

# 控制与决策

Control and Decision

## 消息传递方法及其在信息融合中的应用

郭振, 王增福, 白向龙, 兰华, 潘泉

引用本文:

郭振, 王增福, 白向龙, 兰华, 潘泉. 消息传递方法及其在信息融合中的应用[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2443–2455.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0367>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 智能优化在软件测试中的应用综述

Review on the application of intelligent optimization in software testing

*控制与决策*. 2022, 37(2): 257–266 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1361>

#### 两种网络约束下NNSs分布式有限时域FIR融合估计器

Decentralized receding horizon FIR fusion estimator for state estimation of NNSs with two network constraints

*控制与决策*. 2022, 37(8): 2091–2100 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1695>

#### 基于多块信息提取的AUV资源勘查系统故障检测

Fault detection of AUV resource exploration system based on multi-block information extraction

*控制与决策*. 2021, 36(4): 790–800 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0732>

#### 一种基于多层语义特征的图像理解方法

An image understanding method based on multi-level semantic features

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2881–2890 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0927>

#### 尺度自适应的多特征融合相关滤波目标跟踪算法

Scale adaptation and multi-feature fusion correlation filtering object tracking algorithm

*控制与决策*. 2021, 36(2): 429–435 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0445>

# 消息传递方法及其在信息融合中的应用

郭 振, 王增福<sup>†</sup>, 白向龙, 兰 华, 潘 泉

(1. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710129;  
2. 西北工业大学 信息融合技术教育部重点实验室, 西安 710129)

**摘 要:** 作为针对复杂问题的确定性推断方法, 近年来消息传递方法及其在信息融合领域中的应用备受关注. 消息传递为大规模问题提供了基于贝叶斯的、统一的、可扩展的、效率高的推断框架, 消息传递方法在概率图模型的节点之间传递消息. 首先, 对概率图模型进行简要介绍, 总结消息传递基础理论方法和近似拓展方法的基本原理、特点以及研究进展; 然后, 针对信息融合领域中的 3 类重难点问题: 状态估计与平滑、目标跟踪和多源异构数据融合, 分别综述消息传递在信息融合中的最新研究进展, 并总结不同消息传递方法的适用场景; 最后, 讨论消息传递方法在信息融合领域未来可能的研究方向.

**关键词:** 消息传递; 信度传播; 信息融合; 统计推断; 目标跟踪; 状态估计

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0367

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 郭振, 王增福, 白向龙, 等. 消息传递方法及其在信息融合中的应用[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2443-2455.

## Message passing methods and their applications in information fusion

GUO Zhen, WANG Zeng-fu<sup>†</sup>, BAI Xiang-long, LAN Hua, PAN Quan

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China; 2. Key Laboratory of Information Fusion Technology of Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** As a deterministic inference method for complicated problems, message passing methods and their applications in information fusion have drawn much attention in recent years. Message passing methods provide a Bayes-based, unified, scalable and efficient inference framework for large scale problems. Message passing methods pass messages between nodes of probabilistic graphical models. At first, probabilistic graphical models are briefly introduced. Then, the basic principles and a brief review of common message passing methods are given. Then, the recent applications of message passing methods in information fusion are presented from three aspects: state estimation and smoothing, target tracking and multisource heterogeneous data fusion. Meanwhile, the appropriate scenarios of different message passing methods are summarized. Finally, the possible directions of future research of message passing methods in information fusion are discussed.

**Keywords:** message passing; belief propagation; information fusion; statistical inference; target tracking; state estimation

## 0 引 言

信息融合技术作为一门现代信息技术与多学科交叉、综合、延拓产生的系统科学研究方向, 在计算机视觉、生物统计学、无线传感器网络和多源多目标跟踪等诸多领域中得到广泛应用. 学者们在 3 篇综述文献<sup>[1-3]</sup>中对信息融合在不同时期的发展情况分别进行了综述, 主要包括: 2003 年, 整理归纳了信息融合在军事和民用领域的应用研究<sup>[1]</sup>; 2012 年, 梳理总结了信息融合所面临的问题与挑战、相应的理论进展

和可能的研究方向<sup>[2]</sup>; 2019 年, 综述了基于变分贝叶斯(variational Bayes, VB)理论的联合优化方法在信息融合领域的研究进展<sup>[3]</sup>.

如文献[3]所述, 信息融合仍面临着非线性、多模式、网络化和高维数等多种问题. 随着系统的日益复杂化以及对信息品质要求的提高, 联合优化方法同时考虑多种因素, 实现复杂系统的参数辨识、状态估计与融合一体化处理, 在信息融合技术中越来越多地被采用. 这种一体化处理面临多元高维变量的估计、推

收稿日期: 2021-03-03; 录用日期: 2021-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61873211, 61790552); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2021JM-067).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: wangzengfu@nwpu.edu.cn.

断和决策等问题,随着问题规模的增加,尺度灵活、行之有效且可计算性强的近似算法设计越来越受到学者们的重视。

在信息融合领域的一体化处理方面,文献[3]给出了VB近似方法及其在信息融合领域中的应用。VB是一种采用简单分布近似隐变量真实后验分布的推断方法。假设隐变量的全贝叶斯模型中所有参数的先验分布已知,变分的目的是寻找隐变量后验概率分布的一个变分分布,使其与真实后验概率密度分布之间的KL散度(kullback-leibler divergence)最小<sup>[3]</sup>。VB提供了一体化处理的统一框架,适用于处理高维大尺度问题。除VB外,近年来结合概率图模型(probabilistic graphical models, PGM)的消息传递方法(message passing, MP)在信息融合领域越来越受关注。虽然MP与VB原理不同,但相互之间存在一定联系。MP借助PGM在图中相邻节点之间传递消息,实现单个随机变量的边缘分布推断或联合分布的最大后验估计。VB在求解替代分布过程中可以利用消息传递方法,如平均场近似(mean-field, MF)。MP也可与变分推断相结合,如应用于贝叶斯网络的变分消息传递<sup>[4]</sup>,拓展了MP方法理论及其适用性。与VB一样,MP也提供了非线性、多模式、网络化和高维数等问题下统一有效的问题求解框架。基于VB的联合优化方法可参见文献[3]。

近年来,MP以其可计算性强、易于实现、分布式等优点在信息融合领域受到广泛关注。例如,信息融合中一个核心问题是根据观测数据计算隐变量的后验概率分布,实际中很难获得后验概率分布的闭环解析解,特别是当隐变量为高维或具有非线性等复杂形式时。一类近似解决方法为以马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, MCMC)为代表的随机性近似方法,但有时很难对需要的概率分布进行独立采样,同时面对大规模问题时所需采样数可能会急剧上升。与MCMC等随机性近似方法相比,MP属于确定性近似推断方法。MP在PGM基础上采用“分解”“分而治之,各个击破”等思想<sup>[5]</sup>,将复杂混合系统高维推断问题转换为一个优化问题,通过求解优化问题的稳定点等方法构造消息迭代方程,为复杂混合系统高维推断问题提供了一个统一的算法框架,更适合解决大规模问题。同时,MP是多源异构大数据融合问题计算上可行的方法,即随着信息源、量测和目标个数的增加,其计算复杂度不呈指数性增长,能够避免随着维数的增加而带来的计算爆炸问题<sup>[6]</sup>。目前,MP理论方法及其在信息融合领域中的应用是热点问题且相

关研究非常丰富,但还缺乏对MP及其在信息融合应用中的系统性介绍。

本文梳理总结了MP算法及其在信息融合中的应用情况。PGM是MP的基础,首先介绍PGM的基本概念、种类、数学表达式以及其中的典型问题。按照MP算法的发展分为基础方法、近似方法和拓展方法3类。基础方法主要包括信度传播(belief propagation, BP)、环信度传播(loopy BP, LBP)和高斯信度传播(gaussian BP, GaBP);近似方法主要包括变分消息传递(variational MP, VMP)、期望传播(expectation propagation, EP)、非参信度传播(nonparametric BP, NBP)、粒子信度传播(particle BP, PBP);拓展方法为广义信度传播(generalized BP, GBP)。从状态估计与平滑、目标跟踪和多源异构数据融合3个重点领域,综述MP在信息融合中的研究现状,最后总结与讨论,并给出未来可能的研究方向。

## 1 消息传递方法研究进展

MP是一类非常实用有效的方法,在统计物理、人工智能、信号处理和数字通信等领域广泛应用。学者们发现,很多针对不同领域的模型提出的经典算法均可以归纳在MP框架中<sup>[7]</sup>。如应用于隐马尔科夫模型的Viterbi算法、应用于贝叶斯网络的Pearl信度传播算法以及应用于信号处理的卡尔曼滤波算法等。目前,MP仍在不断地丰富和发展。

由于MP的理论发展与其在信息融合中的应用几乎是独立的,综述MP在信息融合技术中的应用之前,简要介绍PGM和各类MP方法的基本原理及特点。

### 1.1 概率图模型(PGM)

PGM是图论与概率论的结合,大量高维复杂随机系统可以通过带有局部交互函数的PGM建模,即利用因子分解方式和条件独立性假设紧凑表示多个变量的联合分布。PGM为大规模多变量统计模型提供了一个通用且便利的工具,可表示为 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ,由节点(或顶点)集合 $\mathcal{V}$ 和连接节点的边(也称为弧)集合 $\mathcal{E}$ 组成。在PGM中,每个节点代表1个或1组随机变量,边表示其连接的变量之间的函数关系。PGM提供了一种简单有效的概率模型可视化结构,可以直观地观察模型属性且方便新模型的设计<sup>[8]</sup>。

目前常见的PGM有马尔科夫随机场(Markov random field, MRF)、贝叶斯网络(Bayesian network, BN)和因子图(factor graph, FG),其示意图如图1所示。图1中,变量 $x_1, x_2, x_3$ 可以是连续随机变量也可以是离散随机变量,这些图模型均可表示随机变量的

联合分布. MRF 和 BN 又分别称为无向图和有向图, 图 1(a)和图 1(b)中的圆和线段分别代表节点和边. 其中: MRF 表示随机变量之间存在软约束; BN 中边的方向利用箭头标识, 表示随机变量之间存在因果关系. 在求解 PGM 上的推断问题时, 一般将 MRF 和 BN 转换为 FG<sup>[8]</sup>. 在 FG 模型中, 节点分为变量节点和因子节点, 图 1(c)中, 圆代表的变量节点为随机变量, 方框代表的因子节点为局部函数, 连接变量节点和因子节点的边表示该因子为该变量的函数. FG 还有一种常见的变种——FFG (forney-style FG)<sup>[9]</sup>. 如图 1(d)所示, FFG 不引入变量节点, 而是利用边和半边表示随机变量. 上述图模型之间可以互相转换<sup>[10]</sup>, PGM 还有包括团图 (cluster graph)<sup>[11]</sup> 和连接树 (junction tree) 等基于区域的表示方法, 图模型的选择取决于具体问题的特点.

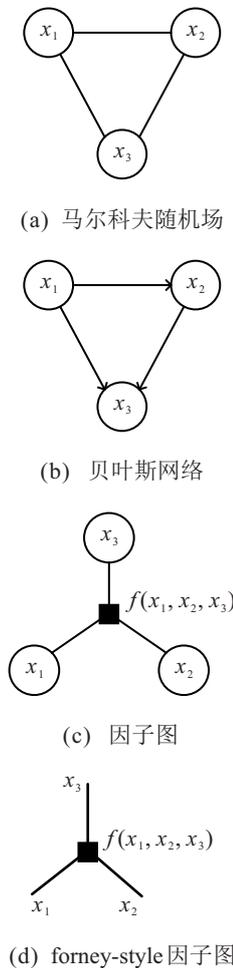


图 1 常见的概率图模型

### 1.2 消息传递基础方法

BP 是最早出现的 MP 算法, 也称作和积算法 (sum-product algorithm, SPA), 由 Pearl<sup>[12]</sup> 于 1982 年提出. BP 可以计算每个隐变量节点的边缘分布, 其在无环图上和少量有环图上能够得到准确解<sup>[13]</sup>. 后来学者们提出了一系列 BP 在带环图上的近似算法, 统称

为 LBP, 并对其收敛性和正确性条件进行了理论上的分析. 当 PGM 对应的联合分布为高斯分布时, 对应的 BP 变种为 GaBP<sup>[14]</sup>. 相对于一般 LBP, GaBP 的消息形式相对简单且收敛性条件更容易得到. 下面分别论述 BP、LBP 和 GaBP 三种理论方法.

#### 1.2.1 信度传播 (BP)

SPA 是最经典、应用最广泛的 BP 算法, 由于其简单和迭代的性质, 在提出后受到了极大关注和发展. 其基本原理为: 根据图模型的结构将联合分布分解为只依赖部分变量的因子的乘积, 计算边缘概率时通过动态规划将联合分布的求和顺序由先乘积后求和转化为先求和后乘积 (即利用分配率), 只计算 1 次因子求和并保存中间结果, 从而简化计算. 最大积算法 (max-product algorithm, MPA) 与 SPA 相似, 不同的是, MPA 计算的是全局最大后验状态. 当 PGM 不存在环结构时, MP 的本质是动态规划的递归, 并收敛到问题的准确解.

下面简要介绍 SPA 基本原理. 以一个无环成对的 MRF<sup>[15]</sup> 为例给出串行 SPA 的简要描述. 假定  $n$  维实数空间内的连续随机向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其联合分布与无环成对的 MRF  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  相对应, 且可以根据 Hammersley-Clifford 定理<sup>[16]</sup>, 按照节点和边的团 (clique) 进行因式分解. 赋予每个节点  $i \in \mathcal{V}$  和每个边  $(i, j) \in \mathcal{E}$  的势函数分别为  $\varphi_i(x_i)$  和  $\psi_{ij}(x_i, x_j)$ , 则该向量的联合概率密度分布为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{i \in \mathcal{V}} \varphi_i(x_i) \prod_{(i,j) \in \mathcal{E}} \psi_{ij}(x_i, x_j), \quad (1)$$

其中  $Z$  为归一化常数.

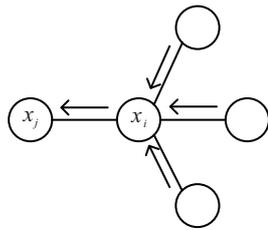
SPA 消息计算过程和边缘概率求解如图 2 所示. 图 2(a) 节点  $i$  向邻居节点  $j$  传递的消息计算为

$$m_{i \rightarrow j}(x_j) = \int_{x_i} \varphi_i(x_i) \psi_{ij}(x_i, x_j) \prod_{k \in N(i) \setminus j} m_{k \rightarrow i}(x_i) dx_i. \quad (2)$$

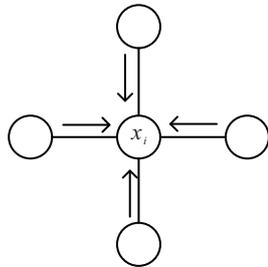
其中:  $N(i)$  为节点  $i$  所有邻居节点的集合; 消息  $m_{i \rightarrow j}(x_j)$  为节点  $i$  收集关于  $x_j$  的信息的充分统计量. 当所有节点都完成向其所有邻居节点传递消息后, 每个节点的边缘分布计算如图 2(b) 所示, 即收集了该节点所有邻居节点关于该节点的信息, 有

$$p_i(x_i) \propto \varphi_i(x_i) \prod_{k \in N(i)} m_{k \rightarrow i}(x_i). \quad (3)$$

为使所有节点都向其所有邻居节点传递消息, 串行 SPA 通过算法 1 和图 3 中描述的两次传递过程实现. MP 的流程不唯一, 除串行方式外, 还可以采用并行迭代等方式.



(a) 节点*i*向节点*j*传递的消息



(b) 节点*i*边缘分布计算

图2 BP消息传递及边缘概率计算

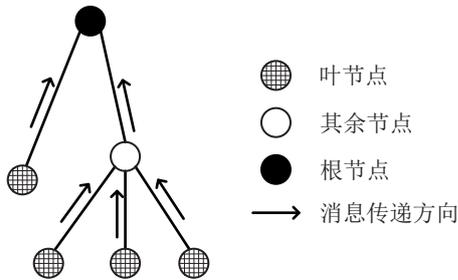
**算法1** 串行和积算法(SPA).

step 1: 初始化. 选择任意节点作为根节点, 设置所有消息为1: 即对于任意的边  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 消息初始化为  $m_{i \rightarrow j}(x_j) = 1, m_{j \rightarrow i}(x_i) = 1$ .

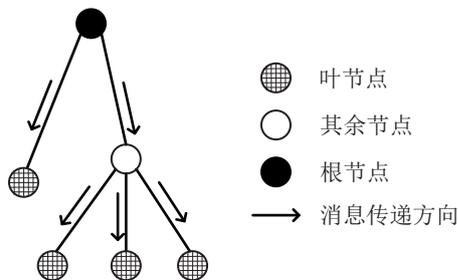
step 2: 第1次传递. 如图3(a)所示, 产生从所有叶节点到根节点方向传递的消息.

step 3: 第2次传递. 如图3(b)所示, 产生从根节点起始到所有叶节点方向传递的消息.

step 4: 计算每个节点的边缘分布.



(a) 第1次传递



(b) 第2次传递

图3 串行SPA消息传递示意图

BP的优点是可以与硬约束兼容, 缺点是在系统包含连续随机变量时有很高的复杂性, BP无法精确

计算节点之间传递的消息. BP假定消息为有限参数化, 即消息更新可以通过式(2)积分的解析得到. 但对于连续随机变量, 式(2)积分的解析解通常在联合分布为高斯时才能计算得到, 即后文1.2.3节中的GaBP, 在其余多数情况下, 需要采用近似方法计算.

**1.2.2 环信度传播(LBP)及其收敛性和正确性**

在图中存在环的情况下无法找到根节点, 前文描述的MP流程不再适用. LBP采用迭代形式, 在每次迭代中更新每个消息. LBP采用与BP相同的消息更新准则, 因此在有些文献中, LBP也简称为BP.

LBP在理论上没有收敛性保证, 但研究表明<sup>[13]</sup>, LBP在很多情况下收敛, 且能够获得很好的近似解. 一些工作研究了某些特定图的情况, 如在图中仅存在单个环时, 文献[17]阐述了LBP的收敛条件. 一些工作提出了针对有环图的MP近似解法, Liu等<sup>[18]</sup>考虑了1组特定的“重要节点”, 即反馈节点集. 反馈节点集是节点集合的子集, 移除反馈节点集会移除原图所有的环, 在其设计的反馈MP算法中, 反馈节点集中的节点使用不同的MP方案. 若反馈节点集中的节点数量是有界的, 则使用反馈MP可以在线性时间内准确获得均值和方差. 针对有短环存在的图, Cantwell等<sup>[19]</sup>提出了一种精确算法, 该算法在长环存在的情况下可以得到近似解, 并实现计算量和精准度较好的折衷.

学者们对LBP在普通图上的收敛性和正确性的理论研究取得了一定的进展, 现有分析方法主要有: 1) 基于不动点理论分析算法的收敛性. Weiss等<sup>[20]</sup>在图论意义上证明了BP的不动点是局部最优解; Knoll等<sup>[21]</sup>提出数值多项式同伦连续方法计算BP所有的不动点; Yedidia等<sup>[22]</sup>证明了任意图上SPA的不动点为Bethe自由能近似的零梯度点. 2) 基于计算树方法分析迭代过程, 证明LBP获得的解的正确性. Tatikonda等<sup>[23]</sup>证明了在计算树表示的无限模型上, SPA的收敛性与Gibbs测度的唯一性有关. 3) 从最大化后验概率问题的线性规划松弛的角度出发, 分析BP在匹配、最大权重独立集、最小生成树、网络流、旅行商等问题上的正确性<sup>[24-25]</sup>, 共性结论为: 若线性规划松弛是紧的, 即不存在小数解, 则BP在多项式时间内能够收敛到准确解.

**1.2.3 高斯信度传播(GaBP)**

由于高斯分布良好的参数化形式, GaBP的消息在形式上比较简洁. 若图  $G = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$  对应的  $n$  维随机向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的联合分布为高斯的, 则称其为高斯PGM, 概率密度为

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{x} \right\}, \quad (4)$$

其中参数  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{h}$  分别为信息矩阵和势向量,  $\mathbf{J}$  为正定对称矩阵, 且若边  $\{i, j\} \notin \mathcal{E}$ , 则  $J_{ij} = 0$ . 采用式(1)中的分解形式, 对应的节点和边的势函数为

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i) &= -\frac{1}{2} J_{ii} x_i^2 + h_i x_i, \\ \psi_{ij}(x_i, x_j) &= -J_{ij} x_i x_j, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $J_{ii}$ 、 $J_{ij}$  和  $h_i$  分别为矩阵  $\mathbf{J}$  和向量  $\mathbf{h}$  中对应的元素. 高斯 PGM 中从节点  $i$  向节点  $j$  传递的消息  $m_{i \rightarrow j}(x_j)$  可写为对应的参数计算  $\{\Delta J_{i \rightarrow j}, \Delta h_{i \rightarrow j}\}$ , 具体计算参见文献[26].

在推断单个变量的边缘分布时, 与直接矩阵求逆方法相比, GaBP 具有分布式和并行处理的优点, 且计算复杂度低, 尤其是对于高维信息矩阵稀疏的情况. GaBP 收敛的充分条件包括主对角占优[27]和 walk-summability[26]等. Su 等[28]提出了同步 GaBP 和阻尼 GaBP 的充要条件, 研究了 GaBP 方差和均值的收敛条件, 不动点存在的充要条件, 并证明了变量节点到因子节点输出消息的精度(方差的倒数)的收敛性. Li 等[29]考虑了高阶因式分解 PGM 上 GaBP 的收敛性, 鉴于 GaBP 的突出优点, 其在大规模问题中得到应用, 包括传感器网络、Turbo 解码、线性方程组求解[30]、目标跟踪[31]等.

### 1.3 消息传递近似和拓展方法

上文给出了 BP 最基础的消息传递形式, 适用于离散变量且变量空间有限或连续变量且为高斯分布的情况. BP 不适用于除高斯分布外的连续随机变量的推断问题. 对于高维离散变量、连续变量以及两者混合的情况, 利用近似方法求解, 这些方法可以大致分为两类: 包括 VMP 和 EP 等的确定性近似方法; 基于采样的 BP 方法 (sample-based BP, SBP), 包括 NBP、PBP 等.

Winn 等[4]将变分推断应用于贝叶斯网络, 提出了 VMP. 与 VMP 类似, EP 也通过寻找替代函数近似目标函数[32], 但两者逼近程度的度量形式不同. NBP 通过混合高斯近似表示消息[33], PBP 则使用重要性采样近似表示消息[34]. 不同于一般 MP 方法在节点之间传递消息, Yedidia 等[22]提出了在图的区域之间传递消息的 GBP. 下面论述上述近似和拓展方法的基本原理与研究现状.

#### 1.3.1 变分消息传递(VMP)

VMP 起源于变分推断在贝叶斯网络中的应用[4]. VB 采用一个替代分布近似真实分布, 使用 KL 散度  $\text{KL}(q \parallel p)$  度量替代分布  $q$  与真实分布  $p$  之间的

差异, 在给定替代分布的分布函数族中进行选择, 使得 KL 散度最小, 并通过一定的约束形式保证近似过程的可计算性和足够的逼近精度. 此类 VB 推断优化问题也称为变分自由能最小化(或 Gibbs 自由能最小化). 变分推断对应于量子力学和统计物理中的 MF 理论[35], 其因式分解形式与 MF 相对应[10], 因此, VMP 也称为 MF 消息传递[36].

与 BP 相同, VMP 在节点之间传递消息并在每个节点上进行局部运算以更新该节点的后验信度. 与 BP 不同, 在 VMP 中, 父节点传递该节点的充分统计量的期望到子节点, 而子节点向父节点传递自然参数. 由于 VMP 采用了因式分解变分近似, 可应用于非常广泛的共轭指数模型族. 此外, 通过引入变分参数, VMP 也可以应用于非共轭分布模型[37]. VMP 在机器人控制[38]、无线传感器网络[39]和信道估计[40]等领域应用广泛.

#### 1.3.2 期望传播(EP)

EP 由 Minka[32]提出, 与变分近似类似, 也是通过目标分布的分解结构迭代求解目标分布的近似分布. 与变分近似不同, EP 最小化  $\text{KL}(p \parallel q)$ . Minka[32]指出, 在近似分布可以完全因式分解的情况下, EP 即为 LBP.

EP 通过仅保留某些期望(如均值和方差)近似信度, 并进行迭代直至这些期望在整个网络中保持一致. 因此, EP 不仅适用于连续随机变量的推断, 也适用于具有离散和连续随机变量的混合网络. Gelman 等[41]在 MP 框架下提出了更一般化的 EP, 即可以在数据较大的子集之间进行消息传递, 而不是在每个变量之间. EP 在多输入多输出系统[42]、过程回归[43]和神经网络[44]等领域广泛应用.

#### 1.3.3 基于采样的信度传播(SBP)

当存在高维数、非线性等问题时, 式(2)中的积分无法求得解析解, 可以通过采样近似, 即 SBP 求取. SBP 有两种思路: 一是从消息中进行采样[33-45]; 二是从估计的后验边缘分布中采样[46]. 具有代表性的 SBP 方法有以下两种:

##### 1) 非参信度传播(NBP).

NBP 由 Sudderth 等[33]提出, 该方法使用基于混合高斯的核密度估计近似表达节点之间的消息, 然后使用采样过程更新消息. 使用混合高斯核可以保证式(2)中的乘积有较好的参数化形式. NBP 利用蒙特卡洛和高斯混合模型的优点, 将粒子滤波从简单马尔科夫链模型扩展到任意图模型上. 值得一提的是, 文献[45]独立提出了与 NBP 几乎相同的方法, 之后文

献[47]对两种方法进行了统一. NBP在视觉跟踪<sup>[48]</sup>、传感器定位<sup>[49]</sup>、机器人姿态估计与控制<sup>[50]</sup>等问题中取得了良好应用, 缺点在于消息更新采样较为费时, 计算复杂度为 $\mathcal{O}(M^D)$ , 其中 $M$ 为高斯混合项的个数,  $D$ 为图中节点度数(每个节点连接的边数)的最大值. 当图中有高度数节点时可扩展性较差.

## 2) 粒子信度传播(PBP).

作为NBP的改进, PBP使用规模较小的粒子集合替代高斯混合表示消息和置信<sup>[34]</sup>. PBP采用重要性采样表示消息, 并理论分析了该算法在有限采样情况下的一致性. Lienart等<sup>[51]</sup>提出了具有更高准确度的PBP, 该算法构建了有效的自适应近似采样分布. 分布从指数族中进行选取, 其参数通过EP框架迭代更新. PBP在模型预测控制中得到了应用<sup>[52]</sup>, 可以有效地在高维空间中完成路径查找和平滑. Xue等<sup>[53]</sup>将PBP应用于多视觉目标跟踪, PBP每次迭代的计算复杂度为 $\mathcal{O}(|\mathcal{E}|K^2)$ , 其中 $|\mathcal{E}|$ 为图中边的个数,  $K$ 为每个节点使用的粒子数, 但PBP的运行时间高度取决于采样方案和提议函数.

### 1.3.4 广义信度传播(GBP)

为了扩展BP, Yedidia等<sup>[22]</sup>提出了GBP. 不同于BP中消息传递仅在节点与其相邻节点之间, GBP中

消息可以在区域(节点集合)之间传递. 在实际中, 若区域划分得当, 则GBP在精确度、收敛性和计算代价上均可能优于BP, 但如何最优地划分区域仍然是一个开放问题. 通过推导BP与物理学概念自由能的内在联系, 文献[22]展示了GBP与基于区域的自由能的不动点是相同的, 并给出了GBP的理论证明. 作为GBP的特例, 文献[22]说明了BP的不动点与Bethe自由能的稳定点是相同的, 并详细阐述了BP与Bethe近似之间的内在联系.

MF、BP和EP等均有各自的优缺点和适用场景, 若存在统一的MP算法, 在同一个PGM上能够将MF、BP与EP等相结合, 则在克服各自缺点的同时, 也能够充分发挥各自的优点, 对解决大规模复杂推断问题将是非常有益的. 基于这个思路, Riegler等<sup>[35]</sup>在文献[22]的基础上, 将BP与MF相结合, 提出了一种统一的MP算法, 给出整个因子图的消息传递不动点方程, 并证明了这种组合得到的消息传递不动点方程对应于基于约束区域的自由能近似的稳定点, 其他组合算法还有MF-BP-EP<sup>[54]</sup>等. MF-BP等组合类消息传递算法已在信道辨识、解码中得到应用<sup>[55]</sup>.

表1总结了MP方法的基础方法、近似方法以及拓展方法的特点和局限性.

表1 消息传递常见方法特点和局限性总结

消息传递方法	特点	局限性
基础方法	BP	可以得到准确解
	LBP	BP的扩展, 适用于有环图
	GaBP	BP的特殊形式, 消息形式简洁
近似方法	确定性近似VMP	通过替代分布近似, 采用距离度量约束, 在共轭指数族上消息更新规则简单
	确定性近似EP	通过替代分布近似, 度量方式与VMP不同, 通过矩匹配近似
	采样近似NBP	采用高斯混合近似消息, 采样更新消息
	采样近似PBP	NBP的改进, 通过粒子集合代替连续函数表示消息
拓展方法	GBP	在节点集合(区域)之间传递消息

## 2 MP方法在信息融合中的应用

信息融合领域中的一些经典算法, 如迭代最小二乘、线性最小均方误差估计和卡尔曼滤波等, 均可以表示为线性状态空间模型上的高斯消息传递<sup>[56]</sup>, MP也可以组合不同的算法, 达到优势互补的目的. 鉴于MP在高维推断问题上的优势, 且能够为多传感器信息融合、分布式估计和目标跟踪等提供整体解决思路, 近年来成为状态估计与参数辨识、目标定位与跟踪领域、信息融合等方向的研究热点<sup>[6]</sup>. 本节分别从

状态估计与平滑、目标跟踪和多源异构数据融合等方面介绍MP在信息融合领域中的应用.

### 2.1 状态估计与平滑

贝叶斯滤波为非线性非高斯滤波问题提供了通用的递推框架, 即推断非线性空间模型隐变量的后验状态估计. 实际中, 很难获得后验状态估计的闭环解析解. 近似方法可以分为局部类方法和全局类方法. 局部类方法如扩展卡尔曼滤波器, 其计算量可控但计算误差会随着时间的增加累计增加. 全局类方

法如粒子滤波可以实现高精度,但当状态空间较大时其计算量是无法接受的。

为在计算复杂度可行的同时实现高精度滤波算法,一种思路为组合局部类和全局类方法。Vitetta等<sup>[57]</sup>在此思路基础上,基于MP发展了一系列新算法,用于大规模问题下的滤波和平滑,实现了较好的计算精度与计算复杂度的折衷。针对混合线性和非线性状态空间,Vitetta等<sup>[57]</sup>提出了Turbo滤波器,该滤波器为基于MP的在线贝叶斯滤波器。Turbo滤波器通过将线性与非线性混合模型的滤波问题表示为因子图,并应用和积法则计算结果。该滤波器是边缘粒子滤波器的扩展,其精度和复杂度均优于后者,而后者正是粒子滤波器与卡尔曼滤波器的组合。针对有固定时延的条件线性高斯状态空间模型,Vitetta等<sup>[58]</sup>从因子图的角度进行了分析。通过将任意状态空间模型上的贝叶斯平滑问题描述为因子图上的前向-后向消息传递,并运用SPA分别在两种粒子平滑器的基础上推导出两种新的粒子平滑算法。在文献<sup>[57]</sup>的基础上,Vitetta等<sup>[59]</sup>采用因子图方法研究条件线性高斯状态空间模型的递归滤波问题,给出了更为全面的推导和描述。Di等<sup>[60]</sup>在双贝叶斯滤波器的基础上,推导得到双贝叶斯平滑器。其前向传导为双贝叶斯滤波器,后向传导为2个后向信息滤波器。同样,通过因子图将整个算法结构表示出来并利用和积法则推导消息传递结果。更进一步,Vitetta等<sup>[61]</sup>给出了包含多个贝叶斯滤波器的通用滤波方法,基本思想为每个贝叶斯滤波器内部进行计算,其之间的交互可以表示为图模型上的消息传递算法。

MP在网络化分布式状态估计方面也有比较广泛的应用。如在电力系统中,需要迅速捕获突发的不确定性;随着绿色能源的使用与电网之间互联性的上升,使得面临的估计问题规模逐渐增大。同时,由于可以获得相关信息的网络资源日益增加,计算感兴趣物理量的边缘后验状态面临较高的复杂度,需要开发高效的状态估计算法。Hu等<sup>[62]</sup>提出一种基于BP的分布式系统状态估计器,用于大规模电力系统中量测稀疏的情况。Chavali等<sup>[63]</sup>通过因子图表示电力系统状态向量在相邻区域之间以及不同时刻之间的相关关系,并推导了基于和积法则的消息更新规则,该方法比传统方法有着更好的估计精度。Weng等<sup>[64]</sup>提出了一种分布式的MP方法解决该问题,该方法在减少计算时间的同时也具有较高的估计精度。利用MP进行分布式状态估计算法的共同特点是在计算量可接受的情况下实现了估计精度的提升<sup>[65]</sup>。

除上述应用外,MP在基于粒子的滤波方法<sup>[66]</sup>、层次高斯滤波器在线实时状态估计<sup>[67]</sup>、分布式一致性卡尔曼滤波器<sup>[68]</sup>等估计问题中也有应用。

## 2.2 目标跟踪

在目标跟踪领域,基于MP的方法最早出现在文献<sup>[69-70]</sup>中,致力于解决拥有窄视野的传感器网络中的数据关联问题。MP在估计精度、计算复杂度和实现的灵活性方面具有优势,更重要的是为多目标跟踪中的主要挑战——概率数据关联问题,提供了效果好、效率高和可扩展的解决方案,使得MP在资源有限并需要实时结果的情况下非常有优势。此外,MP也可以直接运用在非线性和非高斯模型中。总体而言,MP应用于多目标跟踪有以下优点<sup>[6]</sup>: 1)可以有效地计算量测与目标之间“软”关联的关联概率; 2)提供了一种在贝叶斯推断原理下通用的多目标跟踪框架; 3)拓展并概括了之前的多目标跟踪算法,如联合概率数据关联(joint probabilistic data association, JPDA); 4)能够利用MP开发可扩展的多目标跟踪算法,适用于包含大量目标、传感器和量测的场景。

根据面临问题的复杂性,MP在目标跟踪中的应用目前可以分为如下3个方面:

1)解决目标跟踪中所面临的数据关联问题。在面对窄视角传感器网络中的多目标跟踪问题时,采用穷举假设计算数据关联的边缘概率分布是不可行的,Chen等<sup>[69]</sup>采用数据关联变量用于假设某些非重叠区域内所有目标和量测的联合关联事件,并通过MPA执行“硬”数据关联,求取最大后验估计。之后,MPA被应用到多帧数据关联的情况中<sup>[71]</sup>。

面对传统单传感器多目标场景中互斥约束下的数据关联问题,Williams等<sup>[72]</sup>首次提出了采用SPA估计边缘数据关联概率,并在文献<sup>[73-74]</sup>中讨论该方法的收敛性,证明了其计算复杂度与目标数和量测数呈线性关系。该方法也被拓展到多帧数据关联问题,通过构造对应的凸自由能并采用主对偶坐标上升方法进行优化<sup>[75]</sup>。其他学者将此类SPA分别扩展到天波雷达多目标多路径跟踪<sup>[76]</sup>、扩展目标跟踪<sup>[77]</sup>、基于随机有限集的多目标跟踪<sup>[78]</sup>等情况下的数据关联中。

总体而言,对于给定目标(航迹)和量测,当BP仅用于数据关联时,目的是在不需要计算联合关联事件全概率分布的基础上计算每个关联事件的边缘概率。通常采用离散随机变量表示数据关联事件,此时消息为向量形式,可通过最小化Bethe自由能得到。

2)采用MP统一解决多目标跟踪中的航迹管理、

数据关联和状态估计问题. 不仅仅是考虑数据关联问题, 而且将整个目标跟踪中所有过程纳入到概率图MP框架中, 这样可以使得算法对于所有参数都能够保持较低的复杂度和较好的扩展性. Meyer等<sup>[79]</sup>首先考虑了目标数目已知的情况, 在包含目标相关和量测相关的关联变量的因子图上运行BP, 提出一种多传感器多目标跟踪方法, 该方法的性能优于JPDA. 随后, Meyer等<sup>[80]</sup>考虑了目标数目未知的情况, 通过将目标存在和不存在的目标二元指示器建模为目标扩展状态, 采用概率因子图模型描述包括目标运动状态、目标存在状态和数据关联在内的联合隐变量之间的相关结构, 采用LBP解决多传感器多目标联合检测与跟踪问题. Soldi等<sup>[81]</sup>将其扩展到考虑存在未知和时变参数的多目标联合检测与跟踪问题, 其中假设未知和时变参数为马尔科夫链, 采用LBP计算目标和模型参数的后验边缘概率分布. 由于在多目标联合检测与跟踪问题中同时引入连续随机变量和离散随机变量, 计算边缘分布时需要进行积分计算, 在非线性、非高斯情形下, BP无法给出解析形式的消息形式. 文献[80-81]均采用基于粒子的方式实现BP, 即通过1组加权的粒子近似消息或置信. 学者们将此框架推广到其他应用中, 如水面目标跟踪与态势感知<sup>[82-83]</sup>、水下目标检测跟踪定位<sup>[84-85]</sup>、引入分类信息的多目标跟踪<sup>[86]</sup>等.

3) 采用MF-BP组合的方式统一解决多目标跟踪中的航迹管理、数据关联和状态估计问题. MP组合的方式能够发挥不同方法的优点, 在面对多路径情况下的目标检测与跟踪等复杂问题时更有优势. Turner等<sup>[87]</sup>提出了一种综合状态估计、数据关联和航迹管理的全变分跟踪器, 其中通过MF近似完全独立分解联合概率分布, 通过BP近似计算数据关联, 之后Lan等<sup>[88]</sup>将此方法拓展到多路径目标检测和跟踪问题. Lau等<sup>[89]</sup>考虑目标运动状态与目标存在状态之间的相关性, 提出了结构化的MF近似并采用BP近似边缘关联概率. Lan等<sup>[90]</sup>基于最小区域自由能原理, 给出了一种结合MF-BP近似的统一MP算法用于解决机动多目标联合检测与跟踪问题, 通过假设目标运动状态、目标可观测状态、运动模式-模型关联隐变量为共轭指数分布族, MF近似将高维联合推断简化为独立低维推断, 产生的消息更新方程更为简单, BP用以近似计算数据关联事件的边缘概率. 同样基于最小区域自由能原理, Lan等<sup>[91]</sup>针对多部天波超视距雷达组网融合跟踪问题, 提出了一种基于MP的量测级融合联合目标检测与跟踪方法. 该方法将天波雷

达组网融合跟踪的因子图分解为BP区域和MF区域, 通过分别利用BP近似和MF近似的优势, 将天波超视距雷达组网融合跟踪面临的高维隐变量(目标存在状态、目标运动状态、多路径数据关联、电离层高度估计)推断问题降为低维推断问题, 通过闭环迭代的方式更新近似后验概率分布. 该方法能够有效降低目标检测、目标跟踪、多路径数据关联、电离层高度估计之间的耦合误差, 与传统方法相比, 提高了目标的检测和跟踪性能.

### 2.3 多源异构数据融合

多源异构数据融合的难点在于融合不同类型的数据, 使得结果在融合层面与单个传感器层面尽可能达成一致, 同时还可能面临数据的异步性和稀疏性. MP分布式和迭代式的处理框架能够为该类问题提供有力框架, 通过以下几种具体应用举例说明:

1) 多源信息辅助下的目标跟踪. Soldi等<sup>[92]</sup>采用SPA框架, 将异构数据源与辅助信息进行贝叶斯融合, 提出一种新的基于SPA的多传感器多目标跟踪算法, 集成了辅助监控系统数据和标准航线地理信息, 其中辅助监控系统包括自动辨识系统(automatic identification system, AIS)和广播式自动相关监视系统(automatic dependent surveillance broadcast, ADS-B). 算法将辅助监控系统信息看作附加的传感器, 将标准航线地理信息看作多动态模型, 从而将信息融入到原有的多传感器多目标跟踪SPA框架中, 实验结果验证了该融合算法的有效性.

2) 多视角聚类问题, 如自然光和红外拍摄的相同目标的图像, 不同语言表达的文档等融合聚类. 该问题常见于模式识别、社交网络挖掘、计算机视觉等领域, 在单个视角下, 为了使聚类质量最大化, 数据点应该分类于似然最大的模式, 同时在不同视角之间, 数据点的分类方式应当尽可能保持一致性. 基于此, Wang等<sup>[93]</sup>提出了两项全局优化函数, 第1项考虑了每个点归类于每个模式的相似性的和; 第2项考虑了不同视角的显式聚类一致性. 直接搜索最优聚类使得目标函数最大化是一个NP问题, 基于最大和BP, Wang等<sup>[93]</sup>采用因子图表示目标函数, 并提出一种多视角亲和传播方法解决该问题, 相比于其他多视角聚类方法具有更好的性能.

3) 认知无线网络的协同频谱感知. 在该问题中每个用户最重要的任务是检测许可用户(又称为主要使用者(primary users, PUs))是否在使用被分配的频谱, 从而决定次要使用者(secondary users, SUs)是否可以利用该频谱进行通讯. 对不同位置的SUs

而言,其相邻范围内的PUs可能是不同的,频谱使用情况也可能是不同的.对同一个SU而言,其相邻范围内PUs的频谱使用情况在不同时刻也是变化的,这些原因构成了该问题的空间异构性和时间动态性.通过将该问题建模为高斯马尔科夫场并采用BP算法<sup>[94]</sup>,SUs可以将各自基于观测的信息相互传递,从而达到更加快速且精确检测的目的.

4) 协同定位与目标跟踪.对于多移动平台搭载

的多智能体之间的协同定位与目标跟踪问题,每个智能体需要融合来自其他智能体的量测和来自目标的量测,同时要面临目标数目和目标量测与目标之间关联的不确定性. Sharma等<sup>[95]</sup>在BP框架下提出了一种分布式、计算效率高的定位跟踪方法.

表2为MP在信息融合中的应用情况,包含了各类应用问题、采用的概率图模型类型、使用的具体消息传递方法以及相应的参考文献.

表2 消息传递方法在信息融合中的应用情况

应用领域	具体问题描述	PGM类型	MP方法	文献
状态估计与平滑	计算复杂度可行下的高精度滤波方法	FFG	SPA	[57-60]
	基于粒子的滤波方法	FFG	SPA, MPA	[66]
	层次高斯滤波器在线实时状态估计	FFG	VMP	[67]
	分布式一致性卡尔曼滤波器	FG	GaBP	[68]
	电力系统网络化分布式状态估计	BN, FG	SPA, NBP	[62-63, 65]
	快速分布式状态估计, 捕获电网突发状况	FG	VMP	[64]
目标跟踪	传感器网络多目标跟踪数据关联	MRF	MPA	[69-71]
	多目标跟踪多帧数据关联变量边缘概率计算	MRF	SPA	[72-75]
	天波雷达多目标多路径数据关联变量边缘概率计算	FFG	SPA	[76]
	扩展目标数据关联	FG	SPA	[77]
	用于数据关联的快速标签多伯努利滤波器	FG	SPA	[78]
	多目标多传感器航迹管理、数据关联、状态估计统一处理	FG	LBP	[79-81]
	水上水下目标感知与定位	FG	SPA	[82-85]
	消息传递组合统一解决多目标跟踪中的航迹管理、数据关联和状态估计	FG	VMP, LBP	[87-89]
多源异构数据融合	消息传递组合解决多传感器多路径组网融合目标检测跟踪	FG	MF-BP	[90]
	消息传递组合解决机动多目标联合检测与跟踪	FG	MF-BP	[91]
	多源异构信息辅助下的目标跟踪	FG	SPA	[86, 92]
	多视角聚类	FG	MPA	[93]
	认知无线网络的协同频谱感知技术	MRF	GaBP	[94]
	协同定位与目标跟踪	FG	MPA	[95]

### 3 总结与讨论

针对当前热点理论方法之一的MP方法及其在信息融合领域的应用,从理论基础、理论方法以及研究现状等方面,较为系统地进行了梳理和介绍.首先,介绍了PGM;然后,对MP中常见的理论方法,包括BP、LBP、GaBP、VMP、EP、NBP、PBP以及GBP,分别从原理和研究现状方面作出简要叙述;最后,从状态估计与平滑、目标跟踪和多源异构数据融合3个方向介绍了MP方法在信息融合领域中的应用和研究进展.

在文献梳理过程中发现,得益于PGM对复杂分布有效地构造和表示机制,MP天然具有分布式、并行化、计算效率高和扩展性强等特点,该方法仍然是一个热点理论方法且应用广泛.从理论方面而言,其收敛性和正确性等性质还有待深入挖掘.从MP在信息融合领域中的应用方面而言,未来可能的研究方向有以下几个:

1) 时间序列转移模型状态估计.多帧观测数据联合批处理架构可以有效提升状态估计算法的精度和平滑性,通过调整MP方向可以将序贯处理架构扩展为批处理架构,批处理算法如卡尔曼平滑器和前向后向算法等均可基于MP实现,MP思想用于批处理算法设计具有较高的理论和工程研究价值.

2) 大规模传感器网络.现代信息融合系统趋于网络化和自主化,如弹道导弹防御作战过程中需要协同使用多种传感器资源<sup>[96]</sup>;无人机编队为载体的动态雷达网络受到了广泛关注<sup>[97]</sup>;MP可以通过局部节点消息交换实现大规模传感器网络上的算法设计,为新一代信息融合系统体系结构顶层框架和模型设计提供了新的思路.

3) 目标与环境相互耦合等复杂情况下的目标跟踪.融合更多的辅助信息,如环境信息、目标类型、行为等相关数据,联合实现目标状态和环境参数联合估计与辨识是MP未来应用方向之一.如第2.2节描述

的天波超视距雷达目标跟踪与电离层参数联合迭代问题中<sup>[31,98]</sup>,由于电离层复杂的时空特性、天波超视距雷达量测中目标状态与电离层参数的深度耦合以及多源量测信息等,使得问题较为复杂.如何建立起多源量测信息与多种隐变量之间的PGM,并设计有效的MP算法,实现目标跟踪精度提升,是MP在目标跟踪应用中一个较有挑战性的问题.

总体而言,MP在信息融合领域的大规模问题中,如非合作目标定位与导航、多目标跟踪下的传感器资源管理、分布式无线传感器网络多目标跟踪等仍有较好的应用前景.在具体应用问题中,如何根据问题本身的特点和结构设计合适的PGM、较好的消息初始化策略和消息收敛加速策略等,实现算法计算精度与计算复杂度的最好折衷,是MP在应用中需要探索的问题.

#### 参考文献(References)

- [1] 潘泉, 于昕, 程咏梅, 等. 信息融合理论的基本方法与进展[J]. 自动化学报, 2003, 29(4): 599-615.  
(Pan Q, Yu X, Cheng Y M, et al. Essential methods and progress of information fusion theory[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(4): 599-615.)
- [2] 潘泉, 王增福, 梁彦, 等. 信息融合理论的基本方法与进展(II)[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(10): 1233-1244.  
(Pan Q, Wang Z F, Liang Y, et al. Basic methods and progress of information fusion (II)[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(10): 1233-1244.)
- [3] 潘泉, 胡玉梅, 兰华, 等. 信息融合理论研究进展: 基于变分贝叶斯的联合优化[J]. 自动化学报, 2019, 45(7): 1207-1223.  
(Pan Q, Hu Y M, Lan H, et al. Information fusion progress: Joint optimization based on variational Bayesian theory[J]. Acta Automatica Sinica, 2019, 45(7): 1207-1223.)
- [4] Winn J M, Bishop C M. Variational message passing[J]. Journal of Machine Learning Research, 2005, 6(4): 661-694.
- [5] Yedidia J S. Message-passing algorithms for inference and optimization[J]. Journal of Statistical Physics, 2011, 145(4): 860-890.
- [6] Meyer F, Kropfreiter T, Williams J L, et al. Message passing algorithms for scalable multitarget tracking[J]. Proceedings of the IEEE, 2018, 106(2): 221-259.
- [7] Kschischang F R, Frey B J, Loeliger H A. Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2): 498-519.
- [8] Bishop C M. Pattern recognition and machine learning[M]. New York: Springer, 2006: 360-402.
- [9] Loeliger H A. An introduction to factor graphs[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2004, 21(1): 28-41.
- [10] Yedidia J S, Freeman W T, Weiss Y. Exploring artificial intelligence in the new millennium (chapter 8 understanding belief propagation and its generalizations)[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2003: 239-269.
- [11] Shamir R, Sharan R, Tsur D. Cluster graph modification problems[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 144(1/2): 173-182.
- [12] Pearl J. Reverend Bayes on inference engines: A distributed hierarchical approach[C]. Proceedings of the 2nd National Conference on Artificial Intelligence. Pittsburgh: AAAI, 1982: 133-136.
- [13] Murphy K P, Weiss Y, Jordan M I. Loopy belief propagation for approximate inference: An empirical study[C]. Proceedings of the 15th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Stockholm: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1999: 467-475.
- [14] Weiss Y, Freeman W T. Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology[J]. Neural Computation, 2001, 13(10): 2173-2200.
- [15] Shah A, Shah D, Wornell G. On learning continuous pairwise Markov random fields[C]. Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Virtual: PMLR, 2021: 1153-1161.
- [16] Hastings W K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications[J]. Biometrika, 1970, 57(1): 97-109.
- [17] Weiss Y. Correctness of local probability propagation in graphical models with loops[J]. Neural Computation, 2000, 12(1): 1-41.
- [18] Liu Y, Chandrasekaran V, Anandkumar A, et al. Feedback message passing for inference in Gaussian graphical models[J]. IEEE International Symposium on Information Theory, 2010: 1683-1687.
- [19] Cantwell G T, Newman M E J. Message passing on networks with loops[J/OL]. 2019, arXiv: 1907.08252.
- [20] Weiss Y, Freeman W T. On the optimality of solutions of the max-product belief-propagation algorithm in arbitrary graphs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2): 736-744.
- [21] Knoll C, Mehta D, Chen T R, et al. Fixed points of belief propagation—an analysis via polynomial homotopy continuation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2018, 40(9): 2124-2136.
- [22] Yedidia J S, Freeman W T, Weiss Y. Constructing free-energy approximations and generalized belief propagation algorithms[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(7): 2282-2312.
- [23] Tatikonda S C, Jordan M I. Loopy belief propagation and Gibbs measures[C]. Proceedings of the 18th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Alberta: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2002:

- 493-500.
- [24] Sanghavi S, Malioutov D, Willsky A. Belief propagation and LP relaxation for weighted matching in general graphs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(4): 2203-2212.
- [25] Dai G W, Li F W, Sun Y F, et al. Convergence and correctness of belief propagation for the Chinese postman problem[J]. *Journal of Global Optimization*, 2019, 75(3): 813-831.
- [26] Malioutov D M, Johnson J K, Willsky A S. Walk-sums and belief propagation in Gaussian graphical models[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2006, 7: 2031-2064.
- [27] Johnson J K, Bickson D, Dolev D. Fixing convergence of Gaussian belief propagation[C]. *IEEE International Symposium on Information Theory*. Piscataway: IEEE, 2009: 1674-1678.
- [28] Su Q L, Wu Y C. On convergence conditions of Gaussian belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1144-1155.
- [29] Li B, Wu Y C. Convergence analysis of Gaussian belief propagation under high-order factorization and asynchronous scheduling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(11): 2884-2897.
- [30] Bickson D, Dolev D, Shental O, et al. Gaussian belief propagation based multiuser detection[C]. *IEEE International Symposium on Information Theory*. Piscataway: IEEE, 2008: 1878-1882.
- [31] Guo Z, Wang Z, Lan H, et al. OTHR multitarget tracking with a GMRF model of ionospheric parameters[J]. *Signal Processing*, 2021, 182: 107940.
- [32] Minka T P. Expectation propagation for approximate Bayesian inference[C]. *Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Seattle: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001: 362-369.
- [33] Sudderth E B, Ihler A T, Freeman W T, et al. Nonparametric belief propagation[C]. *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Madison: IEEE, 2003: 18.
- [34] Ihler A, McAllester D. Particle belief propagation[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2009, 5: 256-263.
- [35] Riegler E, Korkelund G E, Manchon C N, et al. Merging belief propagation and the mean field approximation: A free energy approach[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(1): 588-602.
- [36] Lu X H, Zhang C Z, Wang Z Y. Combined belief propagation-mean field message passing algorithm for dirichlet process mixtures[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(7): 1041-1045.
- [37] Knowles D, Minka T. Non-conjugate variational message passing for multinomial and binary regression[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2011, 24: 1701-1709.
- [38] Vanderbroeck M, Baioumy M, van der Lans D, et al. Active inference for robot control: A factor graph approach[J]. *Student Undergraduate Research Ejournal*, 2019, 5(2): 15.
- [39] Hedhly K, Laaraiedh M, Abdelkefi F, et al. Optimizing communication and computational costs based on the edge participation probability and the evolved variational message passing algorithm in wireless sensor networks[J]. *Ad Hoc Networks*, 2020, 101: 102093.
- [40] Ma Y S, Wu N, Yuan W J, et al. Joint channel estimation and equalization for index-modulated spectrally efficient frequency division multiplexing systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2020, 68(10): 6230-6244.
- [41] Gelman A, Vehtari A, Jylänki P, et al. Expectation propagation as a way of life: A framework for Bayesian inference on partitioned data[J/OL]. 2014, arXiv: 1412.4869.
- [42] Céspedes J, Olmos P M, Sánchez-Fernández M, et al. Expectation propagation detection for high-order high-dimensional MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2014, 62(8): 2840-2849.
- [43] Tolvanen V, Jylänki P, Vehtari A. Expectation propagation for nonstationary heteroscedastic Gaussian process regression[C]. *IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*. Piscataway: IEEE, 2014: 1-6.
- [44] Jylänki P, Nummenmaa A, Vehtari A. Expectation propagation for neural networks with sparsity-promoting priors[J]. *The Journal of Machine Learning Research*, 2014, 15(1): 1849-1901.
- [45] Isard M. PAMPAS: Real-valued graphical models for computer vision[C]. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway: IEEE, 2003: 613-620.
- [46] Koller D, Lerner U, Angelov D. A general algorithm for approximate inference and its application to hybrid Bayes nets[C]. *Proceedings of the 15th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1999: 324-333.
- [47] Sudderth E B, Ihler A T, Isard M, et al. Nonparametric belief propagation[J]. *Communications of the ACM*, 2010, 53(10): 95-103.
- [48] Sudderth E B, Mandel M I, Freeman W T, et al. Visual hand tracking using nonparametric belief propagation[C]. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop*. Piscataway: IEEE, 2004: 189.
- [49] Ihler A T, Fisher J W, Moses R L, et al. Nonparametric belief propagation for self-localization of sensor

- networks[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2005, 23(4): 809-819.
- [50] Desingh K, Lu S, Opiari A, et al. Efficient nonparametric belief propagation for pose estimation and manipulation of articulated objects[J]. *Science Robotics*, 2019: 4.
- [51] Lienart T, Teh Y W, Doucet A. Expectation particle belief propagation[C]. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Montreal: Curran Associates, Inc., 2015: 3609-3617.
- [52] Hämäläinen P, Rajamäki J, Liu C K. Online control of simulated humanoids using particle belief propagation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(4): 1-13.
- [53] Xue J, Zheng N, Geng J, et al. Tracking multiple visual targets via particle-based belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 2008, 38(1): 196-209.
- [54] Wang W, Wang Z Y, Zhang C Z, et al. A BP-MF-EP based iterative receiver for joint phase noise estimation, equalization, and decoding[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(10): 1349-1353.
- [55] Çakmak B, Urup D N, Meyer F, et al. Cooperative localization for mobile networks: A distributed belief propagation-mean field message passing algorithm[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(6): 828-832.
- [56] Loeliger H A, Dauwels J, Hu J L, et al. The factor graph approach to model-based signal processing[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(6): 1295-1322.
- [57] Vitetta G M, Sirignano E, Montorsi F. A novel message passing algorithm for online Bayesian filtering: Turbo filtering[C]. *IEEE International Conference on Communications Workshops*. Piscataway: IEEE, 2017: 645-651.
- [58] Vitetta G M, Sirignano E, Montorsi F. Particle smoothing for conditionally linear Gaussian models as message passing over factor graphs[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(14): 3633-3648.
- [59] Vitetta G M, Sirignano E, Viesti P D, et al. Marginalized particle filtering and related filtering techniques as message passing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(6): 1522-1536.
- [60] Di Viesti P, Vitetta G M, Sirignano E. Double Bayesian smoothing as message passing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(21): 5495-5510.
- [61] Vitetta G M, Viesti P D, Sirignano E, et al. Multiple Bayesian filtering as message passing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 1002-1020.
- [62] Hu Y, Kuh A, Yang T, et al. A belief propagation based power distribution system state estimator[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2011, 6(3): 36-46.
- [63] Chavali P, Nehorai A. Distributed power system state estimation using factor graphs[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(11): 2864-2876.
- [64] Weng Y, Negi R, Ilić M D. Probabilistic joint state estimation for operational planning[J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2019, 10(1): 601-612.
- [65] Rana M M, Xiang W, Wang E. Smart grid state estimation and stabilisation[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2018, 102: 152-159.
- [66] Dauwels J, Korl S, Loeliger H A. Particle methods as message passing[C]. *IEEE International Symposium on Information Theory*. Piscataway: IEEE, 2006: 2052-2056.
- [67] Şenöz I, de Vries B. Online variational message passing in the hierarchical Gaussian filter[C]. *IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*. Piscataway: IEEE, 2018: 1-6.
- [68] Wang S D, Dekorsy A. A factor graph-based distributed consensus Kalman filter[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 2039-2043.
- [69] Chen L, Çetin M, Willsky A S. Distributed data association for multi-target tracking in sensor networks[C]. *Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion*. Rustenburg: IEEE, 2005: 9-16.
- [70] Chen L, Wainwright M J, Cetin M, et al. Multitarget-multisensor data association using the tree-reweighted max-product algorithm[C]. *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XII*. Orlando, 2003, 5096: 127-138.
- [71] Zhu H Y, Han C Z, Li C. Graphical models-based track association algorithm[C]. *The 10th International Conference on Information Fusion*. Piscataway: IEEE, 2007: 1-8.
- [72] Williams J L, Lau R A. Data association by loopy belief propagation[C]. *The 13th International Conference on Information Fusion*. Piscataway: IEEE, 2010: 1-8.
- [73] Williams J L, Lau R A. Convergence of loopy belief propagation for data association[C]. *The 6th International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing*. Piscataway: IEEE, 2010: 175-180.
- [74] Williams J, Lau R. Approximate evaluation of marginal association probabilities with belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(4): 2942-2959.
- [75] Williams J L, Lau R A. Multiple scan data association by convex variational inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(8): 2112-2127.
- [76] Sun S, Lan H, Wang Z F, et al. The application of sum-product algorithm for data association[C]. *The 19th International Conference on Information Fusion*. Piscataway: IEEE, 2016: 416-423.
- [77] Meyer F, Liu Z Y, Win M Z. Scalable probabilistic data

- association with extended objects[C]. IEEE International Conference on Communications Workshops. Piscataway: IEEE, 2019: 1-6.
- [78] Kropfreiter T, Meyer F, Hlawatsch F. A fast labeled multi-Bernoulli filter using belief propagation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(3): 2478-2488.
- [79] Meyer F, Braca P, Willett P, et al. Scalable multitarget tracking using multiple sensors: A belief propagation approach[C]. The 18th International Conference on Information Fusion. Piscataway: IEEE, 2015: 1778-1785.
- [80] Meyer F, Braca P, Willett P, et al. A scalable algorithm for tracking an unknown number of targets using multiple sensors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(13): 3478-3493.
- [81] Soldi G, Meyer F, Braca P, et al. Self-tuning algorithms for multisensor-multitarget tracking using belief propagation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(15): 3922-3937.
- [82] Tesei A, Meyer F, Been R. Tracking of multiple surface vessels based on passive acoustic underwater arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2020, 147(2): EL87-EL92.
- [83] Gaglione D, Soldi G, Meyer F, et al. Bayesian information fusion and multitarget tracking for maritime situational awareness[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2020, 14(12): 1845-1857.
- [84] Melo J, Gaglione D, Soldi G, et al. A belief propagation based algorithm for autonomous mapping of underwater targets[C]. Global Oceans 2020: Singapore-U.S. Gulf Coast. Biloxi: IEEE, 2020: 1-7.
- [85] Meyer F, Gemba K L. Probabilistic focalization for shallow water localization[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2021, 150(2): 1057-1066.
- [86] Gaglione D, Soldi G, Braca P, et al. Classification-aided multitarget tracking using the sum-product algorithm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 1710-1714.
- [87] Turner R D, Bottone S, Avsarala B. A complete variational tracker[J]. Advances in Neural Information Processing Systems 27, 2014: 496-504.
- [88] Lan H, Sun S, Wang Z F, et al. Joint target detection and tracking in multipath environment: A variational Bayesian approach[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(3): 2136-2156.
- [89] Lau R A, Williams J L. A structured mean field approach for existence-based multiple target tracking[C]. The 19th International Conference on Information Fusion. Piscataway: IEEE, 2016: 1111-1118.
- [90] Lan H, Wang Z F, Bai X L, et al. Measurement-level target tracking fusion for over-the-horizon radar network using message passing[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(3): 1600-1623.
- [91] Lan H, Ma J R, Wang Z F, et al. A message passing approach for multiple maneuvering target tracking[J]. Signal Processing, 2020, 174: 107621.
- [92] Soldi G, Gaglione D, Meyer F, et al. Heterogeneous information fusion for multitarget tracking using the sum-product algorithm[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE, 2019: 5471-5475.
- [93] Wang C D, Lai J H, Yu P S. Multi-view clustering based on belief propagation[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2016, 28(4): 1007-1021.
- [94] Wang Y F, Li H S, Qian L J. Belief propagation and quickest detection-based cooperative spectrum sensing in heterogeneous and dynamic environments[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2017, 16(11): 7446-7459.
- [95] Sharma P, Saucan A A, Bucci D J, et al. Decentralized Gaussian filters for cooperative self-localization and multi-target tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(22): 5896-5911.
- [96] 李志汇, 刘昌云, 倪鹏, 等. 反导多传感器协同任务规划综述[J]. 宇航学报, 2016, 37(1): 29-38.  
(Li Z H, Liu C Y, Ni P, et al. Review on multisensor cooperative mission planning in anti-TBM system[J]. Journal of Astronautics, 2016, 37(1): 29-38.)
- [97] Guerra A, Dardari D, Djuric P M. Dynamic radar networks of UAVs: A tutorial overview and tracking performance comparison with terrestrial radar networks[J]. IEEE Vehicular Technology Magazine, 2020, 15(2): 113-120.
- [98] Lan H, Liang Y, Wang Z F, et al. Distributed ECM algorithm for OTHR multipath target tracking with unknown ionospheric heights[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2018, 12(1): 61-75.

## 作者简介

郭振(1992—), 男, 博士生, 从事统计推断、状态估计的研究, E-mail: guozhenjs@mail.nwpu.edu.cn;

王增福(1982—), 男, 副教授, 博士, 从事目标感知与传感器资源管理等研究, E-mail: wangzengfu@nwpu.edu.cn;

白向龙(1996—), 男, 博士生, 从事传感器组网融合的研究, E-mail: baixianglong@mail.nwpu.edu.cn;

兰华(1986—), 男, 副教授, 博士生导师, 从事目标跟踪、机器学习等研究, E-mail: lanhua@nwpu.edu.cn;

潘泉(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事目标跟踪与识别、信息融合等研究, E-mail: quanpan@nwpu.edu.cn.

(责任编辑: 魏冰)