

控制与决策

Control and Decision

低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法

戴家浩, 易静文, 柴利

引用本文:

戴家浩, 易静文, 柴利. 低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2543–2551.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0151>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems

控制与决策. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

符号网络下一类非线性二分一致性系统的跟踪控制

Tracking control for one class of nonlinear bipartite consensus systems under signed network

控制与决策. 2022, 37(7): 1909–1914 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1390>

多电机驱动系统的一致性控制

Consensus control of multi motor drive systems

控制与决策. 2022, 37(3): 654–660 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1274>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法

戴家浩, 易静文[†], 柴利

(武汉科技大学 冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心, 武汉 430081)

摘要: 在实际应用中, 一大类的多智能体系统可由二阶和三阶模型描述. 鉴于此, 研究二阶和三阶多智能体系统在无向图下的一致性和收敛率优化问题. 针对在离散时间下的智能体, 采取一个定常的控制协议. 首先, 给出多智能体系统达到一致性的充要条件以及一致性状态的显示表达式; 然后, 将快速一致性问题转化为收敛率的优化问题, 利用劳斯判据的方法得到二阶和三阶系统最优收敛率和控制增益的直接求解公式; 最后, 通过仿真实验对理论结果的有效性进行验证.

关键词: 多智能系统; 低阶; 一致性; 优化; 收敛率; 劳斯判据

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0151

引用格式: 戴家浩, 易静文, 柴利. 低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法 [J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2543-2551.

Analytic solutions to the optimal design for fast consensus of low-order multi-agent systems

DAI Jia-hao, YI Jing-wen[†], CHAI Li

(Engineering Research Center of Metallurgical Automation and Measurement Technology, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: A large class of multi-agent systems can be described by second-order and third-order models in practical applications. This paper consider the consensus and the optimization problem of the convergence rate of second-order and third-order multi-agent systems under undirected topologies. A constant control protocol is applied to discrete-time agents. Firstly, a necessary and sufficient condition for consensus is presented, as well as the explicit formula of the consensus state. Then, the problem of accelerated consensus is transformed into the optimization problem of convergence rate. Explicit formulas for the optimal convergence rate and control gains of second-order and third-order multi-agent systems are obtained by applying the Routh criterion. Finally, simulation examples are given to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: multi-agent system; low-order; consensus; optimization; convergence rate; Routh criterion

0 引言

近年来, 多智能体系统的群集行为激发了许多学者的兴趣, 使其在各个领域得到了广泛应用. 分布式协同控制作为一个高效的控制方法现已成为多智能体系统群集行为研究的热点之一^[1-6]. 一致性问题是多智能体分布式协同控制的一个基本问题, 解决该问题的基本思路为: 利用智能体与其邻居之间的信息设计控制协议, 使得所有智能体的状态达到一致性. 根据网络特性、控制方式和系统模型的不同, 一致性问题的研究可大致分为如下几类: 切换拓扑上

的一致性^[7]、有时延的一致性^[8-9]、采样数据的一致性^[10]、量化一致性^[11]和非线性系统的一致性^[12]等.

收敛速度是一致性分析的一个重要参数. 根据智能体动力学分为离散和连续的情况, 收敛速度的研究分为连续时间加速一致性算法和离散时间加速一致性算法. 一阶多智能体系统加速一致性的研究多数是在离散时间下进行的, 采取的方法有半定规划^[13]、添加 memory^[14]和切比雪夫多项式^[15]等. 文献^[16]从图信号频域滤波的角度研究了一阶多智能体系统的一致性, 将多智能体网络的快速一致性问

收稿日期: 2021-01-25; 录用日期: 2021-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61625305, 61701355).

责任编委: 虞文武.

[†]通讯作者. E-mail: yijingwen@wust.edu.cn.

题转变为图滤波器的多项式设计问题,提供了最快收敛速度的分布式协同一致性算法的显示求解方式.

目前,快速一致性的研究在一阶多智能体系统中已经相对完善.实际应用中许多系统的输入输出关系需要通过二阶以及更高阶的动力学描述.很多学者研究了高阶多智能体系统一致性^[17-20]及其收敛速度^[21-25].文献[21]考虑了二阶连续系统的收敛速度,通过对系统矩阵特征值的根轨迹分析,给出收敛速度可以任意快的条件.文献[22]考虑了二阶离散系统的收敛速度,在对系统矩阵特征值的实部和虚部分类讨论后,给出复数的最优控制增益.文献[23]在连续时间高阶领导跟随网络中提出一种控制协议,证明了可以通过对闭环系统进行极点配置达到任意快的收敛速度.文献[24]在离散时间高阶系统是可控且不稳定特征值乘积具有上界的假设下,给出了一致性收敛率的下界,但没有给出控制增益的选择.文献[25]在文献[24]的基础上,通过求解代数Riccati方程找到一组合适的控制增益,达到了一致性收敛率的下界.

一大类的实际工程系统可用二阶和三阶多智能体系统进行描述,如移动机器人^[26]、无人机编队^[27]、移动传感器网络^[28]等.尽管针对多智能体系统一致性已有大量的研究结果,但是仍有一些基本问题需要解决.如对系统的模型描述不够清晰,忽视了系统达到一致性时的状态.信息的传输一般是数字形式的,而离散时间二阶和三阶多智能体系统加速一致性研究的结果较少.本文的主要工作为:1)给出临界稳定的采样多智能体系统的一致性描述,通过分析说明临界稳定假设不失一般性.2)得到高阶系统渐近一致性状态的显示表达式.智能体最终达到的状态是一类动态的一致性.3)将二阶和三阶多智能体系统的快速一致性问题转化为收敛率的优化问题,利用劳斯判据的方法得到最优一致性收敛的控制增益的解析解.

1 预备知识和问题描述

1.1 代数图论

多智能体之间的通信由一个无向图表示,记为 $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$.其中: $\mathcal{V}=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为顶点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集, $\mathcal{A}=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为加权邻接矩阵.若顶点 v_i 与顶点 v_j 之间有通信,则对应的边为 $e_{ij}=(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$.令 $\mathcal{N}_i=\{v_j \in \mathcal{V} : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ 表示顶点 v_i 邻居的集合. $d_i=\sum_{j=1}^N a_{ij}$ 表示顶点 v_i 的度.无向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵定义为 $\mathcal{L}=\mathcal{D}-\mathcal{A}$,其中 $\mathcal{D}=\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$.

图拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 为一个半正定对称矩阵,有特征分解

$$\mathcal{L}=V\Lambda V^T.$$

其中: $V=[v_1, v_2, \dots, v_N] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为一个酉矩阵, $\Lambda=\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. \mathcal{L} 的特征值满足

$$0=\lambda_1<\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \leq \bar{d},$$

其中 $\bar{d}=\max_i\{d_i\}$ 为图的最大度. $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $v_1=\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}$,其中 $\mathbf{1}=[1, 1, \dots, 1]^T$.

1.2 模型描述

考虑如下离散时间多智能体系统:

$$x_i^{(1)}(k+1)=x_i^{(1)}(k)+x_i^{(2)}(k) \cdot \tau,$$

$$x_i^{(2)}(k+1)=x_i^{(2)}(k)+x_i^{(3)}(k) \cdot \tau,$$

⋮

$$x_i^{(n)}(k+1)=x_i^{(n)}(k)+u_i(k) \cdot \tau,$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1)$$

其中: $x_i^{(l)}(k) \in \mathbf{R}^m$ 为智能体 i 的第 l 阶状态信息($x_i^{(1)}$ 为位置, $x_i^{(2)}$ 为速度, $x_i^{(3)}$ 为加速度), $u_i(k) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\tau \in \mathbf{R}^+$ 为采样周期.本文仅考虑 $m=1$ 的情况, $m>1$ 的结果可通过克罗内克积直接得到.

令 $\mathbf{x}_i(k)=[x_i^{(1)}(k), x_i^{(2)}(k), \dots, x_i^{(n)}(k)]^T$,将系统(1)写为向量形式,有

$$\mathbf{x}_i(k+1)=A\mathbf{x}_i(k)+Bu_i(k). \quad (2)$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \tau & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \tau \\ & & & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (3)$$

注1 文献[29]在研究多智能体系统的一致性时指出:当开环系统稳定时,每个智能体的状态在没有控制的情况下指数收敛到0.因此,在开环系统稳定的情况下,研究状态一致性意义不大.当开环系统不稳定时,研究一致性问题通常需要作出一些假设,这些假设会使得结论变得保守,如文献[24-25]中限制了特征比率 λ_2/λ_N 的范围.实际上,对于不稳定的开环系统,每个节点可以先用自身状态设置局部控制器 $u_i(k)=K_i\mathbf{x}_i(k)$ 进行极点配置,使其自镇定到临界稳定,然后利用邻居信息的状态反馈达到一致性.不失一般性,将临界稳定的多积分器系统作为研究多智能体系统一致性的模型,从某种意义上而言这样更贴近实际应用.此外,由于数字信号是在离散时间下进行通信的,直接考虑采样数据的多积分器系统(1).

采用控制协议

$$u_i(k) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}_i(k)), \quad (4)$$

其中 $K = [K_1, K_2, \dots, K_n]$ 为控制增益. 令 $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_1(k)^T, \mathbf{x}_2(k)^T, \dots, \mathbf{x}_N(k)^T]^T$, 系统(2)可写为如下形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = [I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK] \mathbf{x}(k). \quad (5)$$

定义 1 考虑控制协议(4)下的多智能体系统(1), 若对于任意的初始值, 下式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [x_i^{(l)}(k) - x_j^{(l)}(k)] = 0, \\ i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, l \in \{1, 2, \dots, n\},$$

则称该系统达到了渐近一致性.

本文主要考虑采取控制协议(4)的离散时间多智能体系统(1)在无向通信图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 上的一致性和收敛率.

2 主要结果

本节给出离散时间多智能体系统达到一致性的充要条件, 并分别给出二阶和三阶系统最优收敛率与控制增益的显示表达式.

2.1 一致的充分必要条件

设 $H_i = A - \lambda_i BK$, 根据 $\mathcal{L} = V \Lambda V^T$, 得到式(5)的迭代形式为

$$\mathbf{x}(k) = (V \otimes I_n) \text{diag} \{A, H_2, \dots, H_N\} (V^T \otimes I_n) \mathbf{x}(k-1) = (V \otimes I_n) \text{diag} \{A^k, H_2^k, \dots, H_N^k\} (V^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes I_n) A^k (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0) + (\mathbf{v}_2 \otimes I_n) H_2^k (\mathbf{v}_2^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0) + \dots + (\mathbf{v}_N \otimes I_n) H_N^k (\mathbf{v}_N^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0). \quad (6)$$

定义 2 在控制协议(4)下, 定义渐近一致性收敛率为

$$r = \max_{i=2,3,\dots,N} \rho(H_i), \quad (7)$$

其中 $\rho(\cdot)$ 为谱半径.

下面首先给出在此收敛率定义下的一致性条件以及渐近一致性最终达到的状态.

定理 1 考虑在控制协议(4)下的多智能体系统(1). 当且仅当 $r < 1$ 时, 该系统能够达到一致性. 此外, 渐近一致性状态的最终显示表达式为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{1}_N \otimes \begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} s_1(k) \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_n(k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$s_j(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{n-j+1} \tau^{m-1} C_k^{m-1} \sum_{p=1}^N x_p^{(m+j-1)}(0), \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

证明 由于 H_i 是满秩矩阵, 其具有分解形式

$$H_i = P \text{diag} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} P^{-1},$$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} H_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} P \text{diag} \{\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_n^k\} P^{-1}$, 当且仅当 $r < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} H_i^k = \mathbf{0}_{n \times n}$, 这意味着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes I_n) \lim_{k \rightarrow \infty} A^k (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0) = \frac{1}{N} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T) \otimes A^k \mathbf{x}(0). \quad (9)$$

对于每个智能体 i , 其最终的状态为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i(k) = \frac{1}{N} \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \sum_{p=1}^N \mathbf{x}_p(0), \quad (10)$$

这满足了一致性的定义 $\lim_{k \rightarrow \infty} [x_i^{(l)}(k) - x_j^{(l)}(k)] = 0$. 另外, 通过计算可以得到

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & C_k^1 \tau & C_k^2 \tau^2 & \dots & C_k^{n-1} \tau^{n-1} \\ & 1 & C_k^1 \tau & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \tau & C_k^2 \tau^2 \\ & & & 1 & C_k^1 \tau \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中 $C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$. 将式(11)代入(10), 得到一致性状态如(8)所示. \square

注 2 令误差

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes I_n) A^k (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) \mathbf{x}(0).$$

由式(6)可知: 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\mathbf{e}(k)\|_2 \sim \mathcal{O}(r^k)$. 注意到, 采样点 k 对应时间 $t = k\tau$, 在时间 t 下的误差满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\|_2 \sim \mathcal{O}(r^{t/\tau})$. 收敛速度受收敛率 r 和采样周期 τ 的影响. 只要 $r < 1$, 减小采样周期便会使收敛速度加快. 若 $\tau \rightarrow 0$, 则收敛速度理论上可以达到任意快. 文献[23]研究了连续时间高阶系统的收敛速度, 表明可以对闭环系统进行极点配置以达到任意快的收敛速度.

注 3 智能体最终达到的是一类动态的一致性. 如二阶系统的最终速度信息达到了初始速度的平均, 位置信息最终是以初始速度的平均为斜率、初始位置的平均为截距的一条直线. 此外, 可以设置第 $l+1$ 阶及其以后的初始状态平均为零, 即 $\sum_{i=1}^N x_i^{(m)}(0) = 0, m \in \{l+1, \dots, n\}$, 使得系统达到第 l 阶状态的平均一致性.

2.2 二阶系统的优化设计

在系统(1)中令 $n = 2$, 在本小节对此二阶多智能体系统的收敛率进行优化设计.

设 H_i 的特征多项式为 $h_i(z) = \det(zI - H_i), i \in \{2, 3, \dots, N\}$, 可以计算得到

$$h_i(z) = z^2 + (\lambda_i \tau K_2 - 2)z + 1 + \lambda_i \tau^2 K_1 - \lambda_i \tau K_2 = 0. \quad (12)$$

引理1 考虑无向连通图 \mathcal{G} 上的二阶多智能体系统(1), 采取控制协议(4), 令 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 为图拉普拉斯矩阵的特征值, 当且仅当

$$\begin{cases} \tau K_1 - K_2 < 0, \\ \lambda_2 \tau^2 K_1 - 2\lambda_2 \tau K_2 + 4 > 0, \\ \lambda_N \tau^2 K_1 - 2\lambda_N \tau K_2 + 4 > 0 \end{cases} \quad (13)$$

成立, 系统可以达到渐近一致性.

证明 在式(12)中, 令 $z = \frac{w+1}{w-1}$. 经过双线性变换, 得到 w 的二次多项式为

$$\tilde{h}_i(w) = \lambda_i \tau^2 K_1 w^2 + 2\lambda_i \tau (K_2 - \tau K_1) w + 4 + \lambda_i \tau^2 K_1 - 2\lambda_i \tau K_2 = 0. \quad (14)$$

由劳斯稳定判据得到式(14)稳定的充要条件为

$$\begin{cases} \tau K_1 - K_2 < 0, \\ \lambda_i \tau^2 K_1 - 2\lambda_i \tau K_2 + 4 > 0. \end{cases} \quad (15)$$

由于 $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_N$, 不等式(15)等价于(13). 因此, 当且仅当不等式组(13)成立, 系统可以达到渐近一致性. \square

在引理1所示的一致性区间内, 定理2给出最小的渐近收敛率 r 及其对应的最优控制增益.

定理2 考虑无向连通图 \mathcal{G} 上的二阶多智能体系统(1), 采取控制协议(4), 系统达到渐近一致性的最优收敛率为

$$r^* = \sqrt{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}}. \quad (16)$$

对应的最优控制增益为

$$\begin{aligned} K_1^* &= \frac{2\lambda_2}{\tau^2(\lambda_2 + \lambda_N)\lambda_N}, \\ K_2^* &= \frac{2}{\lambda_N \tau}. \end{aligned} \quad (17)$$

证明 在式(12)中, 令 $z = r \frac{w+1}{w-1}$, 得到

$$b_0(\lambda_i)w^2 + b_1(\lambda_i)w + b_2(\lambda_i) = 0. \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} b_0(\lambda_i) &= r^2 + (\lambda_i \tau K_2 - 2)r + 1 + \lambda_i \tau^2 K_1 - \lambda_i \tau K_2, \\ b_1(\lambda_i) &= 2r^2 - 2(1 + \lambda_i \tau^2 K_1 - \lambda_i \tau K_2), \\ b_2(\lambda_i) &= r^2 - (\lambda_i \tau K_2 - 2)r + 1 + \lambda_i \tau^2 K_1 - \lambda_i \tau K_2. \end{aligned} \quad (19)$$

基于劳斯判据, 将二阶系统的加速收敛问题转化为优化问题

$$\min_{K_1, K_2} r;$$

$$\text{s.t. } b_0(\lambda_i) \geq 0, b_1(\lambda_i) \geq 0, b_2(\lambda_i) \geq 0,$$

$$\lambda_i \in \{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N\}. \quad (20)$$

考虑 $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_N$, 对式(20)中的约束进行不等式等效变换, 得到

$$\begin{aligned} \tau K_1 - (1-r)K_2 + \frac{(1-r)^2}{\lambda_N \tau} &\geq 0, \\ -2\tau K_1 + 2K_2 - \frac{2-2r^2}{\lambda_2 \tau} &\geq 0, \\ \tau K_1 - (1+r)K_2 + \frac{(1+r)^2}{\lambda_N \tau} &\geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)中3个不等式相加, 得到

$$\frac{1+r^2}{\lambda_N \tau} - \frac{1-r^2}{\lambda_2 \tau} \geq 0. \quad (22)$$

最后由式(22)得到最优收敛率的下界为

$$r \geq \sqrt{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}}, \quad (23)$$

当且仅当

$$\begin{cases} \tau K_1 - (1-r)K_2 + \frac{(1-r)^2}{\lambda_N \tau} = 0, \\ -\tau K_1 + K_2 - \frac{1-r^2}{\lambda_2 \tau} = 0, \\ \tau K_1 - (1+r)K_2 + \frac{(1+r)^2}{\lambda_N \tau} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

成立, 取得最优收敛率(16)和最优控制增益(17). \square

2.3 三阶系统的优化设计

在系统(1)中令 $n = 3$, 在本小节对此三阶多智能体系统的收敛率进行优化设计.

H_i 的特征方程如下:

$$z^3 + (\lambda_i \tau K_3 - 3)z^2 + (3 - 2\lambda_i \tau K_3 + \lambda_i \tau^2 K_2)z - 1 + \lambda_i \tau K_3 - \lambda_i \tau^2 K_2 + \lambda_i \tau^3 K_1 = 0. \quad (25)$$

在式(25)中, 令 $z = r \frac{w+1}{w-1}$, 得到

$$c_0(\lambda_i)w^3 + c_1(\lambda_i)w^2 + c_2(\lambda_i)w + c_3(\lambda_i) = 0. \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} c_0(\lambda_i) &= r^3 - d_1(\lambda_i)r^2 + d_2(\lambda_i)r + d_3(\lambda_i), \\ c_1(\lambda_i) &= 3r^3 - d_1(\lambda_i)r^2 - d_2(\lambda_i)r - 3d_3(\lambda_i), \\ c_2(\lambda_i) &= 3r^3 + d_1(\lambda_i)r^2 - d_2(\lambda_i)r + 3d_3(\lambda_i), \\ c_3(\lambda_i) &= r^3 + d_1(\lambda_i)r^2 + d_2(\lambda_i)r - d_3(\lambda_i). \end{aligned} \quad (27)$$

这里

$$\begin{aligned} d_1(\lambda_i) &= 3 - \lambda_i \tau K_3, \\ d_2(\lambda_i) &= 3 - 2\lambda_i \tau K_3 + \lambda_i \tau^2 K_2, \\ d_3(\lambda_i) &= \lambda_i \tau K_3 - \lambda_i \tau^2 K_2 + \lambda_i \tau^3 K_1 - 1. \end{aligned}$$

根据劳斯判据, 将三阶系统的快速一致问题转化为如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{K_1, K_2, K_3} r; \\ & \text{s.t. } c_0(\lambda_i) \geq 0, c_1(\lambda_i) \geq 0, c_2(\lambda_i) \geq 0, c_3(\lambda_i) \geq 0, \\ & \quad c_{21}(\lambda_i) \geq 0, \lambda_i \in \{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N\}. \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$c_{21}(\lambda_i) = r^6 - d_2(\lambda_i)r^4 - d_1(\lambda_i)d_3(\lambda_i)r^2 - [d_3(\lambda_i)]^2.$$

此优化问题有 $5(N-1)$ 个约束, 而且要预知图拉普拉斯矩阵的所有特征值. 下面首先对优化问题(28)中的约束进行等效变换.

引理 2 优化问题(28)等价于如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{K_1, K_2, K_3} r; \\ & \text{s.t. } c_0(\lambda_2) \geq 0, c_1(\lambda_N) \geq 0, c_2(\lambda_2) \geq 0, \\ & \quad c_3(\lambda_N) \geq 0, c_{21}(\lambda_2) \geq 0, c_{21}(\lambda_N) \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

证明 式(28)中约束 $c_0(\lambda_i) \geq 0, c_1(\lambda_i) \geq 0, c_2(\lambda_i) \geq 0, c_3(\lambda_i) \geq 0$ 均为关于 λ_i 的线性不等式. 根据 $\lambda_2 \leq \lambda_i \leq \lambda_N$, 4 个线性不等式成立, 当且仅当

$$\begin{aligned} & K_1 + \frac{(r-1)}{\tau}K_2 + \frac{r^2-2r+1}{\tau^2}K_3 \geq -\frac{(r-1)^3}{\lambda_2}, \\ & -3K_1 + \frac{(3-r)}{\tau}K_2 + \frac{r^2+2r-3}{\tau^2}K_3 \geq \\ & \quad -\frac{3(r-1)^2(r+1)}{\lambda_N}, \\ & 3K_1 - \frac{(3+r)}{\tau}K_2 - \frac{r^2-2r-3}{\tau^2}K_3 \geq \\ & \quad -\frac{3(r-1)(r+1)^2}{\lambda_2}, \\ & -K_1 + \frac{(r+1)}{\tau}K_2 - \frac{r^2+2r+1}{\tau^2}K_3 \geq \\ & \quad -\frac{(r+1)^3}{\lambda_N}. \end{aligned} \quad (30)$$

即 $c_0(\lambda_2) \geq 0, c_1(\lambda_N) \geq 0, c_2(\lambda_2) \geq 0, c_3(\lambda_N) \geq 0$.

下面考虑一个二次函数, 即

$$f(\lambda) = p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3, \quad 0 < \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_N.$$

若 $p_3 < 0$, 则不等式 $f(\lambda) \geq 0$ 等价于

$$\begin{cases} p_1\lambda_2^2 + p_2\lambda_2 + p_3 \geq 0, \\ p_1\lambda_N^2 + p_2\lambda_N + p_3 \geq 0. \end{cases}$$

不等式约束 $c_{21}(\lambda_i) \geq 0$ 可写为关于 λ_i 的二次形式

$$p_1\lambda_i^2 + p_2\lambda_i + p_3 \geq 0, \quad (31)$$

其中 $p_3 = (r^2 - 1)^3 < 0$. 因此, $c_{21}(\lambda_i) \geq 0$ 恒成立, 当且仅当 $c_{21}(\lambda_2) \geq 0, c_{21}(\lambda_N) \geq 0$. 综上, 优化问题(28)等价于优化问题(29). \square

定理 3 考虑无向连通图 G 上的三阶多智能体

系统(1), 采取控制协议(4), 系统达到一致性的最优收敛率为

$$r^* = \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2} \right)^{1/3}, \quad (32)$$

对应的最优控制增益为

$$\begin{aligned} K_1^* &= \frac{1}{\tau^3} \left(\frac{2}{\lambda_2 + \lambda_N} - \tau K_3^* + \tau^2 K_2^* \right), \\ K_2^* &= \frac{1}{\lambda_2 \tau^2} (3r^* - \lambda_2 \tau K_3^* r^* + 2\lambda_2 \tau K_3^* - 3), \\ K_3^* &= \frac{1}{2\lambda_2 \lambda_N \tau r^*} [3(\lambda_2 + \lambda_N)r^* - 3(\lambda_N - \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (33)$$

证明 将式(30)中的 4 个不等式相加, 得到

$$\frac{r^3 - 1}{\lambda_2 \tau^3} + \frac{r^3 + 1}{\lambda_N \tau^3} \geq 0. \quad (34)$$

由式(34)得到收敛率的下界为

$$r \geq \left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2} \right)^{1/3}, \quad (35)$$

当且仅当

$$\begin{aligned} c_0(\lambda_2) &= 0, c_1(\lambda_N) = 0, c_2(\lambda_2) = 0, \\ c_3(\lambda_N) &= 0, c_{21}(\lambda_2) = 0, c_{21}(\lambda_N) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

取到最优收敛率(32). 对应的最优控制增益(33)由解方程组(36)得到. \square

注 4 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|_2 \sim O(r^{t/\tau})$ 可知, 在收敛率为 r^* 的情况下, 采样周期 τ 越小, 系统达到一致性的收敛速度越快. 若采样周期 $\tau \rightarrow 0$, 则系统在理论上达到任意快的收敛速度. 二阶和三阶系统的最优控制增益表达式与 τ 相关. 若 $\tau \rightarrow 0$, 通信是无限带宽的, 则最优控制增益的值趋向无穷大.

注 5 若固定采样周期 τ , 则二阶和三阶多智能体系统在对应控制协议下的最优渐近收敛率 r^* 与特征比率 λ_2/λ_N 有关. λ_2/λ_N 越大, 意味着拓扑结构的连通性越好, 一致性收敛速度越快. 当 $\lambda_2 = \lambda_N$ 时, 网络为全连通, 一步即可求得平均; 当 $\lambda_2 = 0$ 时, 图拉普拉斯矩阵至少有 2 个零特征根, 网络不连通, 此时无法达到一致.

注 6 文献[13]采用了半正定规划得到了一阶离散时间多智能体系统的最优收敛率 $\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}$. 文献[24]通过对系统矩阵特征根的实部和虚部进行分类讨论, 得到了与文中相同的二阶系统最优收敛率 $\sqrt{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}}$. 本文基于劳斯判据设计收敛率的优化问题, 得到三阶最优收敛率 $\sqrt[3]{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}}$. 对于 n 阶系统, 文献[25]从状态空间模型和 Riccati 方程出发, 证明了最优收敛率为 $\left(\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}\right)^{1/n}$. 系统阶次越高, 达到一致的状态信息便越多, 收敛速度越慢.

注 7 由于得到了二阶和三阶系统最优控制增益的解析解, 所设计的控制器在实际应用中易于实

现. 对于一个已知的网络, 可以得到图拉普拉斯矩阵的特征值. 直接应用 τ 、 λ_2 和 λ_N 即可求得最优控制增益 (17) 和 (33). 在实际应用中, 许多网络的规模庞大, 通常难以获得图拉普拉斯矩阵精确的特征值. 然而, 在图论中已有代数方法可以有效地估计 λ_2 和 λ_N , 使得 $[\lambda_2, \lambda_N] \subseteq [\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_N]$. 定义最坏情况的最优收敛率 $\gamma^* = \max_{\lambda \in [\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_N]} \rho(A - \lambda BK)$. 此时, 可以应用代数连通性的下界 $\hat{\lambda}_2$ 和图拉普拉斯矩阵谱半径的上界 $\hat{\lambda}_N$ 进行控制增益的设计, 得到最坏情况的最优收敛率 $\gamma^* = \left(\frac{\hat{\lambda}_N - \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_N + \hat{\lambda}_2} \right)^{1/n}$, $n=2, 3$.

3 仿真实验

本节给出4个仿真实验用于验证所得理论的有效性和正确性.

实验1 验证二阶系统最优控制策略的有效性. 考虑在控制协议(4)下的二阶多智能体系统(1), 设 $\lambda_2 = 0.5, \lambda_N = 8.5, \tau = 0.05$. 根据定理2可以计算得到, $r^* = 0.9428, K_1^* = 5.2288, K_2^* = 4.7059$. 由式(13)得到一致性区间, 如图1所示. 图1还展示了不同收敛率 r 对应的控制参数的范围. 随着 r 不断减小, 对应的控制参数可选范围也不断缩小, 最终收敛至点 (K_1^*, K_2^*) , 对应的收敛率为 $r = r^*$.

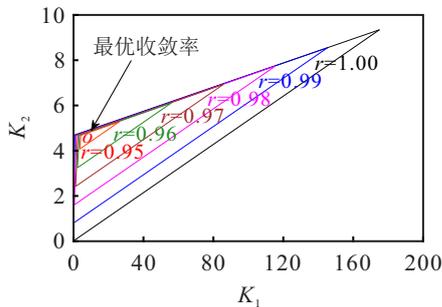


图1 一致性区间

下面验证特征比率 λ_2/λ_N 在实际收敛中的影响. 考虑如下3个节点数为8的网络: 路径图 \mathcal{G}_1 、环状图 \mathcal{G}_2 、随机生成的小世界网络图 \mathcal{G}_3 (如图2所示). 设采样周期 $\tau = 0.05$. 由式(17)分别求得对应的控制增益为 $\{K_1^* = 7.9110, K_2^* = 10.3956\}_{\mathcal{G}_1}, \{K_1^* = 25.5484, K_2^* = 10\}_{\mathcal{G}_2}, \{K_1^* = 13.7136, K_2^* = 6.7602\}_{\mathcal{G}_3}$. 表1列

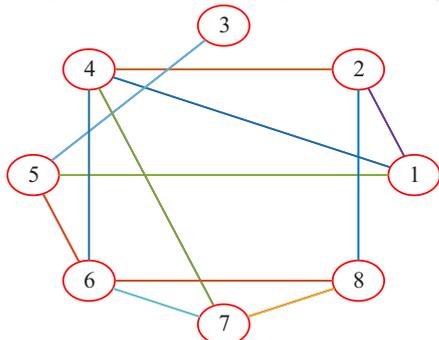


图2 小世界网络 \mathcal{G}_3

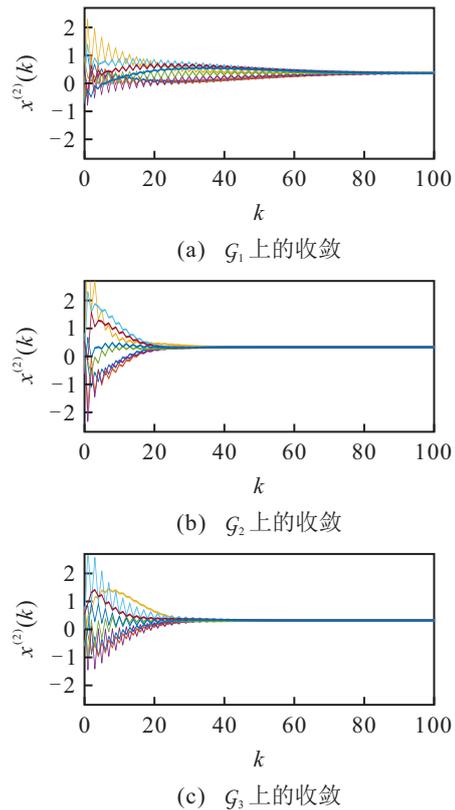


图3 二阶系统分别在 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ 上的最优收敛

表1 特征比率与收敛率

网络拓扑	\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2	\mathcal{G}_3
特征比率 λ_2/λ_N	0.0396	0.1464	0.1129
二阶最优收敛率 r_2^*	0.9612	0.8629	0.8928
三阶最优收敛率 r_3^*	0.9740	0.9063	0.9272

出了在3个拓扑图下的特征比率 λ_2/λ_N 和最优收敛率 r_2^* . 由表1可见, 特征比率越大, 二阶系统的最优一致性收敛率越小, 收敛速度越快. 在 $[-1, 1]$ 中随机生成智能体的初始状态, 二阶多智能体系统实际收敛情况如图3所示. 由图3可见, λ_2/λ_N 的值越大, 二阶系统越快地达到一致性, 此结果与理论分析一致. 二阶多智能体系统最终的一致性状态为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{1}_N \otimes [0.0179k + 0.0790, 0.3588]^T$.

实验2 验证三阶系统最优控制策略的有效性. 考虑在控制协议(4)下的三阶多智能体系统(1), 设 $\lambda_2 = 0.5, \lambda_N = 8.5, \tau = 0.05$. 根据定理3, 计算得到三阶最优收敛率 $r^* = 0.9615$ 以及最优控制增益 $K_1^* = 3.6481, K_2^* = 7.2462, K_3^* = 4.7976$. 将 K_1^*, K_2^*, K_3^* 代入式(25)获得零点 $z(\lambda_i)$ 的分布. 通过计算求得 $z(\lambda_2) = \{0.9615, 0.9593 \pm 0.0653i\}, z(\lambda_N) = \{-0.9615, 0.9613 \pm 0.0218i\}$, 它们恰好分布在半径为 r^* 的圆上, 其余的根均在圆内.

下面对比不同的特征比率 λ_2/λ_N 在实际收敛中的影响, 采用的网络与实验1相同. 设采样周期 $\tau = 0.05$. 由式(33)求得控制增益分别为 $\{K_1^* = 3.7100,$

$K_2^* = 10.8269, K_3^* = 10.5321\}_{\mathcal{G}_1}, \{K_1^* = 44.5580, K_2^* = 37.4338, K_3^* = 10.4829\}_{\mathcal{G}_2}, \{K_1^* = 18.3985, K_2^* = 19.6733, K_3^* = 7.0122\}_{\mathcal{G}_3}$. 表1列出了三阶系统在 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ 上的最优收敛率 r_3^* . 由表1可见, 特征比率越大, 三阶系统的最优一致性收敛率越小, 收敛速度越快. 在 $[-10, 10]$ 中随机生成智能体的初始状态, 三阶多智能体系统实际收敛情况如图4所示. 由图4可见, λ_2/λ_N 的值越大, 三阶系统越快地达到一致性, 此结果与理论分析一致. 三阶多智能体系统最终的一致性状态为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{1}_N \otimes [1.9990 + 0.1720k + 0.0041k^2, 3.5229 + 0.1621k, 3.2411]^T$.

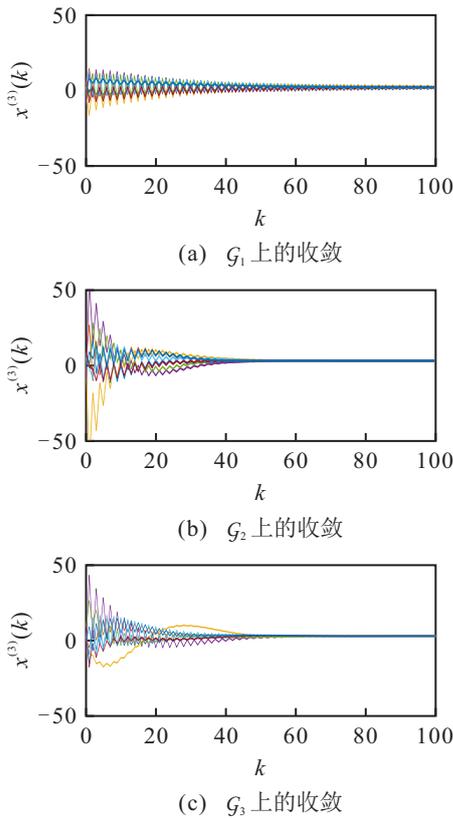


图4 三阶系统分别在 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ 上的最优收敛

实验3 比较一阶、二阶和三阶系统在最优控制策略下的收敛速度. 随机生成一个节点为20的小世界网络 \mathcal{G}_4 , 如图5所示, 其中 $\lambda_2 = 0.7149, \lambda_{20} = 7.8258$. 考虑在该网络上的一阶、二阶和三阶系统, 可知一阶最优收敛率 $r_1^* = \frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2} = 0.8326$, 二阶最优收敛率 $r_2^* = \sqrt{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}} = 0.9125$, 三阶最优收敛率 $r_3^* = \sqrt[3]{\frac{\lambda_N - \lambda_2}{\lambda_N + \lambda_2}} = 0.9408$. 设置 $\tau = 0.05$. 为便于观察比较收敛速度, 令 $\sum_{i=1}^N x_i^{(2)}(0) = 0$ 和 $\sum_{i=1}^N x_i^{(3)}(0) = 0$, 使得3个系统均达到位置信息的平均一致性. 对3个系统均采取各自最优的控制增益(如表2所示). 在 $[0, 10]$ 中随机生成智能体的初始位置信息, 系统的实际收敛情况如图6所示. 仿真结果与理论分析相吻

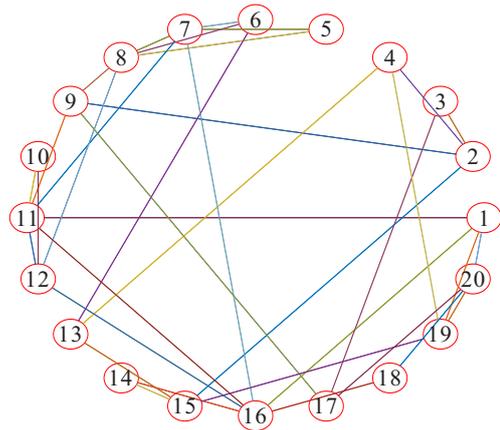


图5 小世界网络 \mathcal{G}_4

表2 最优控制增益与收敛率

多智能体系统阶次	一阶 ^[13]	二阶	三阶
最优收敛率	0.8326	0.9125	0.9408
K_1^*	0.2342	8.5568	9.2815
K_2^*	N/A	5.1113	12.1087
K_3^*	N/A	N/A	5.2657

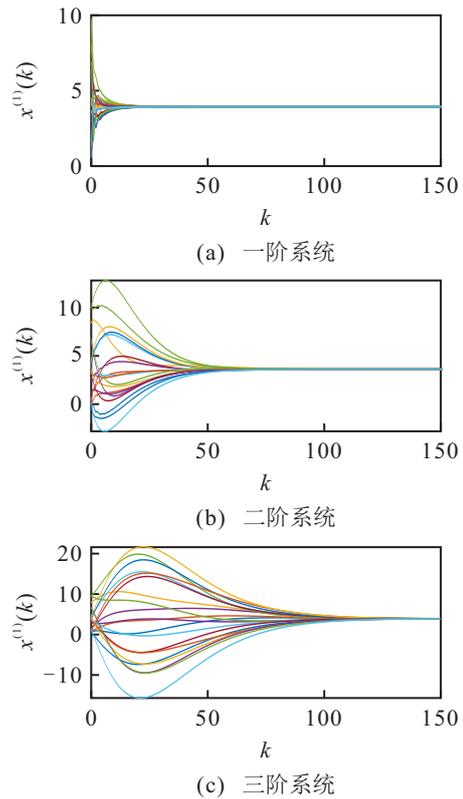


图6 一阶、二阶和三阶系统的最优收敛

合: 更高阶的多智能体系统达到一致性所需要的状态信息更多, 收敛得更慢.

实验4 验证最优控制策略在大规模网络中的有效性. 构建一个节点为100的小世界网络模型, 设置重连概率 $p = 0.6$. 应用该网络模型随机生成一个 $[\lambda_2, \lambda_N] \subseteq [0.5, 9.5]$ 的无向连通图 \mathcal{G}_L , 如图7所示. 设置 $\tau = 0.05$, 由式(32)和(33)分别求得三阶系统最坏情况的最优收敛率 $\gamma^* = 0.9655$ 和对应的控制增益

$K_1 = 2.6281, K_2 = 5.8117, K_3 = 4.2840$. 在 $[-4, 6]$ 中随机生成智能体的初始状态,图8为三阶系统在此最坏情况最优控制策略下的收敛情况. 下面随机生成80个 $[\lambda_2, \lambda_N] \subseteq [0.5, 9.5]$ 的无向连通图. 图9为三阶系统在80个图上的最优收敛率 r^* . 由图8和图9可见,最坏情况的最优控制策略在网络拓扑未知的情况下得到了快速一致性收敛.

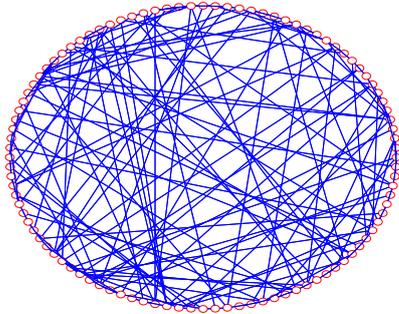


图7 大规模网络 G_C

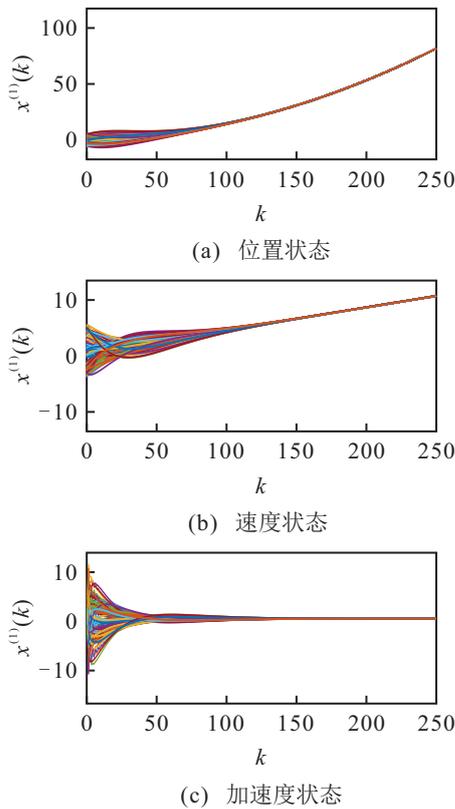


图8 三阶系统在 G_C 上的收敛性

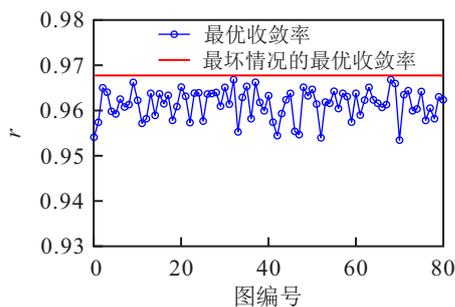


图9 80个随机图上的最优收敛率

4 结论

本文研究了离散时间二阶和三阶多智能体系统的一致性和收敛率. 首先,采取了一个定常的控制协议使得系统达到渐近一致性;然后,在给出多智能体系统达到一致性的充要条件后,针对二阶和三阶系统分别设计了优化问题以达到快速一致性收敛,其中优化问题的约束由劳斯判据给出;最后,利用优化问题约束中不等式的性质求得最优收敛率以及控制增益的解析解. 仿真结果验证了上述结论的正确性.

参考文献(References)

- [1] 张强, 张纪峰. 多自主体系统的分布式估计与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 1-166.
(Zhang Q, Zhang J F. Distributed estimation and control of multi-agent systems[M]. Beijing: Science Press, 2015: 1-166.)
- [2] 虞文武, 温广辉, 陈关荣. 多智能体系统分布式协同控制[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016: 1-242.
(Yu W W, Wen G H, Chen G R. Distributed cooperative control of multi-agent systems[M]. Beijing: Higher Education Press, 2016: 1-242.)
- [3] 王崇骏, 史忠植, 常亮, 等. 多智能体系统及应用(卷二)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018: 1-216.
(Wang C J, Shi Z Z, Chang L, et al. Multi-agent systems and applications (volume 2)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2018: 1-216.)
- [4] 陈杰, 方浩, 辛斌. 多智能体系统的协同群集运动控制[M]. 北京: 科学出版社, 2020: 1-228.
(Chen J, Fang H, Xin B. Cooperative swarm motion control of multi-agent systems[M]. Beijing: Science Press, 2020: 1-228.)
- [5] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [6] Cao Y C, Yu W W, Ren W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 427-438.
- [7] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [8] Chen Y Y, Shi Y. Consensus for linear multiagent systems with time-varying delays: A frequency domain perspective[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2143-2150.
- [9] Prakash M, Talukdar S, Attree S, et al. Distributed stopping criterion for consensus in the presence of delays[J]. IEEE Transactions on Control of Network

- Systems, 2020, 7(1): 85-95.
- [10] Bernuau E, Moulay E, Coirault P, et al. Practical consensus of homogeneous sampled-data multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4691-4697.
- [11] 李韬, 孟扬, 张纪峰. 多自主体量化趋同与有限数据率趋同综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(11): 1805-1811. (Li T, Meng Y, Zhang J F. An overview on quantized consensus and consensus with limited data rate of multi-agent systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(11): 1805-1811.)
- [12] Wang W, Long J, Wen C Y, et al. Recent advances in distributed adaptive consensus control of uncertain nonlinear multi-agent systems[J]. Journal of Control and Decision, 2020, 7(1): 44-63.
- [13] Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging[J]. Systems & Control Letters, 2004, 53(1): 65-78.
- [14] Sarlette A. Adding a single state memory optimally accelerates symmetric linear maps[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(11): 3533-3538.
- [15] Montijano E, Montijano J I, Sagues C. Chebyshev polynomials in distributed consensus applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(3): 693-706.
- [16] Yi J W, Chai L, Zhang J X. Average consensus by graph filtering: New approach, explicit convergence rate, and optimal design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(1): 191-206.
- [17] He W, Cao J. Consensus control for high-order multi-agent systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(1): 231.
- [18] Yu W W, Chen G R, Ren W, et al. Distributed higher order consensus protocols in multiagent dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(8): 1924-1932.
- [19] Rezaee H, Abdollahi F. Average consensus over high-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(11): 3047-3052.
- [20] Abdessameud A, Tayebi A. Distributed consensus algorithms for a class of high-order multi-agent systems on directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(10): 3464-3470.
- [21] Zhu J D. On consensus speed of multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 434(1): 294-306.
- [22] Eichler A, Werner H. Closed-form solution for optimal convergence speed of multi-agent systems with discrete-time double-integrator dynamics for fixed weight ratios[J]. Systems & Control Letters, 2014, 71: 7-13.
- [23] Parlangeli G, Valcher M E. Accelerating consensus in high-order leader-follower networks[J]. IEEE Control Systems Letters, 2018, 2(3): 381-386.
- [24] You K Y, Xie L H. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(10): 2262-2275.
- [25] Li L, Fu M Y, Zhang H S, et al. Consensus control for a network of high order continuous-time agents with communication delays[J]. Automatica, 2018, 89: 144-150.
- [26] Lu P F, Yu W W, Chen G R, et al. Leaderless consensus of ring-networked mobile robots via distributed saturated control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(12): 10723-10731.
- [27] Liao F, Teo R, Wang J L, et al. Distributed formation and reconfiguration control of VTOL UAVs[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 25(1): 270-277.
- [28] Zheng M, Liu C L, Liu F. Average-consensus tracking of sensor network via distributed coordination control of heterogeneous multi-agent systems[J]. IEEE Control Systems Letters, 2019, 3(1): 132-137.
- [29] Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(5): 1263-1268.

作者简介

戴家浩(1996—), 男, 博士生, 从事多智能体系统分布式优化的研究, E-mail: jiahaodai96@163.com;

易静文(1988—), 女, 副教授, 博士, 从事复杂多智能体网络分析与控制、图信号处理等研究, E-mail: yijingwen@wust.edu.cn;

柴利(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事滤波器组框架理论、多采样率信号处理、网络控制理论及应用等研究, E-mail: chaili@wust.edu.cn.

(责任编辑: 魏冰)