控制与决策
Control and Decision

变阶分数阶微分方程的数值解法综述

孙宝, 张文超, 李占龙, 范凯

变阶分数阶微分方程的数值解法综述

孙 宝[1†], 张文超[1], 李占龙[2], 范 凯[1]

(1. 太原科技大学 应用科学学院，太原 030024；2. 太原科技大学 机械工程学院, 太原 030024)

摘 要: 近年来,分数阶微积分作为一种工具已经被广泛应用于工程中的各个领域.较常阶分数阶微积分算子而言,变阶分数阶微积分算子能够更加准确地描述复杂系统的物理特性,变阶分数阶微积分建模作为一个强大的数学工具,为工程建模提供了便利.在前人优秀研究成果的基础上,结合近几年的国内外相关学者的研究成果对变分数阶微积分方程的研究作全面的综述.以变阶分数阶微分方程、变阶时间分数阶对流-扩散方程、变阶分数阶反应-扩散方程、变阶分数阶积分-微分方程和时滞变阶分数阶微分方程为主要研究对象,从变分数阶微积分算子的相关定义、模型、数值解及在工程中的相关应用等几个方面进行介绍.研究发现,近年来的算法多集中在多项式算法的基础上,通过构建不同的运算矩阵来实现变阶微分方程到代数方程组的转换.该综述可为相关领域的研究学者提供参考.

关键词: 变阶分数阶微积分；分数阶微积分；数值解；最优控制；存在唯一性；多项式算法

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1496

引用格式: 孙宝,张文超,李占龙,等. 变阶分数阶微分方程的数值解法综述[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2433-2442.

A review of numerical solutions of variable-order fractional differential equations

SUN Bao[1†], *ZHANG Wen-chao*[1], *LI Zhan-long*[2], *FAN Kai*[1]

(1. School of Applied Science，Taiyuan University of Science and Technology，Taiyuan 030024，China；2. School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology，Taiyuan 030024，China)

Abstract: In recent years, fractional calculus as a tool has been widely used in various fields of engineering. Compared with the constant order fractional calculus operator, the variable order fractional calculus operator can describe the physical properties of complex systems more accurately. As a powerful mathematical tool, the variable order fractional calculus modeling provides convenience for engineering modeling. On the basis of previous excellent research results, combined with the research results of domestic and foreign scholars in recent years, this paper makes a comprehensive review of the research of variable fractional calculus equations. The variable-order fractional differential equations (VO-FDEs), the variable-order time fractional convection-diffusion equations (VOTFC-DEs), the variable-order fractional reaction-diffusion equations (VOTFR-DEs), the variable-order fractional integral-differential equations (VO-FIDEs), the variable-order delay fractional differential equations (VO-DFDEs) and the variable-order fractional optimal control problems (V-FOCPs) are taken as the main research objects, which are introduced from several aspects of variable fractional calculus operator related definitions, models, numerical solutions and applications in engineering. It is found that most of the algorithms in recent years are based on polynomial algorithms, which can realize the transformation of variable order differential equations to algebraic equations by constructing different operation matrices. This review can provide reference for researchers in related fields.

Keywords: variable-order fractional calculus；fractional calculus；numerical solution；optimal control；existence and uniqueness；polynomial algorithm

0 引 言

微积分作为一门学科,自 17 世纪以来已逐渐被大家所熟知. 在整数阶微积分的基础上,为了更好地反映一些物理现象,满足实际需求,分数阶微积分随之出现. L'Hospital 在 1695 年提出的猜想: 当 $n = 1/2$ 时, $\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}x^n$ 是什么意思? 开创了学者们对分

收稿日期: 2021-08-25；**录用日期:** 2021-10-27.
基金项目: 国家自然科学基金项目(51805347)；中国博士后科学基金项目(2019M661058).
责任编委: 刘宝碇.
†通讯作者. E-mail: bao810321@163.com.

数阶微积分理论的研究,至今已有300多年历史,直到1812年,Laplace才利用积分给出一个分数阶导数的定义[1]. 从19世纪初开始,数学家Liouville、Riemann和Holmgren等开始系统地研究分数阶微积分. 后来国内外学者根据整数阶微积分理论推导出分数阶微积分理论. 1999年,Podlubny教授[2]在其著作中系统地阐述了分数阶微积分的相关理论. 2010年,Diethelm教授[3]在其著作中讨论了分数阶微积分的重要性,为分数阶微积分以后的发展奠定了一定的理论基础.

分数阶微积分算子的非局部性使得其在建模时,动力学的下一个状态需要依赖于它之前的状态,从而能够较为精准地描述物理系统的动态特性,已被广泛应用于工程等领域,如粘弹性系统[4-5]、生物工程[6]、生物化学[7]、力学[8]等. 分数阶微积分算子大致可分为两类,一类为常阶分数阶算子,即分数阶微积分算子的阶次保持不变;一类为变阶分数阶算子, 是对常阶分数阶算子的扩展,算子阶次由一类函数进行表示,可以为任何的实数和复数阶,同时变阶微积分算子的阶次可以定义为系统内部或外部变量的函数,可以是关于时间、空间、温度、系统能量以及不同变量间的组合函数,阶次的可变性为现实中的建模问题提供了较大的自由度. 但是,如何对复杂系统的建模过程进行准确描述和分析是一个非常复杂而困难的问题. 在文献[9]中,Sun等对整数阶导数、常阶分数阶导数和两种变阶分数阶导数对于表征系统的记忆性进行了比较研究,研究表明:整数阶微分可以较好地描述系统的短记忆性,常分数阶微分在描述系统的长记忆性方面具有一定的优势,而变阶分数阶微分具有描述复杂系统变记忆的特性.

1993年,变阶分数阶微积分被提出[10],是对常阶分数阶微积分的推广. 相较于常阶分数阶微积分算子,变阶分数阶算子对于模拟复杂物理系统具有一些非常强大的特性,如能够较为准确地描述幂律现象中出现的非局部性、频率、路径或时间依赖等特性[11]. 同时,变阶分数阶微积分建模可以在不改变控制结构的基础上,通过阶次的变化实现模型间的无缝衔接,以用较少的模型来描述较为广泛的动力学现象. 变阶分数阶微积分算子可作为建模非线性分数阶微分方程和混沌系统的有力工具[12],常用来描述非线性动力学系统,如受空间变化阻尼阶次影响的振子响应建模、复杂结构中异常扩散建模、接触和迟滞非线性动力学建模以及复杂控制系统建模等. 这类分数阶微积分对于研究随时间和空间变化的记忆性质极为有用,主要用于优化、稳定性分析、数值模拟等方面[13]. 同时,变阶分数阶微积分算子的建模优势使得其计算复杂性不断增加,其解析解大多不存在显式形式,目前对于变阶分数阶的研究大多停留在数值解的研究上[14].

变阶分数阶微积分作为一种数学工具,由于其能更好地描述工程中的反常扩散问题,使得其在工程领域快速发展,对于变阶分数阶微分方程解的研究已经成为国内外研究的热点内容. 由于变阶分数阶微分方程中所含的分数阶幂项使得其在求解中存在一定的困难,经典的算法已经不能更好地解决这些问题. 近年来,通过国内外学者的不懈努力,大量新的算法不断地被提出. 同时,由于变阶分数阶算子的核具有变指数,在大多数情况下不可能得出变阶分数阶方程的解析解,这为变阶分数阶解的研究带来了巨大的挑战,对于解析解的研究仍处于初级阶段. 因此,学者们将目标转向了对其数值解的研究,越来越多的数学物理方程已经使用更为高效的数值计算方法进行求解. 目前对于变阶分数阶方程模型的研究热点有: 1)变阶分数阶粘弹性系统的研究; 2)变阶分数阶微积分方程数值计算理论的研究; 3)变阶分数阶微分方程计算软件开发的研究.

对于变阶分数阶的数值解研究是非常重要的,本文以变分数阶微积分方程的数值算法为主要研究内容,调研了大量的国内外相关文献,较为系统地介绍了变分数阶微积分方程数值算法的最新研究进展,旨在为相关领域学者提供便利.

1 变阶分数阶微积分算子相关理论

随着分数阶微积分理论的不断发展,分数阶微积分算子的定义也层出不穷,在不同的技术领域中,学者们根据实际需求提出了不同的算子定义,较为常见的为Riemann-Liouville(R-L型)定义、Caputo型定义、Grünwald-Letnikov(G-L型)定义.

定义1 (R-L型)[15] 对于任意的连续函数$f(t)$,当阶数为$\alpha(t)$时,Riemann-Liouville分数阶微积分定义可表示为

$$
{}_0^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha(t)}f(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)-1}}{\Gamma(-\alpha(t))}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ R(\alpha(t))\in R^-;\\ f(t),\ \alpha(t)=0;\\ \dfrac{\mathrm{d}^{\lceil R(\alpha(t))\rceil}}{\mathrm{d}t^{\lceil R(\alpha(t))\rceil}}{}_0^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha(t)-\lceil R(\alpha(t))\rceil}f(t),\ R(\alpha(t))\in R^+;\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_0^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha(t)-1}f(t),\ R(\alpha(t))=0,\alpha(t)\neq 0.\end{cases}\tag{1}
$$

其中: $t \in [0,t]$, 当 $\alpha(t)$ 为常数时, 该算子为常阶分数阶微积分算子, 当 $\alpha(t)$ 是关于 t 的函数时, 该算子为变阶分数阶微积分算子, $R(\alpha(t))$ 为 $\alpha(t)$ 的实部, $\lceil R(\alpha(t))\rceil$ 表示对 $R(\alpha(t))$ 向上取整, 下同. 当 $\alpha(t)>0$ 时, 该算子为积分算子, 当 $\alpha(t)<0$ 时, 该算子表示为微分算子. $\Gamma(\cdot)$ 为Gamma函数.

Riemann-Liouville定义在数学表达上更为严格, 但在实际的工程运用及数值计算中其需要考虑初边值条件, 使得其在计算中较难处理, 所以在工程的实际计算中, 常用Caputo定义进行计算, 其多用于关于时间的分数阶导数计算.

定义2 (Caputo型)[15] 对于任意的连续函数 $f(t)$, 当阶数为 $\alpha(t)$ 时, Caputo分数阶微积分定义可表示为

$$
{}_0^C D_t^{\alpha(t)} f(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)-1}}{\Gamma(-\alpha(t))} f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ R(\alpha(t))\in R^-;\\ f(t),\ \alpha(t)=0;\\ \dfrac{\displaystyle\int_0^t \frac{f^{\lceil R(\alpha(t))\rceil}(t)}{(t-\tau)^{\alpha(t)-\lceil R(\alpha(t))\rceil+1}}\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\lceil R(\alpha(t))\rceil-\alpha(t))},\ R(\alpha(t))\in R^+;\\ {}_0^C D_t^{\alpha(t)-1}\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t},\ R(\alpha(t))=0,\alpha\neq 0.\end{cases} \tag{2}
$$

其中: 当 $\alpha(t)$ 不再是固定值, 而是关于 t 的函数时, 该定义的应用领域就更为广泛, 其对应的微积分方程在求解时也更为复杂.

定义3 (G-L型)[15] 对于任意的连续函数 $f(t)$, 当阶数为 $\alpha(t)$ 时, Grünwald-Letnikov分数阶导数定义可表示为

$$
{}_0^{GL} D_t^{\alpha(t)} f(t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{[t/h]}(-1)^k\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ k\end{bmatrix} f(t-kh)}{h^{\alpha(t)}}. \tag{3}
$$

除此之外, 近年来国内外学者在研究变阶分数阶微积分时提出了一些其他定义. Caputo等[16]推导出了一种新的变阶分数阶导数定义, 具体表述如下.

定义4 (CF型) 对于任意的连续函数 $f(t)$, 当变阶阶数为 $\alpha(t)$ 时, Caputo-Fabrizio导数定义如下:

$$
{}_0^{\mathrm{CF}} D_t^{\alpha(t)} f(t)=\frac{(2-\alpha(t))M(\alpha(t))}{2(1-\alpha(t))}\int_0^t \exp\Big[-\alpha(t)\frac{(t-\tau)}{1-\alpha(t)}\Big] f'(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4}
$$

其中: $\alpha(t)\,(0<\alpha(t)<1)$ 为关于时间 t 的函数, $M(\alpha(t))=2/(2-\alpha(t))$ 为标准化函数.

2016年, Atangana等[17]在Caputo-Fabrizio定义的基础上, 结合Mittag-Leffler函数, 推导出了一种新的变分数阶导数定义, 形式如下.

定义5 (ABC型) 对于任意的连续函数 $f(t)$, 变阶分数阶Atangana-Baleanu-Caputo导数定义为

$$
{}_0^{\mathrm{ABC}} D_t^{\alpha(t)} f(t)=\frac{B(\alpha(t))}{1-\alpha(t)}\int_0^t E_{\alpha(t)}\Big[-\alpha(t)\frac{(t-\tau)^{\alpha(t)}}{1-\alpha(t)}\Big] f'(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5}
$$

其中: $0<\alpha(t)<1$, $B(\alpha(t))=1-\alpha(t)+\dfrac{\alpha(t)}{\Gamma(\alpha(t))}$ 为标准化函数, $E_{\alpha(t)}$ 为Mittag-Leffler函数.

2020年, Heydari等[18]为解决Atangana-Baleanu和Caputo-Fabrizio意义下的非奇异变阶分数阶导数的局限性, 引入一种新的以Mittag-Leffler函数为核的非奇异变阶分数阶导数, 其定义如下.

定义6 (HH型) 对于任意的连续函数 $f(t)$, 变阶分数阶Heydari-Hosseininia导数定义为

$$
{}_0^{\mathrm{HH}} D_t^{\alpha(t)} f(t)=\frac{1}{1-\alpha(t)}\int_0^t u'(t)E_1\Big(\frac{-\alpha(t)(t-\tau)}{1-\alpha(t)}\Big)\mathrm{d}\tau. \tag{6}
$$

其中: $0<\alpha(t)<1$, E_1 为Mittag-Leffler函数.

2 变阶分数阶微积分方程的解

2.1 变阶分数阶微分方程解的存在唯一性

无论是分数阶还是整数阶微分方程, 对于其解的存在唯一性研究也是一项十分重要的课题. Daftardar-Gejji等[19]给出了一类特殊的分数阶微分方程解的存在唯一性理论. 但是, 目前对于变阶微分方程解存在唯一性的相关文献有限, 国内外学者对该领域的研究还不够完善. Razminia等[20]给出了4个定理证明了变阶分数阶微分方程解的存在性, 并证明在满足Lebesgue可测性、非线性项的连续性和微分运算条件下, 变阶分数阶微分方程存在解. An等[21]利用Banach压缩映射原理证明了变阶分数阶微分方程初值问题解的存在唯一性. Zhang等[22]研究了变阶分数阶导数下的微分方程初值问题解的存在唯一性, 并通过实例验证这些理论. Moualkia等[23]用Picard迭代法证明了一类多维分数阶微分方程解的存在性, 并提出了新的唯一性条件.

2.2 变阶分数阶微积分方程的数值解

从数学角度来讲, 分数阶微分方程又可分为线性分数阶微分方程及非线性分数阶微分方程. 对于线性分数阶微分方程, 可以通过Laplace变换、Fourier变换、变分迭代法等[24-25]算法求出解析解. 1999年, Podlubny教授[2]在其专著中给出了经典 n 项常阶分数阶微分方程的解析解形式. 但是当项数太多时, 解

析解的表达式就越加复杂,解析解中含有一些特殊函数导致求解难度增大,所以对于较为复杂的系统,常通过数值响应来描述其物理特性. 在实际的工程建模中,往往需要运用非线性分数阶微积分方程去模拟物理现象. 较线性方程而言,非线性项为方程的求解增加了难度,上述所介绍的方法对该类方程将不再适用. Doha 等[26] 提出了将移位的 Jacobi 多项式与 Tau 方法相结合用来求解分数阶微分方程. Garrappa[27] 为了解决分数阶微分方程、多阶系统的分数阶微分方程及多项分数阶微分方程,以分式线性多步法为依托,提出了一套 Matlab 程序,为这 3 类方程的计算提供了便利. Bazm 等[28] 提出了用 Legendre 多项式求解非线性微分方程.

变阶分数阶微积分研究的是算子的阶随时间和 (或) 空间变化的分数阶算子, 首个变阶分数阶微分的概念是对 Riemann-Liouville 和 Marchaud 的分数阶微分定义通过 Fourier 变换得到的, 随后, Lorenzo 等[29] 提出了变阶分数阶算子及分布阶分数算子的概念. 相较于常阶分数阶微积分方程,变阶分数阶微积分方程的数值求解算法更为复杂,现有的数值算法大多在已有的常阶分数阶微积分方程算法的基础上进行改进,其核心是在有限差分与有限元算法等算法的结合, 以得到一些精度较高且较为稳定的数值算法. Sun 等[9] 在松弛方程的基础上对不同常阶与变阶分数阶模型表征系统记忆特性进行比较研究,结果表明整数阶导数可用来表征系统的短记忆性,而常阶分数阶导数在表征系统的长记忆性方面具有优势. 此外,变阶分数阶导数可以用来描述系统的变记忆. 同时, Caputo 和 Riemann-Liouville 分数阶算子定义在表征系统的记忆特性方面有较大的差异,它们在自然科学和工程应用中应该有各自的应用领域. 针对反常扩散问题,变分数阶导数扩散模型建模是非常重要且有效的手段之一,被广泛应用于生物、物理等领域,但目前对于该模型的研究年限较短,对于一些算法的研究仍不够成熟,在给定的条件下,该类方程存在解析解.

对于变阶分数阶微分方程的解析解研究仍处于起步阶段,目前国内外学者大多致力于数值逼近算法的研究. 常用的数值算法有: 有限差分方法, 样条插值、 谱方法等. Sun 等[30] 对现有的分数阶微分方程数值逼近方法进行了综述,并将方程大致分为 FDEs (fractional-order differential equations)、FPDEs (fractional-order partial differential equations)、FIDEs (fractional-order integral-differential equations)、时滞分数阶方程和变阶分数阶方程来进行详述. Bhrawy 等[31] 引入 Jacobi 多项式用于求解变分数阶电缆方程. Moghaddam 等[32] 在有限差分近似的基础上提出了一种具有精确鲁棒性的算法逼近任意阶的变分数阶导数, 该算法不需要对微分算子进行高阶近似, 但是网格步长的划分较难确定. Moghaddam 等[33] 提出了一种求解流体力学中变阶分数阶微分模型的逼近算法,以变阶分数阶 Bagley-Torvik 方程和 Basset 方程为研究对象,采用分段积分二次样条插值进行求解. 随后, Solís-Pérez 等[12] 提出了一种新的广义数值格式来模拟幂律、指数和 Mittag-leffler 核的变阶分数阶算子,用于求解变阶非线性分数阶微分方程. Keshi 等[34] 在分段积分二次样条插值的基础上,提出了一种新的离散化方法来估计变阶分数积分算子,并将所提出的方法改进为求解一类变阶分数阶泛函积分方程. Abdelkawy 等[35] 提出了一种求解变阶分数阶泛函微分方程的新方法,并通过求解不同类型的变分数阶泛函微分方程来验证该算法的优越性.

无论对于常阶分数阶微分方程还是变阶分数阶微分方程,多项式逼近一直都是一种最常用的算法,其核心思想是在一系列简单函数的基础上,通过数值逼近,将这些函数表示为其本身及乘积的线性组合, 以此来逼近一些复杂系统. 但是, 由于多项式矩阵在实际运算中占用大量的计算空间,使得在实际应用中需要进行大量的运算,增大了计算难度,也会减少求解精度. 所以针对不同的方程,在运用多项式进行逼近时需要选取一些合适的多项式进行数值逼近,同时利用多项式的正交性与谱方法相结合(如 Galerkin 方法、配置法和 Tau 方法等),近似代替不同的分数阶微分算子,将复杂的变分数阶微分方程转化为代数方程组的问题进行求解,减少求解复杂性,提高求解精度. 常见的经典正交多项式有: Jacobi 多项式、Hermite 多项式、Legendre 多项式、Laguerre 多项式和 Chebyshev 多项式等.

经典正交多项式对于变阶分数阶微分方程进行离散逼近时,会影响数值解的精度. 为解决这一问题, Bhrawy 等[36] 推导出移位 Jacobi 多项式的 Caputo 及 R-L 型导数运算矩阵,用于求解多维时空变阶分数阶 Schrodinger 方程. El-Sayed 等[37] 构造了一种移位的 Legendre 多项式运算矩阵,用于求解一类多项变阶分数阶微分方程的数值解. 研究发现, Fibonacci 多项式比经典 Legendre 多项式的运行时间短, 运算矩阵误差小. 因此, Heydari 等[38] 以第 1 类 Chebyshev 多项式作为配置点,提出了基于 Fibonacci 多项式的配

置法求解变阶时空分数阶Burgers-Huxley方程,并利用二维Fibonacci展开截断级数进行误差分析. 前4类Chebyshev多项式用处较为广泛,可用于求解分数阶微分方程的数值解,而第5和第6类Chebyshev多项式的使用较为局限,只适用于求解分数阶常微分方程. Sadri等[39]构造出双变量下的第6类Chebyshev多项式作为基函数,用于求解下述变阶分数阶偏微分方程:

$$ {}_0^C D_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)+u_x(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t). \quad (7)$$

初边值条件为

$$\begin{aligned} &u(x,0)=h(x),\ 0<x<1;\\ &u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0<t\leqslant 1. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: ${}_0^C D_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)$ 为Caputo定义下的 $\alpha(x,t)$ 阶算子, $0<\alpha(x,t)<1$.

Heydari等[40]利用Heydari-Hosseininia意义下的非奇异变阶分数阶导数,构建了一种基于移位Vieta-Lucas多项式的数值格式,用于求解耦合变分数阶非线性Ginzburg-Landau方程,并证明了该数值格式的收敛性及截断误差.

小波理论是数学研究中的一门较新的学科,已成功地应用于物理和工程学科的广泛领域. 小波分析将函数表示为各个基函数和的形式,而这些基函数是由小波函数通过伸缩和平移后得到的,其中在信号分析、图像处理、偏微分方程求解、积分-微分方程求解、统计等方面发挥着重要的作用[41]. Wang等[42]提出了求解一类非线性变阶分数阶微分方程的Euler小波方法,并给出了Euler小波及其运算矩阵和分段函数的性质,将该问题转化为简单的非线性代数方程进行求解. Hosseininia等[43]利用变阶分数阶导数的概念引入非线性变阶时间分数阶二维Klein-Gordon方程,并利用二维Legendre小波运算矩阵对该方程进行求解. Heydari等[44]利用Chebyshev小波逼近一类具有变阶分数阶布朗运动特性的非线性随机微分方程,并建立了一种构造变阶分数阶布朗运动的方法. Hassani等[45]在经典Bernstein多项式的基础上推导出了一种超越Bernstein级数,用于求解变阶分数阶电报方程的数值解.

3 变阶分数阶微积分方程模型

下面根据变阶分数阶算子的性质,给出几类较为特殊的变阶分数阶微分方程模型的数值算法.

3.1 变阶时间分数阶对流-扩散方程

变阶时间分数阶对流-扩散方程是非常重要的一类变阶分数阶偏微分方程,其形式为

$$\begin{aligned} &{}_0^C D_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)=\\ &f(x,t)\Delta u(x,t)-g(x,t)\nabla u(x,t)+h(x,t). \end{aligned} \quad (9)$$

对于整数阶的一维对流-扩散方程可以得出其解析解,对于二维的整数阶对流-扩散方程需要设置特定的边界条件来求得解析解. 而对于变阶分数阶对流-扩散方程的研究大多集中在数值解方面的研究. Du等[46]提出了一种求解任意域上分数阶扩散方程的重构核空间无网格方法,有效避免了用Mercer核构造形状函数处理任意域时的困难. Moghadam等[47]在Bernoulli小波矩阵的基础上,运用Bernoulli小波方法求解一类时空变分数阶对流-扩散方程,具有较高的求解精度. 随后, Hosseininia等[48]对二维反应-对流-扩散方程的数值解进行研究,其方程形式如下:

$$\begin{aligned} &{}_0^{\mathrm{HH}} D_t^{\alpha(x,y,t)}=\\ &v(u(x,y,t)u_x(x,y,t)+u(x,y,t)u_y(x,y,t))+\\ &\mu\Delta u(x,y,t)+f(u(x,y,t))+g(x,y,t). \end{aligned} \quad (10)$$

初值和边界条件分别为

$$\begin{aligned} &u(x,y,0)=h(x,y),\ x,y\in\Omega;\\ &u(x,y,t)=e(x,y,t),\ x,y\in\partial\Omega,t>0. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $0<\alpha(x,t)<1$, μ 为扩散系数, u,v 为非线性函数和给定的函数, ${}_0^{\mathrm{HH}} D_t^{\alpha(x,t)}u(x,y,t)$ 为Heydari-Hosseininia意义下的变分数阶导数. 在此基础上,提出一种移位Bernoulli正交多项式与径向基函数相融合的算法,并给出一种新的运算矩阵,将二维变分数阶问题转化为代数方程组进行求解. 结果表明,该方法还适用于多分数阶过程. Yi等[49]推导出了第2类Chebyshev小波的变阶分数阶导数的运算矩阵,用于求解一类变阶分数阶对流-扩散方程.

3.2 变分数阶反应-扩散方程

变分数阶反应-扩散方程是非常重要且应用广泛的一类变分数阶偏微分方程,主要用来描述生态学中的物种迁移变化,人或动物复杂组织的发育形成过程以及人体生理学中的化学反应. 在经典的扩散理论中,反应扩散方程通常用热传导方程或者线性抛物线方程来表示. 一般的变分数阶时间扩散方程表示如下:

$$ {}_0^C D_t^{\alpha(x,t)}-du_{xx}(x,t)=f(x,t), \quad (12)$$

$$ u(x,0)=\varphi_0(x),\ x\in\Omega. \quad (13)$$

当 $0<\alpha(t)<1$ 时,方程(12)为次扩散方程; 当 $1<\alpha(t)<2$ 时,方程(12)为超扩散方程,其初值为

$$u_t(x,t)|_{t=0}=\varphi_1(x),x\in\Omega.$$

Ahmadinia 等[50] 基于空间局部不连续 Galerkin 法和时间有限差分技术, 提出了一种完全离散的局部不连续 Galerkin 格式来求解包含子扩散和超扩散的变分数阶微分方程的数值解, 并证明了次扩散和超扩散时的收敛速度分别为 $O(h^{k+1}+\Delta t^{2-\alpha(t_n)})$ 和 $O(h^{k+1}+\Delta t)$. Dehestani 等[51] 以 Lucas 多小波函数和修正的伪运算矩阵为基础, 对 Caputo 意义下的次扩散的变分数阶反应-扩散方程进行求解, 并通过给出误差估计上界证明了该算法的有效性. Kumar 等[52] 在 Gegenbauer 小波的基础上, 利用变阶的 Gegenbauer 小波运算矩阵求解了时空分数阶非线性反应扩散方程和非线性伽利略不变平流扩散方程. Pandey 等[53] 基于第 5 类 Chebyshev 多项式的高效变阶 Chebyshev 配置法, 求解了一类含有 Mittag-leffler 核的非线性变阶分数阶反应-扩散方程.

3.3 变分数阶积分-微分方程

变分数阶积分-微分方程的一般形式如下:

$$D^{\alpha(t)}u(x)+\int_0^x u(t)\mathrm{d}t+b(x)u'(x)+c(x)u(x)=f(x). \tag{14}$$

随着变分数阶微分方程的数值解算法逐渐完善, 国内外学者致力于在现有算法的基础上进行改进, 从而求解一些较为复杂的变分数阶微积分方程. 对于 VO-FIDEs, 由于这类方程中含有分数阶积分算子项, 对于这一类方程在求解时需要对微分和积分算子进行不同的处理. Doha 等[54] 在 Legendre Gauss-Lobatto 求积的基础上, 提出了一种移位 Legendre Gauss-Lobatto 配置法, 用于求解具有初值条件或者非局部条件的变阶分数阶 Volterra 积分-微分方程. Babaei 等[55] 推导了第 6 类 Chebyshev 多项式的变阶分数阶导数运算矩阵, 并利用配置法将一类非线性变分数阶二次积分-微分方程简化为非线性代数方程组. 同年, Babaei 等[56] 通过迎风格式和分段线性插值方法对来逼近 Coimbra 型变阶分数阶导数以及含核的积分项, 并采用基于单指数变换和双指数变换的 Sinc 配置法分别对空间进行离散, 用于求解多维下的变阶分数阶积分-偏微分方程的数值解. Dehestani 等[57] 基于分数阶 Genocchi 函数的配点法给出了分数阶积分和微分的伪运算矩阵, 用于逼近变阶分数阶偏积分方程. Agarwal 等[58] 在移位 Vieta-Fibonacci 多项式的基础上, 构造新的变分数阶微积分运算矩阵, 并结合 Tau 方法得到 VO-FIDE 问题的数值解, 验证了该方法的适用性和准确性. Heydari[59] 提出了一种基于移位 Chebyshev 函数的非线性变阶分数阶二次积分方程的数值计算方程. Ray[60] 推导出了二维下的 Legendre 小波运算矩阵, 用于处理变分数阶微积分算子, 求解变阶分数阶微积分方程.

3.4 时滞变分数阶微分方程

时滞微分方程是一类特殊的具有时滞的微分方程, 即在某一时刻未知函数的导数是用前一时刻的数值进行表示, 其起源可以追溯到 19 世纪 20 年代[61].

对于时滞变分数阶微分方程, Yaghoobi 等[62] 提出了一种基于三次样条插值的具有鲁棒性的高效算法, 将其应用于求解一类非线性变阶时滞分数阶方程, 并验证了该方法的准确性和有效性. Maleki 等[63] 推导出了一种求解非线性变分数阶时滞方程的多步配置方法. Zúñiga-Aguilar 等[64] 提出了一种基于分数阶微积分基本定理和 Lagrange 多项式插值的变分数阶时滞微分方程数值解法. Sweilam 等[65] 提出了一种新的多时延变阶感知程序数学模型, 并通过预估-矫正法和五阶 Adams-Moulton 法对该模型进行数值研究. Sweilam 等[66] 采用非标准加权平均有限差分法对一维和二维具有比例延迟的变阶 Burgers 方程进行研究, 结果表明该方法是有效的. El-Sayed 等[67] 提出了一种新的移位 Jacobi 运算矩阵, 用于求解一类多项变分数阶时滞微分方程, 其表达式如下:

$$\sum_{j=1}^{n}a_jD_t^{\alpha_j(t)}u(t)+a_{n+1}u(t-\tau)=$$
$$F(t,u(t),D_t^{\alpha_1(t)},D_t^{\alpha_2(t)},\ldots,D_t^{\alpha_n(t)},u(t-\tau)). \tag{15}$$

初边值条件为

$$u(t)=g(t),\ t\in[-\tau,0],\ u(0)=u_0. \tag{16}$$

其中: $a_j\in R(j=1,2,\ldots,n+1), a_{n+1}\neq 0, 0<T$, $D_t^{\alpha_j(t)}u(t)(j=1,2,\ldots,n)$ 为 Caputo 定义下的变分数阶导数.

随后, Khodabandehlo 等[68] 将该算法推广到求解一类广义非线性变阶时滞微分方程, 结果证明该算法可用于求解非线性变阶时滞微分方程.

4 工程中的最优控制/变分数阶最优控制

在数学及工程科学领域, 分数阶控制理论相对较新, 变阶分数阶最优控制问题是经典常阶分数阶最优控制问题的推广[69]. 目前对于变阶分数阶最优控制问题数值算法的研究多为一维和二维下的控制问题.

一维变阶分数阶最优控制问题可表述为

$$\min J[u]=\int_0^1 F(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t. \tag{17}$$

对应的变阶分数阶系统为

$${}_0^CD_t^{\alpha(t)}x(t)=G(t,x(t),u(t)),\ n-1<\alpha(t)\leqslant n. \tag{18}$$

二维变阶分数阶最优控制问题可表述为下述形式:

$$\min J[u,v]=\int_0^1\int_0^1 F(x,t,u(x,t),v(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{19}$$

对应的变阶分数阶偏微分系统为

$$\begin{aligned}&{}_0^C D_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)=\\&G(x,t,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t),\\&u_{xx}(x,t),v(x,t)),\ 1<\alpha(x,t)\leqslant 2.\end{aligned} \tag{20}$$

针对上述一维变阶分数阶最优控制问题, Heydari等[70]提出了一种基于Legendre小波的计算方法,在Riemann-Liouville意义下的变阶分数阶微积分运算矩阵,将变阶分数阶动力系统转化为可求解的简单非线性代数方程组,结果表明,该方法对于求解变阶分数阶最优控制十分有效. 在此基础上, Heydari等[71]将上述方法应用于求解一类二维非线性变阶分数阶最优控制问题,结果表明该方法同样适用于二维变阶最优控制问题的求解. 随后, Heydari等[72]基于Taylor级数对二维变阶最优控制问题的求解也是有效的. Heydari等[73]在Lucas多项式的基础上设计了一种优化算法,用来求解VO分数阶对流-扩散方程. Hassani等[74]将基于一类新的广义移位的Legendre多项式作为基函数,对一类二阶非线性变阶分数阶最优问题进行了研究. Sweilam等[75]利用迭代最优控制方法和广义欧拉方法对一类具有时滞的变阶分数阶微分模型的最优控制问题进行求解,并对两种算法的结果进行比较. 对于变阶分数阶微积分的研究还体现在工程领域的多个方面,这里将不再进行更为详细的介绍.

5 结 语

本文对近几年的有关变阶分数阶微积分方程的数值解进行了综述,以由Riemann-Liouville、Caputo、Grünwald-Letnikov、Atangana-Baleanu-Caputo、Caputo-Fabrizio、Heydari-Hosseininia意义下的变分数阶微分算子所构建的变阶分数阶微分方程、变阶时间分数阶对流-扩散方程、变阶分数阶反应-扩散方程、变阶分数阶积分-微分方程、时滞变分数阶微分方程、变分数阶泛函微分方程以及变分数阶最优控制作为主要研究对象. 研究发现,目前对于变阶分数阶相关问题的数值算法研究主要集中于多项式逼近及小波分析算法上,都是借助一些常用的多项式,如Jacobi、Legendre、Fibonacci、Lucas等. 在此基础上,通过推导出不同的运算矩阵来处理方程中的变阶分数阶算子项,进而简化方程的运算,得出方程的数值解.

变阶分数阶算子具有较好的变记忆性,能够用更少的模型更加准确地描述较为广泛的复杂动力学现象,尤其是对于描述非线性分数阶微分方程及混沌系统. 但是,由于变阶分数阶算子核的变指数性,使得变阶分数阶微分方程中包含分数阶幂项,从而大大增加了求解难度,尤其是对于解析解的研究,需要设置较多的限制条件,较难求得. 相比之下,变阶分数阶微分方程的数值算法层出不去,但是对于不同类型的方程,这些算法并非都通用. 因此,针对不同类型的变阶分数阶微分方程模型,如何在原有算法的基础上快速有效地得出方程的解是目前研究的热点及难点.

参考文献(References)

[1] 郭柏灵, 蒲学科, 黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-10.
(Guo B L, Pu X K, Huang F H. Fractional partial differential equations and their numerical solutions[M]. Beijing: Science Press, 2011: 1-10.)

[2] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999: 199-242.

[3] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations[M]. Berlin: Springer, 2010: 75-132.

[4] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. Journal of Rheology, 2000, 27(3): 201.

[5] Su X L, Xu W X, Chen W, et al. Fractional creep and relaxation models of viscoelastic materials via a non-Newtonian time-varying viscosity: Physical interpretation[J]. Mechanics of Materials, 2020, 140: 103222.

[6] Aguilar J F, Alvarado J B, Garcia J L, et al. Modeling and simulation of equivalent circuits in description of biological systems — A fractional calculus approach[J]. Journal of Electr Bioimpedance, 2019, 3(1): 2-11.

[7] Coelho R M, Neto J P, Valério D, et al. Dynamic biochemical and cellular models of bone physiology: integrating remodeling processes, tumor growth, and therapy[M]. Switzerland: The Computational Mechanics of Bone Tissue, 2020: 95-128.

[8] Jiménez F, Ober-Blöbaum S. Fractional damping through restricted calculus of variations[J]. Journal of Nonlinear Science, 2021, 31(2): 1-43.

[9] Sun H G, Chen W, Wei H, et al. A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2011, 193(1): 185-192.

[10] Samko S G, Ross B. Integration and differentiation to a variable fractional order[J]. Integral Transforms and Special Functions, 1993, 1(4): 277-300.

[11] Li X Y, Wu B Y. A new reproducing kernel method for variable order fractional boundary value problems for functional differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 311: 387-393.

[12] Solís-Pérez J E, Gómez-Aguilar J F, Atangana A. Novel numerical method for solving variable-order fractional differential equations with power, exponential and Mittag-Leffler laws[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 114: 175-185.

[13] Wang G T, Pei K, Agarwal R P, et al. Nonlocal Hadamard fractional boundary value problem with Hadamard integral and discrete boundary conditions on a half-line[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 343: 230-239.

[14] Yousefi F S, Ordokhani Y, Yousefi S. Numerical solution of variable order fractional differential equations by using shifted Legendre cardinal functions and Ritz method[J]. Engineering with Computers, 2020: 1-8.

[15] Valério D, Sá da Costa J. Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations[J]. Signal Processing, 2011, 91(3): 470-483.

[16] Caputo M, Fabrizio M. A new denition of fractional derivative without singular kernel[J]. Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2015, 2: 73-85.

[17] Atangana A, Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model[J]. Thermal Science, 2016, 20(2): 763-769.

[18] Heydari M H, Hosseininia M. A new variable-order fractional derivative with non-singular Mittag-Leffler kernel: Application to variable-order fractional version of the 2D Richard equation[J]. Engineering with Computers, 2020: 1-12.

[19] Daftardar-Gejji V, Babakhani A. Analysis of a system of fractional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 293(2): 511-522.

[20] Razminia A, Dizaji A F, Majd V J. Solution existence for non-autonomous variable-order fractional differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 55(3/4): 1106-1117.

[21] An J H, Chen P Y. Uniqueness of solutions to initial value problem of fractional differential equations of variable-order [J]. Dynamic Systems and Applications, 2019, 28(3): 607-623.

[22] Zhang S Q, Su X W. Unique existence of solution to initial value problem for fractional differential equation involving with fractional derivative of variable order[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 148: 111040.

[23] Moualkia S, Xu Y. On the existence and uniqueness of solutions for multidimensional fractional stochastic differential equations with variable order[J]. Mathematics, 2021, 9(17): 2106.

[24] Hilfer E. Applications of fractional calculus in physics[M]. New York: World Scientic Publishing Company, 2000: 1-20.

[25] He J H. Variational iteration method - a kind of non-linear analytical technique: Some examples[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(4): 699-708.

[26] Doha E H, Bhrawy A H, Ezz-Eldien S S. A new Jacobi operational matrix: An application for solving fractional differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(10): 4931-4943.

[27] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial[J]. Mathematics, 2018, 6(2): 16.

[28] Bazm S, Hosseini A. The alternative Legendre tau method for solving nonlinear multi-order fractional differential equations[J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2020, 10(2): 442-456.

[29] Lorenzo C F, Hartley T T. Variable order and distributed order fractional operators[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/2/3/4): 57-98.

[30] Sun H G, Zhang Y, Baleanu D, et al. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 64: 213-231.

[31] Bhrawy A H, Zaky M A. Numerical simulation for two-dimensional variable-order fractional nonlinear cable equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(1/2): 101-116.

[32] Moghaddam B P, Machado J A T. Extended algorithms for approximating variable order fractional derivatives with applications[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 71(3): 1351-1374.

[33] Moghaddam B P, Machado J A T, Behforooz H. An integro quadratic spline approach for a class of variable-order fractional initial value problems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 102: 354-360.

[34] Keshi F K, Moghaddam B P, Aghili A. A numerical approach for solving a class of variable-order fractional functional integral equations[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(4): 4821-4834.

[35] Abdelkawy M A, Lopes A M, Babatin M M. Shifted fractional Jacobi collocation method for solving fractional functional differential equations of variable order[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 134: 109721.

[36] Bhrawy A H, Zaky M A. An improved collocation method for multi-dimensional space-time variable-order fractional Schrödinger equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 111: 197-218.

[37] El-Sayed A A, Agarwal P. Numerical solution of multiterm variable-order fractional differential equations via shifted Legendre polynomials[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(11): 3978-3991.

[38] Heydari M H, Avazzadeh Z. Fibonacci polynomials for the numerical solution of variable-order space-time fractional Burgers-Huxley equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(8): 6774-6786.

[39] Sadri K, Aminikhah H. An efficient numerical method for solving a class of variable-order fractional mobile-immobile advection-dispersion equations and its convergence analysis[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 146: 110896.

[40] Heydari M H, Avazzadeh Z, Razzaghi M. Vieta-Lucas polynomials for the coupled nonlinear variable-order fractional Ginzburg-Landau equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2021, 165: 442-458.

[41] 程正兴, 杨守志, 冯晓霞. 小波分析的理论算法进展和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 330-399.
(Cheng Z X, Yang S Z, Feng X X. Progress and application of theoretical algorithms of wavelet analysis [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007: 330-399.)

[42] Wang Y X, Zhu L, Wang Z, et al. Solving the nonlinear variable order fractional differential equations by using Euler wavelets[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2019, 118(2): 339-350.

[43] Hosseininia M, Heydari M H, Maalek Ghaini F M, et al. A wavelet method to solve nonlinear variable-order time fractional 2D Klein-Gordon equation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 78(12): 3713-3730.

[44] Heydari M H, Avazzadeh Z, Mahmoudi M R. Chebyshev cardinal wavelets for nonlinear stochastic differential equations driven with variable-order fractional Brownian motion[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 124: 105-124.

[45] Hassani H, Avazzadeh Z, Machado J A T. Numerical approach for solving variable-order space−time fractional telegraph equation using transcendental Bernstein series[J]. Engineering with Computers, 2020, 36(3): 867-878.

[46] Du H, Chen Z, Yang T J. A meshless method in reproducing kernel space for solving variable-order time fractional advection-diffusion equations on arbitrary domain[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 116: 107014.

[47] Moghadam A S, Arabameri M, Baleanu D, et al. Numerical solution of variable fractional order advection-dispersion equation using Bernoulli wavelet method and new operational matrix of fractional order derivative[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(7): 3936-3953.

[48] Hosseininia M, Heydari M H, Avazzadeh Z, et al. A hybrid method based on the orthogonal Bernoulli polynomials and radial basis functions for variable order fractional reaction-advection-diffusion equation[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2021, 127: 18-28.

[49] Yi M X, Ma Y P, Wang L F. An efficient method based on the second kind Chebyshev wavelets for solving variable-order fractional convection diffusion equations[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2018, 95(10): 1973-1991.

[50] Ahmadinia M, Safari Z, Abbasi M. Local discontinuous Galerkin method for time variable order fractional differential equations with sub-diffusion and super-diffusion[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 157: 602-618.

[51] Dehestani H, Ordokhani Y, Razzaghi M. A novel direct method based on the Lucas multiwavelet functions for variable-order fractional reaction-diffusion and subdiffusion equations[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2021, 28(2): e2346.

[52] Kumar S, Pandey P, Das S. Gegenbauer wavelet operational matrix method for solving variable-order non-linear reaction-diffusion and Galilei invariant advection-diffusion equations[J]. Computational and Applied Mathematics, 2019, 38(4): 1-22.

[53] Pandey P, Gómez-Aguilar J F. On solution of a class of nonlinear variable order fractional reaction-diffusion equation with Mittag-Leffler kernel[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37(2): 998-1011.

[54] Doha E H, Abdelkawy M A, Amin A Z M, et al. Spectral technique for solving variable-order fractional Volterra integro-differential equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2018, 34(5): 1659-1677.

[55] Babaei A, Jafari H, Banihashemi S. Numerical solution of variable order fractional nonlinear quadratic integro-differential equations based on the sixth-kind Chebyshev collocation method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 377: 112908.

[56] Babaei A, Moghaddam B P, Banihashemi S, et al. Numerical solution of variable-order fractional integro-partial differential equations via Sinc collocation method based on single and double exponential transformations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 82: 104985.

[57] Dehestani H, Ordokhani Y, Razzaghi M. Pseudo-operational matrix method for the solution of variable-order fractional partial integro-differential equations[J]. Engineering with Computers, 2021, 37(3): 1791-1806.

[58] Agarwal P, El-Sayed A A, Tariboon J. Vieta-Fibonacci operational matrices for spectral solutions of variable-order fractional integro-differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 382: 113063.

[59] Heydari M H. A computational method for a class of systems of nonlinear variable-order fractional quadratic integral equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 153: 164-178.

[60] Ray S S. A new approach by two-dimensional wavelets operational matrix method for solving variable-order fractional partial integro-differential equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37(1): 341-359.

[61] Hale J, Verduyn Lunel S. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[62] Yaghoobi S, Moghaddam B P, Ivaz K. An efficient cubic spline approximation for variable-order fractional differential equations with time delay[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2): 815-826.

[63] Maleki M, Davari A. Fractional retarded differential equations and their numerical solution via a multistep collocation method[J]. Applied Numerical Mathematics, 2019, 143: 203-222.

[64] Zúñiga-Aguilar C J, Gómez-Aguilar J F, Escobar-Jiménez R F, et al. A novel method to solve variable-order fractional delay differential equations based in Lagrange interpolations[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 126: 266-282.

[65] Sweilam N, AL-Mekhlafi S, Shatta S, et al. Numerical study for a novel variable-order multiple time delay awareness programs mathematical model[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 158: 212-235.

[66] Sweilam N, Al-Mekhlafi S, Shatta S, et al. Numerical study for two types variable-order Burgers' equations with proportional delay[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 156: 364-376.

[67] El-Sayed A A, Baleanu D, Agarwal P. A novel Jacobi operational matrix for numerical solution of multi-term variable-order fractional differential equations[J]. Journal of Taibah University for Science, 2020, 14(1): 963-974.

[68] Khodabandehlo H R, Shivanian E, Abbasbandy S. Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional variable-order using a novel shifted Jacobi operational matrix[J]. Engineering with Computers, 2021: 1-15.

[69] Heydari M H. A new direct method based on the Chebyshev cardinal functions for variable-order fractional optimal control problems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(12): 4970-4995.

[70] Heydari M H, Avazzadeh Z. A new wavelet method for variable-order fractional optimal control problems[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(5): 1804-1817.

[71] Heydari M H, Avazzadeh Z. A computational method for solving two-dimensional nonlinear variable-order fractional optimal control problems[J]. Asian Journal of Control, 2020, 22(3): 1112-1126.

[72] Heydari M H, Avazzadeh Z, Cattani C. Taylor's series expansion method for nonlinear variable-order fractional 2D optimal control problems[J]. Alexandria Engineering Journal, 2020, 59(6): 4737-4743.

[73] Heydari M, Atangana A. An optimization method based on the generalized Lucas polynomials for variable-order space-time fractional mobile-immobile advection-dispersion equation involving derivatives with non-singular kernels[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 132: 109588.

[74] Hassani H, Avazzadeh Z. Novel operational matrices for solving 2-dim nonlinear variable order fractional optimal control problems via a new set of basis functions[J]. Applied Numerical Mathematics, 2021, 166: 26-39.

[75] Sweilam N H, AL-Mekhlafi S M. Optimal control for a time delay multi-strain tuberculosis fractional model: A numerical approach[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2017, 36(1): 317-340.

作者简介

孙宝 (1981−), 男, 副教授, 博士, 从事最优化理论及其工程应用等研究, E-mail: bao810321@163.com;

张文超 (1996−), 女, 硕士生, 从事分数阶微分方程数值算法的研究, E-mail: 1299231497@qq.com;

李占龙 (1985−), 男, 副教授, 博士, 从事工程机械振动与噪声控制等研究, E-mail: lizl@tyust.edu.cn;

范凯 (1990−), 男, 讲师, 博士, 从事机械构件中的应力、应变孤波的传播机理及求解理论的研究, E-mail: 2014279@tyust.edu.com.

(责任编辑:孙艺红)