{i=1}^5 n_{bi} = 17$ .

仿真时,输入 $\{u_i(t)\}$ 采用单位方差服从均匀分布的白噪声信号,噪声 $\{v(t)\}$ 采用方差为 $\sigma^2 = 0.10^2$ 的零均值白噪声序列.定义参数估计误差 $\delta := \|\theta - \hat{\theta}\|/\|\theta\|$ ,当采样数据长度 $m = 500$ 时,取阈值 $\epsilon = 0.05$ ,利用LS算法得到的辨识结果为

$$\hat{\theta}_{LS_1} = [0.2070, 0.5590, \mathbf{0}_{20}, 0.4929, -1.7954, 0.7686, \underline{0.0849}, \mathbf{0}_{36}, -0.3890, 0.9050, -0.2783, \mathbf{0}_{67}, 0.3033, -0.4830, -0.7214, \mathbf{0}_{32}, -0.7984, 2.5860, 0.3554, \underline{0.1131}, 0, \underline{0.0766}, \mathbf{0}_{49}, -0.2946, 0.2912, -1.5847, 0, \underline{-0.0723}, \mathbf{0}_{25}]^T \in R^n.$$

由 $\theta$ 的结构可知,仿真结果中划线处的4个参数应置零,若想得到精确的稀疏结构,则需适当增加阈值或采样数据量.将采样数据长度增加到 $m = 1000$ ,仍取阈值 $\epsilon = 0.05$ ,利用LS算法得到的辨识结果为

$$\hat{\theta}_{LS_2} = [0.2090, 0.5923, \mathbf{0}_{20}, 0.4958, -1.7982, 0.7797, \mathbf{0}_{37}, -0.3962, 0.8972, -0.2874, \mathbf{0}_{67}, 0.3020, -0.4902, -0.7071, \mathbf{0}_{32}, -0.8051, 2.5937, -0.3655, \mathbf{0}_{52}, -0.2994, 0.2945, -1.5938, \mathbf{0}_{27}]^T \in R^n.$$

此时, $\theta$ 的稀疏结构估计准确,因此能够得到准确的时滞估计,并且参数估计误差为 $\delta = 1.1529\%$ .上述仿真结果说明,采用LS算法辨识该系统,需要有足够量的采样数据和选取适当的阈值.

当采样数据较少时,取 $m = 100, \sigma^2 = 0.10^2$ ,利用本文提出的H-GOLS算法得到的辨识结果为

$$\hat{\theta}_{H-GOLS} = [0.2015, 0.5968, \mathbf{0}_{20}, 0.4974, -1.7931, 0.8013, \mathbf{0}_{37}, -0.3993, 0.8946, -0.2982, \mathbf{0}_{67}, 0.2995, -0.5107, -0.7078, \mathbf{0}_{32}, -0.7854, 2.6082, -0.3943, \mathbf{0}_{52}, -0.2974, 0.2964, -1.5930, \mathbf{0}_{27}]^T \in R^n.$$

此时,参数向量 $\theta$ 的稀疏结构估计准确,并且参数估计误差为 $\delta = 0.6270\%$ . $\hat{\theta}_{H-GOLS}$ 中有6个零元素块,各零元素块中零的数目分别为 $n_1 = 20, n_2 = 37, n_3 = 67, n_4 = 32, n_5 = 52, n_6 = 27$ .由非零元素个数可知, $n_{b1} = n_{b2} = n_{b3} = n_{b4} = n_{b5} = 3$ .因此,由式(11)和(12)可知,系统中各输入通道时滞的估计值分别为

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 &= n_1 = 20, \\ \hat{d}_2 &= n_2 - (l - \hat{d}_1 - n_{b1}) = 10, \\ \hat{d}_3 &= n_3 - (l - \hat{d}_2 - n_{b2}) = 30, \end{aligned}$$

$$\hat{d}_4 = n_4 - (l - \hat{d}_3 - n_{b3}) = 15,$$

$$\hat{d}_5 = n_5 - (l - \hat{d}_4 - n_{b4}) = 20.$$

当噪声方差不变时,在不同采样数据长度下,采用H-GOLS算法辨识该系统,均能获得准确的稀疏结构,参数估计误差如图1所示.仿真结果表明,数据量的增加有利于提高参数估计精度,但在数据量较少时,仍能获得精度较高的参数估计.

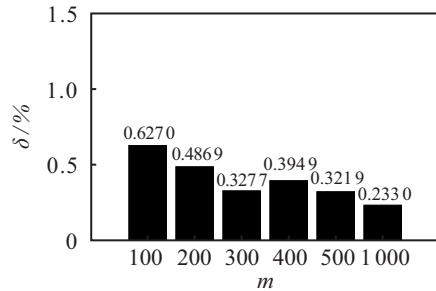


图1 不同采样数据长度  $m$  下的参数估计误差  $\delta$

当采样数据长度  $m = 100$ , 噪声方差取不同值时,参数估计误差的结果如图2所示.由图2可以看出,本文提出的H-GOLS算法具有较好的鲁棒性.因此,H-GOLS算法无需通过设定阈值得到稀疏解,能够在少量采样数据的条件下得到系统时滞与参数的联合估计,并且参数辨识精度高于LS算法.

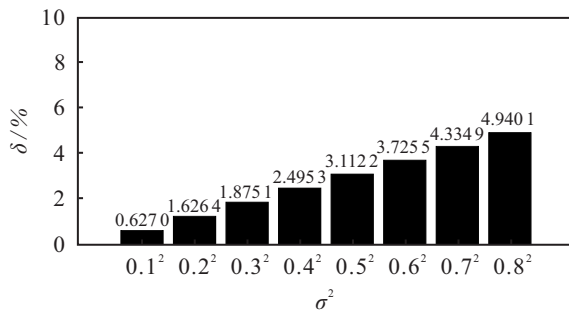


图2 不同噪声方差  $\sigma^2$  下的参数估计误差  $\delta$

## 4 结论

本文针对含有未知时滞的MISO-CAR系统,结合Householder变换和贪婪思想,提出了一种基于Householder变换的贪婪正交最小二乘辨识算法.该算法能在少量采样数据下实现参数和多时滞的联合估计,能够避免对高维协方差矩阵求逆,减少计算量.

### 参考文献(References)

- [1] Normey-Rico J E. Control of dead-time processes[M]. London: Springer, 2007: 1-50.
- [2] Zheng G, Barbot J P, Boutat D, et al. Identification of the delay parameter for nonlinear time-delay systems with unknown inputs[J]. Automatica, 2013, 49(6): 1755-1760.
- [3] Wang Q G, Guo X, Zhang Y. Direct identification of continuous time delay systems from step responses[J]. Journal of Process Control, 2001, 11(5): 531-542.

- [4] Na J, Ren X M, Xia Y Q. Adaptive parameter identification of linear SISO systems with unknown time-delay[J]. Systems & Control Letters, 2014, 66(1): 43-50.
- [5] Bedoui S, Ltaief M, Abderrahim K. Hierarchical gradient based identification of discrete-time delay systems[C]. The 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Firenze, 2013: 4565-4570.
- [6] Sanandaji B M, Vincent T L, Wakin M B, et al. Compressive System Identification of LTI and LTV ARX models[C]. The 50th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, 2011: 791-798.
- [7] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [8] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [9] Liu Y J, Tao T Y, Ding F. Parameter and time-delay identification for MISO systems based on orthogonal matching pursuit algorithm[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2103-2107.
- [10] Liu Y J, You J Y, Ding F. Iterative identification algorithm for multiple-input systems based on auxiliary model and orthogonal matching pursuit[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 787-792.
- [11] You J Y, Liu Y J, Chen J, et al. Iterative identification for multiple-input systems with time-delays based on greedy pursuit and auxiliary model[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(11): 5819-5833.
- [12] Ding F. Systems identification—New theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2013: 117-128.
- [13] Xie X M, Ding F. Adaptive control system[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 116-134.
- [14] Elad M. Sparse and redundant representations—from theory to applications in signal and image processing[M]. New York: Springer-Verlag, 2010: 3-35.
- [15] Fang H, Yang H R. Greedy algorithm and compressed sensing[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(12): 1413-1421.
- [16] Chen S, Billings S A, Luo W, et al. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification[J]. International Journal of Control, 1989, 50(5): 1873-1896.
- [17] Zhang X D. Matrix analysis and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 205-213.

### 作者简介

刘艳君(1983—),女,副教授,博士,从事系统辨识、自适应控制等研究, E-mail: yjl@jiangnan.edu.cn;

韩萍(1997—),女,硕士生,从事系统辨识的研究, E-mail: 6191905001@stu.jiangnan.edu.cn;

马君霞(1984—),女,副教授,博士,从事系统辨识、自适应控制等研究, E-mail: jxma@jiangnan.edu.cn.