

# 控制与决策

Control and Decision

## 周期离散时间系统的预见控制器设计

李丽, 任祯琴, 于晓

引用本文:

李丽, 任祯琴, 于晓. 周期离散时间系统的预见控制器设计[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2585–2592.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1485>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 不确定离散时间系统的有限时间预见跟踪控制

Finite-time preview tracking control for uncertain discrete-time systems

控制与决策. 2022, 37(3): 753–762 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1065>

#### 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

#### 时变参数不确定离散时间系统的预见控制

Preview control for discrete-time polytopic time-varying systems

控制与决策. 2021, 36(12): 3074–3082 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0373>

#### 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599–608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

#### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 周期离散时间系统的预见控制器设计

李 丽<sup>1,4</sup>, 任祯琴<sup>2†</sup>, 于 晓<sup>3</sup>

(1. 湖北经济学院 信息管理与统计学院, 武汉 430205; 2. 洛阳师范学院 信息技术学院, 河南 洛阳 471934;  
3. 山东建筑大学 理学院, 济南 250101; 4. 湖北经济学院 湖北数据与分析中心, 武汉 430205)

**摘要:** 对于一类线性周期离散时间系统, 提出一种新的周期预见控制器的设计方法. 首先, 利用二维模型方法及系数矩阵的周期性特点, 将系统状态与其稳态值之差代替通常的状态差分, 成功地构造出原系统的二维(2D)扩大误差系统; 然后, 针对导出的扩大误差系统, 结合 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 方法, 给出闭环系统渐近稳定的条件及预见控制器的设计方法; 最后, 通过数值仿真说明该方法的有效性.

**关键词:** 扩大误差系统; 周期系统; 二维系统; 预见跟踪控制; 输出反馈; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1485

引用格式: 李丽, 任祯琴, 于晓. 周期离散时间系统的预见控制器设计[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2585-2592.

## Design of preview controller for periodic discrete-time systems

LI Li<sup>1,4</sup>, REN Zhen-qin<sup>2†</sup>, YU Xiao<sup>3</sup>

(1. School of Information Management and Statistics, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China; 2. School of Information Technology, Luoyang Normal University, Luoyang 471934, China; 3. School of Science, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China; 4. Hubei Data and Analysis Center, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China)

**Abstract:** This paper presents a new periodic preview controller design method for a class of linear periodic discrete-time systems. Firstly, the difference between the system state and its steady-state value is substituted for the normal state difference, and the two-dimensional augmented error system of the original system is constructed successfully using a two-dimensional (2D)-based approach and the periodicity of system matrices. Then, for the augmented error system, based on the Lyapunov stability theory and the LMI method, sufficient conditions for the close-loop system to be stable and the design of a periodic controller with preview actions are proposed. Finally, numerical simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** augmented error system; periodic system; two dimensional systems; preview tracking control; output feedback; LMI

## 0 引言

预见控制是一种利用参考信号或外部干扰的未来信息改善闭环系统的瞬态响应的技术<sup>[1-2]</sup>. 预见控制理论是 Sheridan 在 1966 年提出的<sup>[3]</sup>. 早期的预见控制器的设计问题其实是最优化问题, 其设计方法是先构造预见控制理论中所谓的“误差系统”, 将原系统的预见控制问题转化为误差系统的调节问题, 然后基于线性二次型(LQ)最优控制理论, 设计最优预见控制器. 之后, 基于 LQ 最优控制框架下的预见控制理论进一步被推广到线性广义系统<sup>[4]</sup>、多智能体系统<sup>[5-6]</sup>、连续随机系统<sup>[7]</sup>等. 不过, 线性二次型(LQ)最

优化设计方法并未考虑到未知干扰或系统模型自身的误差所引发的不确定性. 为此, 相关学者将预见控制器的设计求解转向了其他的控制理论, 如博弈论、鲁棒 LQ/ $H_\infty$  控制理论, 见文献[8-11]. 需要指出的是, 文献[4-11]中的预见控制器的存在取决于 Riccati 方程的半正定解. 如文献[12]所述, 基于 Riccati 方程的设计方法并不适用于凸多面体不确定系统. 为了克服这些缺陷, 文献[13-15]结合差分算法和线性矩阵不等式技术研究了参数不确定离散时间系统的鲁棒预见控制器设计问题.

在本文中, 考虑周期离散时间系统的预见控制器

收稿日期: 2020-10-28; 录用日期: 2021-07-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61903130); 山东省自然科学基金项目(ZR2020QA036); 湖北省教育厅科研重点项目(D20192202); 湖北经济学院科研培育项目(PYZD202005, PYYB202007).

†通讯作者. E-mail: renzhenqin619@soho.com.

的设计问题. 根据系统的周期特性, 利用系统状态变量与其稳态值之差代替通常的状态差分, 将原系统的预见跟踪控制问题转化为扩大误差系统的镇定问题. 然后针对所导出的扩大误差系统, 结合 Lyapunov 稳定性理论与 LMI 方法, 给出保证闭环系统渐近稳定的条件及预见控制器的设计方法. 需要指出的是, 目前关于周期系统的预见控制的研究很少, 如文献 [16-17]. 与文献 [16-17] 相比, 本文提出一种新的扩大误差系统的构造方法, 该方法使得扩大误差系统的维数与系数矩阵的周期无关, 得到维数较低的增广系统.

**注1** 本文中:  $R^n$ 、 $R^{n \times m}$  分别表示  $n$ -维实向量和  $n \times m$  矩阵,  $P > 0 (< 0)$  表示  $P$  是正定(负定)的,  $\text{diag}\{\dots\}$  表示块对角矩阵,  $*$  表示对称位置的转置元素,  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置,  $\text{sym}(A)$  表示  $A + A^T$ ,  $I$  和  $0$  分别表示适当维数的单位矩阵和零矩阵.

### 1 问题描述及基本假设

考虑如下周期离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in R^n$  是状态向量;  $u(k) \in R^l$  是控制输入;  $y(k) \in R^l$  是控制输出;  $A(k)$ 、 $B(k)$ 、 $C(k)$  是适当维数的  $N$ -周期矩阵, 即

$$\begin{aligned} A(k+N) &= A(k), \quad B(k+N) = B(k), \\ C(k+N) &= C(k). \end{aligned} \quad (2)$$

构造如下矩阵:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & & A(0) \\ 0 & \dots & 0 & & A(1)A(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A(N-1) & \dots & A(2)A(1)A(0) \end{bmatrix} \in R^{(N \times n) \times (N \times n)}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} B(0) & & 0 \\ A(1)B(0) & & B(1) \\ \vdots & & \vdots \\ A(N-1) \dots A(1)B(0) & A(N-1) \dots A(2)B(1) \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dots & B(N-1) \end{bmatrix} \rightarrow \leftarrow \in R^{(N \times n) \times (N \times l)}, \end{aligned}$$

$$H = \text{diag}\{\underbrace{C(1), C(2), \dots, C(N-1), C(0)}_N\} \in R^{(N \times l) \times (N \times n)}.$$

针对系统(1), 给出如下假设:

**假设1**  $\begin{bmatrix} \Phi - I_{(Nn)} & \Gamma \\ H & 0_{(Nl) \times (Nl)} \end{bmatrix}$  是可逆的.

**假设2** 目标信号是可预见的, 预见步数为  $M_R$ , 即在当前时刻  $k$ ,  $r(k+1)$ ,  $r(k+2)$ ,  $\dots$ ,  $r(k+M_R)$  是已知的, 并假设  $M_R$  步之后目标值为常量

$$r(k+j) = r, \quad j = M_R + 1, M_R + 2, M_R + 3, \dots,$$

其中  $\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = r$ .

**注2** 假设1和假设2是推导扩大误差系统所需要的标准假设. 假设1可以保证当闭环系统实现目标跟踪时, 稳态值  $x^*$  和  $u^*$  的存在. 假设2表明只有一段时间的可预见信号对系统的性能有较明显的影响, 因此无需关心在可预见步数以外的目标值信号的值, 可认为它是任何常数.

本文的目的是设计一个预见控制器, 使得系统的输出跟踪参考信号, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0, \quad (3)$$

其中  $e(k) = y(k) - r(k)$ .

### 2 构造2D扩大误差系统

在本节中, 通过2D模型的方法和预见控制理论中的误差系统技术, 推导出原系统的2D扩大误差系统.

令  $k = pN + q$ . 其中:  $p$  是离散时间变量且属于集合  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $q$  是离散时间变量且属于集合  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ . 对于任意变量

$$\xi(k) = \xi(pN + q) = \xi(p, q), \quad (4)$$

由式(1)和(4)可得

$$\begin{cases} x(p, q+1) = A(q)x(p, q) + B(q)u(p, q), \\ y(p, q) = C(q)x(p, q). \end{cases} \quad (5)$$

根据系统矩阵的周期性(即式(2))易得  $A(p, q) = A(q)$ ,  $B(p, q) = B(q)$  和  $C(p, q) = C(q)$ , 从而系统(1)的二维模型描述为式(5).

在假设1和假设2下, 存在常向量  $x_q^*$  和  $u_q^*$ . 在系统方程和输出方程两边令  $p \rightarrow \infty$  得到

$$\begin{aligned} x_{q+1}^* &= A(q)x_q^* + B(q)u_q^*, \quad r = C(q)x_q^*, \\ x_N^* &= x_0^*, \quad q = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

基于文献[18]可知,  $x_q^*$  和  $u_q^*(q = 0, 1, \dots, N-1)$

满足下式:

$$\begin{bmatrix} \Phi - I_{Nn} & \Gamma \\ H & 0_{(Nl) \times (Nl)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(N \times n) \times l} \\ \hat{I} \end{bmatrix} r. \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} x^* &= [x_1^{*T} \ x_2^{*T} \ x_3^{*T} \ \dots \ x_0^{*T}]^T, \\ u^* &= [u_0^{*T} \ u_1^{*T} \ u_2^{*T} \ \dots \ u_{N-1}^{*T}]^T, \\ \hat{I} &= \underbrace{[I_l^T \ I_l^T \ I_l^T \ \dots \ I_l^T]^T}_N. \end{aligned}$$

根据假设1可知

$$\begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I_{Nn} & \Gamma \\ H & 0_{(Nl) \times (Nl)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{I} \end{bmatrix} r. \quad (8)$$

在假设1下,  $x^*$  与  $u^*$  的方程系数矩阵和增广矩阵有相同的秩, 因此有解. 然后, 通过状态平移的方法可以构造出扩大误差系统, 从而实现控制问题转化. 另外, 这个假设在保证扩大误差系统的闭环系统稳定性方面也是重要的, 对非周期系统预见控制也有类似要求, 见文献[7, 17].

定义新向量

$$\begin{aligned} \tilde{x}(p, q) &= x(p, q) - x_q^*, \quad \tilde{u}(p, q) = u(p, q) - u_q^*, \\ \tilde{y}(p, q) &= y(p, q) - r. \end{aligned} \quad (9)$$

结合式(5)、(6)和(9)得到

$$\begin{cases} \tilde{x}(p, q + 1) = A(q)\tilde{x}(p, q) + B(q)\tilde{u}(p, q), \\ \tilde{y}(p, q) = C(q)\tilde{x}(p, q). \end{cases} \quad (10)$$

由式(3)、(9)和(10)得到

$$e(p, q) = C(q)\tilde{x}(p, q) - \tilde{r}(p, q), \quad (11)$$

其中  $\tilde{r}(p, q) = r(p, q) - r$ .

根据假设2, 在当前时刻  $k, \tilde{r}(k), \tilde{r}(k+1), \dots, \tilde{r}(k + M_R)$  是可利用的, 且

$$\tilde{r}(k + j) = 0, \quad j = M_R + 1, M_R + 2, M_R + 3, \dots \quad (12)$$

结合假设2与式(12)有

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}(k+1) \\ \tilde{r}(k+2) \\ \vdots \\ \tilde{r}(k+M_R) \\ \tilde{r}(k+M_R+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}(k) \\ \tilde{r}(k+1) \\ \vdots \\ \tilde{r}(k+M_R-1) \\ \tilde{r}(k+M_R) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} x_R(k) &= \\ [\tilde{r}(k)^T \ \tilde{r}(k+1)^T \ \dots \ \tilde{r}(k+M_R)^T]^T &\in R^{(M_R+1)l}, \end{aligned} \quad (14)$$

则式(13)可改写为

$$x_R(k+1) = A_R x_R(k), \quad (15)$$

其中

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{[(M_R+1) \times l] \times [(M_R+1) \times l]}.$$

由式(4)和(15)可知

$$x_R(p, q + 1) = A_R x_R(p, q). \quad (16)$$

联合式(10)与(16)有

$$\tilde{x}(p, q + 1) = \bar{A}(q)\tilde{x}(p, q) + \bar{B}(q)\tilde{u}(p, q). \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{x}(p, q) &= \begin{bmatrix} \tilde{x}(p, q) \\ x_R(p, q) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(q) = \begin{bmatrix} A(q) & 0 \\ 0 & A_R \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(q) &= \begin{bmatrix} B(q) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由式(11)和(16)得到

$$e(p, q) = \bar{C}(q)\tilde{x}(p, q). \quad (18)$$

其中  $\bar{C}(q) = [C(q) \ G], \ G = [-I \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{M_R}]$ .

为了消除静态误差, 引入离散积分器, 它由下式定义:

$$v(p, q + 1) = v(p, q) + e(p, q). \quad (19)$$

结合式(18)与(19)可得

$$v(p, q + 1) = v(p, q) + \bar{C}(p)\tilde{x}(p, q). \quad (20)$$

令  $\hat{x}(p, q) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(p, q) \\ v(p, q) \end{bmatrix}$ , 综合式(17)与(20)得到

$$\hat{x}(p, q + 1) = \hat{A}(q)\hat{x}(p, q) + \hat{B}(q)\tilde{u}(p, q). \quad (21)$$

其中:  $\hat{A}(q) = \begin{bmatrix} \bar{A}(q) & 0 \\ \bar{C}(q) & I \end{bmatrix}, \ \hat{B}(q) = \begin{bmatrix} \bar{B}(q) \\ 0 \end{bmatrix}$ .

为了使输出方程包含参考信号的未来信息及离散积分器, 针对系统(21), 将其输出方程改为

$$z(p, q) = F(q)\hat{x}(p, q), \quad (22)$$

其中  $F(q) = \text{diag}\{C(q), I_{(M_R+1)l}, I_l\}$ .

联合式(21)与(22),得到

$$\begin{cases} \hat{x}(p, q + 1) = \hat{A}(q)\hat{x}(p, q) + \hat{B}(q)\tilde{u}(p, q), \\ z(p, q) = F(q)\hat{x}(p, q). \end{cases} \quad (23)$$

**引理1**<sup>[19]</sup> 对于方阵  $X$  和  $S$ , 且矩阵  $F = F^T, A, P, L$  具有适当维数, 以下两个不等式条件是等价的:

$$\begin{bmatrix} F + LA + A^T L^T & * \\ X P^T - X L^T + S A & -S X^T - X S^T \end{bmatrix} < 0.$$

$$F + P A + A^T P^T < 0.$$

**引理2**<sup>[16]</sup> 如果存在  $N$ -周期矩阵  $P(q) > 0$  和  $G(q)$ , 使得

$$\begin{bmatrix} -P(q) & * \\ G(q)\hat{A}(q) - \text{sym}(G(q)) + P(q+1) \end{bmatrix} < 0,$$

$$q = 0, 1, \dots, N - 1,$$

则不考虑输入的系统(23)是渐近稳定的.

**引理3**<sup>[20]</sup> 对于给定适当维数的矩阵  $L, H$  并且  $H > 0$ , 有

$$-L^T H^{-1} L \leq -L - L^T + H.$$

### 3 预见控制器的设计

在本节中, 考虑系统(23)的静态输出反馈

$$\tilde{u}(p, q) = K(q)z(p, q), \quad (24)$$

其中  $K(q)$  是  $N$ -周期矩阵. 结合式(23)与(24)得到如下形式的闭环系统:

$$\hat{x}(p, q + 1) = [\hat{A}(q) + \hat{B}(q)K(q)F(q)]\hat{x}(p, q). \quad (25)$$

**定理1** 假设1和假设2成立, 给定参数  $\varepsilon, \theta \neq 0$  和矩阵  $Q(q)$ . 如果存在  $N$ -周期矩阵  $P(q) > 0, G(q), L(q)$  和  $U(q)$  使得

$$\Psi(q) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(q) & * \\ \Pi_{21}(q) & \Pi_{22}(q) \\ \Pi_{31}(q) & (\theta G(q)\hat{B}(q) - \hat{B}(q)U(q))^T \\ * & * \\ * & * \\ \text{sym}(-\hat{B}(q)^T \hat{B}(q)U(q)) \end{bmatrix} \rightarrow \leftarrow < 0, \quad (26)$$

$$q \in \{0, 1, \dots, N - 1\},$$

则闭环系统(25)是渐近稳定的, 增益矩阵为  $K(q) = \theta U(q)^{-1} L(q)$ . 其中

$$\Pi_{11}(q) = -P(q) + \text{sym}(\varepsilon Q(q)\hat{B}(q)L(q)F(q)),$$

$$\Pi_{21}(q) = G(q)\hat{A}(q) + \hat{B}(q)L(q)F(q),$$

$$\Pi_{22}(q) = -G(q) - G(q)^T + P(q + 1),$$

$$\Pi_{31}(q) = \hat{B}(q)^T \hat{B}(q)L(q)F(q) - (\varepsilon Q(q)\hat{B}(q)U(q))^T.$$

**证明** 在定理1中, 令

$$F = \begin{bmatrix} -P(q) & * \\ \Pi_{21}(q) & \Pi_{22}(q) \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left( G(q)\hat{B}(q) - \frac{1}{\theta}\hat{B}(q)U(q) \right),$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\theta}Q(q)\hat{B}(q)U(q) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \theta(U(q))^{-1}L(q)[F(q) \ 0], \quad X = \theta I,$$

$$S = 1/\theta\hat{B}(q)^T \hat{B}(q)U(q).$$

根据引理1, 式(26)可以保证

$$\begin{bmatrix} -P(q) & * \\ \Pi_{21}(q) & \Pi_{22}(q) \end{bmatrix} + \text{sym} \left( [0 \ I]^T \left( G(q)\hat{B}(q) - \frac{1}{\theta}\hat{B}(q)U(q) \right) \times \theta(U(q))^{-1}L(q)[F(q) \ 0] \right) < 0, \quad (27)$$

进一步变形为

$$\begin{bmatrix} -P(q) & * \\ G(q)\hat{A}(q) & \Pi_{22}(q) \end{bmatrix} + \text{sym}([0 \ I]^T G(q)\hat{B}(q)\theta(U(q))^{-1}L(q)[F(q) \ 0]) < 0. \quad (28)$$

令

$$K(q) = \theta U(q)^{-1} L(q), \quad (29)$$

可以得到

$$\begin{bmatrix} -P(q) & * \\ G(q)[\hat{A}(q) + \hat{B}(q)K(q)F(q)] & -\text{sym}(G(q)) + P(q+1) \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

由式(30)和引理2可知, 系统(25)是渐近稳定的.  $\square$

现在研究系统(1)的控制输入.

当假设1和假设2成立时, 对增益矩阵  $K(q)$  进行分解, 有

$$K(q) = [K_y(q) \ K_R(q) \ K_v(q)] = \theta U(q)^{-1} L(q), \quad (31)$$

其中  $K_R(q) = [k_0(q) \ k_1(q) \ \dots \ k_{M_R}(q)]$ , 则式(24)可以改写为

$$\tilde{u}(p, q) = K_y(q)\tilde{y}(p, q) + \sum_{j=0}^{M_R} k_j(q)\tilde{r}(p, q + j) + K_v(q)v(p, q). \quad (32)$$

由式(10)、(12)和(32)很容易得出以下结论:

$$u(p, q) =$$

$$K_y(q)y(p, q) + \sum_{j=0}^{M_R} k_j(q)[r(p, q + j) - r] + K_v(q) \left( \sum_{i=0}^{(pN+q)-1} e(i) + v(0) \right) + (-K_y(q)r + u_q^*).$$

**注 3** 第 1 项  $K_y(q)y(p, q)$  是输出反馈, 第 2 部分  $\sum_{j=0}^{M_R} k_j(q)[r(p, q + j) - r]$  是参考预见前馈补偿项,  $K_v(q) \left[ \sum_{i=0}^{(pN+q)-1} e(i) + v(0) \right]$  是跟踪误差项的积分, 最后一部分是初始值和终值的补偿项.

**注 4** 实际上, 以上结果可以推广到具有外部干扰的周期离散时间系统. 为此考虑如下系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + E(k)w(k), \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k). \end{cases} \quad (33)$$

其中:  $w(k) \in R^z$  是干扰向量且  $w(k) \in L_2[0, \infty)$ ;  $A(k)$ 、 $B(k)$ 、 $C(k)$ 、 $D(k)$  和  $E(k)$  是适当维数的  $N$ -周期矩阵.

基于上述构造方法, 可以得到系统 (33) 的 2D 扩大误差系统

$$\begin{cases} \hat{x}(p, q + 1) = \hat{A}(q)\hat{x}(p, q) + \hat{B}(q)\tilde{u}(p, q) + \hat{E}(q)w(p, q), \\ e(p, q) = \hat{C}(q)\hat{x}(p, q) + D(q)w(p, q). \end{cases} \quad (34)$$

其中

$$\hat{x}(p, q) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(p, q) \\ x_R(p, q) \\ v(p, q) \end{bmatrix}, \hat{A}(q) = \begin{bmatrix} A(q) & 0 & 0 \\ 0 & A_R & 0 \\ C(q) & G & I \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}(q) = \begin{bmatrix} B(q) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{E}(q) = \begin{bmatrix} E(q) \\ 0 \\ D(q) \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}(q) = [C(q) \ G \ 0].$$

将式 (24) 代入 (34) 得到

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(p, q + 1) \\ e(p, q) \end{bmatrix} = [M(q) + H(q)K(q)Z(q)] \begin{bmatrix} \hat{x}(p, q) \\ w(p, q) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

其中

$$M(q) = \begin{bmatrix} \hat{A}(q) & \hat{E}(q) \\ \hat{C}(q) & D(q) \end{bmatrix}, H(q) = \begin{bmatrix} \hat{B}(q) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(q) = [F(q) \ 0].$$

下面将确定式 (24) 中的控制增益矩阵, 使得闭环

系统 (35) 是渐近稳定的, 并且满足  $H_\infty$  性能

$$\|e(p, q)\|_2 \leq \gamma \|w(p, q)\|_2. \quad (36)$$

**定理 2** 对于给定的  $\varepsilon, \theta \neq 0$  和矩阵  $Q(q)$ . 如果存在  $N$ -周期矩阵  $P(q) > 0, G(q), L(q)$  和  $U(q)$  使得

$$\Omega(q) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(q) & & * \\ \Lambda_{21}(q) & \Lambda_{22}(q) & \\ \Lambda_{31}(q) & (\theta G(q)H(q) - H(q)U(q))^T & \\ & * & \\ \leftarrow & * & \\ & \text{sym}(-H(q)^T H(q)U(q)) & \end{bmatrix} < 0,$$

$$q \in \{0, 1, \dots, N - 1\}. \quad (37)$$

其中

$$\Lambda_{11}(q) = -\text{diag}\{P(q), \gamma^2 I\} + \text{sym}(\varepsilon Q(q)H(q)L(q)Z(q)),$$

$$\Lambda_{12}(q) = G(q)M(q) + H(q)L(q)Z(q),$$

$$\Lambda_{22}(q) = -G(q) - G(q)^T + P(q + 1),$$

$$\Lambda_{31}(q) = H(q)^T H(q)L(q)Z(q) - (\varepsilon Q(q)H(q)U(q))^T.$$

则系统 (35) 是鲁棒渐近稳定的而且在零初始条件下具有给定的  $H_\infty$  扰动抑制水平  $\gamma$ , 且控制器为

$$\tilde{u}(p, q) = \theta U(q)^{-1} L(q)z(p, q). \quad (38)$$

定理 2 为系统的稳定性和  $H_\infty$  性能提供了一个判据.

**证明** 第 1 步证明闭环系统是渐近稳定的. 考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V(p, q) = \hat{x}(p, q)^T P(q)\hat{x}(p, q),$$

其中  $P(q) > 0$  是  $N$ -周期矩阵.

由高等代数相关知识可知,  $\Omega(q) < 0$  可以保证  $\Psi(q) < 0$ . 根据定理 1, 当  $w(p, q) = 0$  时, 闭环系统是鲁棒稳定的.

第 2 步证明  $H_\infty$  范数有界性. 当  $w(p, q) \neq 0$  时, 根据定理 1 的推导可知式 (37) 可以保证

$$\begin{bmatrix} -\text{diag}\{P(q), \gamma^2 I\} & & \\ G(q)[M(q) + H(q)K(q)Z(q)] & \rightarrow & \\ & * & \\ \leftarrow & -\text{sym}(G(q)) + \text{diag}\{P(q+1), I\} & \end{bmatrix} < 0. \quad (39)$$

对式 (39) 运用引理 3, 左乘可逆矩阵  $\text{diag}\{I, G(q)^{-T}\}$ , 右乘它的转置, 得到

$$\begin{bmatrix} -\text{diag}\{P(q), \gamma^2 I\} & & * \\ [F(q) + H(q)K(q)Z(q)] & -\text{diag}\{P(q+1)^{-1}, I\} & \\ & & \end{bmatrix} < 0. \quad (40)$$

为了处理系统(35)的 $H_\infty$ 性能,引入

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{N-1} [e(p, q)^T e(p, q) - \gamma^2 w(p, q)^T w(p, q)]. \tag{41}$$

对 $V(p, q)$ 取差分得到

$$\Delta V(p, q) = \hat{x}(p, q + 1)^T P(q + 1) \hat{x}(p, q + 1) - \hat{x}(p, q)^T P(q) \hat{x}(p, q). \tag{42}$$

在零初始条件下,由式(41)和(42)得到

$$\begin{aligned} J \leq & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{N-1} [e(p, q)^T e(p, q) - \gamma^2 w(p, q)^T w(p, q) + \Delta V(p, q)] = \\ & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{N-1} \{ \mu_1(p, q)^T \text{diag}\{P(q + 1), I\} \mu_1(p, q) - \\ & \mu_2(p, q)^T \text{diag}\{P(q), \gamma^2 I\} \mu_2(p, q) \} = \\ & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{N-1} \{ \mu_2(p, q)^T \Theta(q) \mu_2(p, q) \}. \end{aligned} \tag{43}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1(p, q) &= [\hat{x}(p, q + 1)^T \ e(p, q)^T]^T, \\ \mu_2(p, q) &= [\hat{x}(p, q)^T \ w(p, q)^T]^T, \\ \Theta(q) &= [F(q) + H(q)K(q)Z(q)]^T \text{diag}\{P(q + 1), I\} \cdot \\ & \quad [F(q) + H(q)K(q)Z(q)] - \text{diag}\{P(q), \gamma^2 I\}. \end{aligned}$$

根据Shur补引理,式(40)等价于 $\Theta(q) < 0$ . 由于式(37)可以保证(39)成立,而(39)可以保证(40)成立. 从而定理2的条件即(37)可以保证 $J \leq 0$ ,进而有 $\|e(p, q)\|_2 \leq \gamma \|w(p, q)\|_2$ .  $\square$

如果LMI问题(37)有可行解,则对于系统(33),预见控制律为

$$\begin{aligned} u(p, q) &= K_y(q)y(p, q) + \sum_{j=0}^{M_R} K_{Rj}(q)[r(p, q + j) - r] + \\ & \quad K_v(q) \left( \sum_{i=0}^{(pN+q)-1} e(i) + v(0) \right) + \\ & \quad (-K_y(q)r + u_q^*). \end{aligned}$$

**注5** 针对周期离散时间系统,本文通过状态平移提出一种新的扩大误差系统的构造方法. 这种构造方法得到扩大误差系统的状态变量的维数为 $n + (M_R + 1) \times l + l$ . 而文献[16]中的构造方法得到状态变量的维数为 $n + (M_R + N + 1) \times l + l$ ,本文的扩大误差系统的维数与系数矩阵的周期 $N$ 无关,极大地降低了增广系统的维数. 而文献[17]中基于最优调节理论的设计方法无法适用到带有外部扰动

或具有模型误差的周期系统中. 因此,本文提出的设计方法不仅减少了计算量大的问题,而且扩大了适用对象.

### 4 数值仿真

对于系统(1),有

$$\begin{aligned} A(1) &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.4 \\ -0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 1.2 & 1.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C(1) &= [-0.9 \ 0 \ 2], \quad A(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & -0.4 \\ -0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 1.2 & 1.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ B(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C(0) = [-1 \ 0 \ 2]. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = 0.83$ 和 $\theta = 0.5$ ,对目标值信号预见步数分别为 $M_R = 6$ 和 $M_R = 2$ 及目标值信号没有预见即 $M_R = 0$ (传统的跟踪控制)这三种情况进行数值仿真. 根据定理1,应用Matlab的LMI工具箱可求解出LMIs(26)中的矩阵变量 $L(q)$ 和 $U(q)$ ,则可得反馈矩阵.

**case 1** 当 $M_R = 6$ 时,预见控制增益矩阵为

$$\begin{aligned} K(q) &= [K_y(q) \ K_R(q) \ K_v(q)] \in R^{1 \times 9}, \quad q = 0, 1; \\ K_y(0) &= -0.036 \ 37; \\ K_R(0) &= [0.007 \ 28 \ 0.007 \ 22 \ 0.007 \ 25 \ 0.007 \ 25 \rightarrow \\ & \quad \leftarrow 0.007 \ 23 \ 0.007 \ 21 \ 0.007 \ 23]; \\ K_v(0) &= -0.007 \ 22; \quad K_y(1) = -0.221 \ 74; \\ K_R(1) &= [0.005 \ 59 \ 0.005 \ 58 \ 0.005 \ 57 \ 0.005 \ 59 \rightarrow \\ & \quad \leftarrow 0.005 \ 59 \ 0.005 \ 58 \ 0.005 \ 57]; \\ K_v(1) &= -0.005 \ 57. \end{aligned}$$

**case 2** 当 $M_R = 2$ 时,有

$$\begin{aligned} K(q) &= [K_y(q) \ K_R(q) \ K_v(q)] \in R^{1 \times 5}, \quad q = 0, 1; \\ K_y(0) &= -0.037 \ 33; \\ K_R(0) &= [0.006 \ 78 \ 0.007 \ 35 \ 0.007 \ 69]; \\ K_v(0) &= -0.007 \ 63; \quad K_y(1) = -0.222 \ 99; \\ K_R(1) &= [0.005 \ 73 \ 0.005 \ 61 \ 0.005 \ 58]; \\ K_v(1) &= -0.005 \ 92. \end{aligned}$$

**case 3** 当 $M_R = 0$ 时,有

$$\begin{aligned} K(0) &= [K_y(0) \ K_v(0)] = [-0.029 \ 55 \ -0.004 \ 35], \\ K(1) &= [K_y(1) \ K_v(1)] = [-0.213 \ 15 \ -0.003 \ 30]. \end{aligned}$$

从式(5)和(6)获得

$$x_0^* = \begin{bmatrix} -0.05631 \\ 0.13852 \\ 0.97184 \end{bmatrix}, x_1^* = \begin{bmatrix} -0.30608 \\ 0.59029 \\ 0.86226 \end{bmatrix},$$

$$u_0^* = 0.01040, u_1^* = -0.34088.$$

参考信号取为

$$r(k) = \begin{cases} 2, & k \geq 20; \\ 0, & k < 20. \end{cases} \quad (44)$$

图1给出了系统(1)的闭环系统的输出响应,图2是控制输入.可以看出,在目标值信号的预见步数分别为 $M_R = 6$ 和 $M_R = 2$ 及 $M_R = 0$ 这三种情况下,输出信号都能准确地跟踪目标值信号.但与传统跟踪控制器(即case 3)相比,所提出的预见控制方案(即case 1和case 2)在响应速度、跟踪精度方面有了显著提高,并且可以通过更多的预见信息获得进一步的改进(case 1).

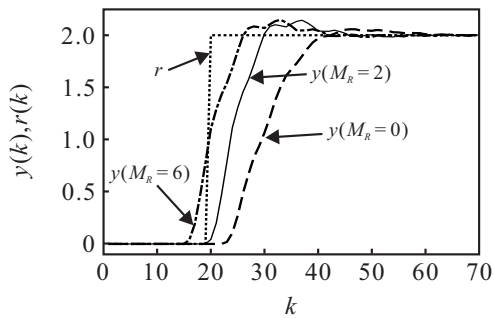


图1 周期系统的输出响应

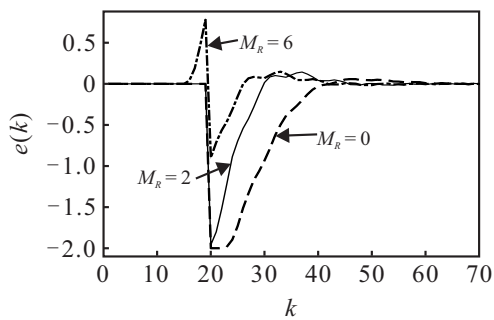


图2 跟踪误差 e(k)

这里给出 u(k) 随时间变化的曲线,如图3所示.

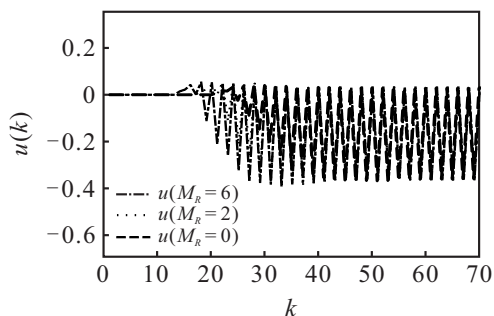


图3 控制输入 u(k)

参考信号假定为

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 10; \\ 0.05(k - 10), & 10 < k < 40; \\ 1.5, & k \geq 40. \end{cases} \quad (45)$$

针对参考信号(45),预见跟踪控制和传统的跟踪控制下的系统(1)的输出轨迹如图4所示,图5和图6绘制了跟踪误差和控制输入信号.

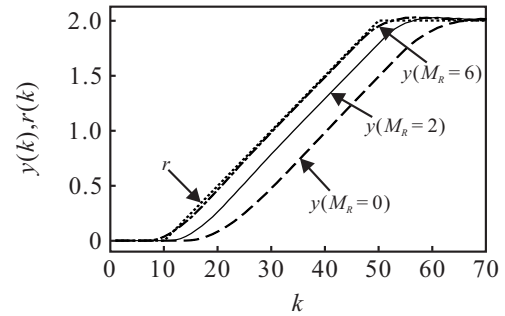


图4 周期系统对信号(45)的输出响应

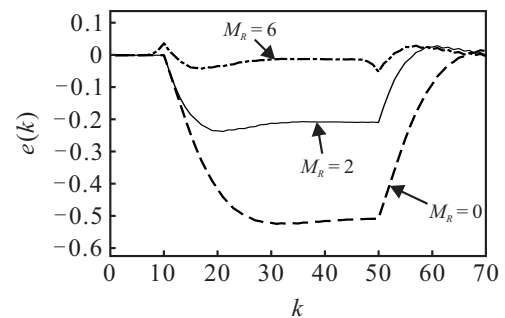


图5 周期系统对信号(45)的跟踪误差

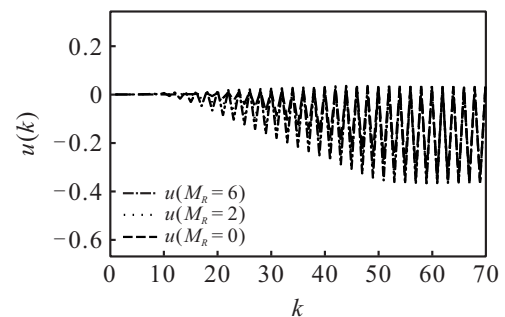


图6 周期系统对信号(45)的控制输入

从图4~图6中可以看出,与没有预见行为(即case 3)相比,预见控制可以加快跟踪参考信号的输出响应的速度.另一方面,与 $M_R = 2$ (即case 2)的情况相比,预见步长为 $M_R = 6$ (即case 1)的预见控制器具有更好的跟踪性能.

### 5 结论

本文研究了周期离散时间系统的预见控制器的设计问题.首先采用一种新的构造方法推导出2D扩大误差系统,使得状态变量中融合了可预见的目标值信号的未来信息;然后,改造输出方程,引入输出反馈,

利用LMI方法给出了控制器存在的条件及设计方法;最后,通过求解一个LMI得到反馈增益矩阵,仿真例子验证了本文控制器的有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Salton A T, Chen Z Y, Zheng J C, et al. Constrained optimal preview control of dual-stage actuators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2016, 21(2): 1179-1184.
- [2] Birla N, Swarup A. Optimal preview control: A review[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36(2): 241-268.
- [3] Sheridan T B. Three models of preview control[J]. IEEE Transactions on Human Factors in Electronics, 1966, 7(2): 91-102.
- [4] Cao M J, Liao F C. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor systems with state delay[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(5): 932-943.
- [5] Lu Y R, Liao F C, Deng J M, et al. Cooperative optimal preview tracking for linear descriptor multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(2): 908-934.
- [6] Lu Y R, Liao F C, Deng J M, et al. Cooperative global optimal preview tracking control of linear multi-agent systems: An internal model approach[J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(12): 2451-2462.
- [7] Wu J, Liao F C, Xu Z G. Preview control for a class of linear stochastic systems with multiplicative noise[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(14): 2592-2603.
- [8] Gershon E, Shaked U.  $H_\infty$  preview tracking control of retarded state-multiplicative stochastic systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24(15): 2119-2135.
- [9] de Souza C E, Shaked U, Fu M. Robust  $H_\infty$  tracking: A game theory approach[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1995, 5(3): 223-238.
- [10] Hamada Y. Preview feedforward compensation: LMI synthesis and flight simulation[J]. IFAC-PapersOnLine, 2016, 49(17): 397-402.
- [11] Li L, Liao F C. Robust preview control for a class of uncertain discrete-time systems with time-varying delay[J]. ISA Transactions, 2018, 73: 11-21.
- [12] Yaz E E. Linear matrix inequalities in system and control theory[J]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(12): 2473-2474.
- [13] Li L, Yuan Y L. Output feedback preview control for polytopic uncertain discrete-time systems with time-varying delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(9): 2619-2638.
- [14] Lan Y H, Xia J J, Shi Y X. Robust guaranteed-cost preview repetitive control for polytopic uncertain discrete-time systems[J]. Algorithms, 2019, 12(1): 1-19.
- [15] Takaba K. Robust servomechanism with preview action for polytopic uncertain systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(2): 101-111.
- [16] Li L, Lu Y R, Gu L S. Preview control for a class of linear discrete-time periodic systems[J]. International Journal of Control, 2021, 94(3): 823-833.
- [17] Liao F C, Sun M Y, Usman. Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 8434293.
- [18] Yang Y G. An efficient LQR design for discrete-time linear periodic system based on a novel lifting method[J]. Automatica, 2018, 87: 383-388.
- [19] Chang X H, Liu R R, Park J H. A further study on output feedback  $H_\infty$  control for discrete-time systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(2): 305-309.
- [20] Xia W F, Xu S Y, Lu J W, et al. Reliable filter design for discrete-time neural networks with Markovian jumping parameters and time-varying delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(5): 2892-2915.

#### 作者简介

李丽(1989—),女,副教授,博士,从事鲁棒控制、预见控制等研究, E-mail: lili@hbue.edu.cn;

任祯琴(1983—),女,讲师,博士,从事广义系统预见控制的研究, E-mail: renzhenqin619@soho.com;

于晓(1991—),女,讲师,博士,从事非线性系统预见控制的研究, E-mail: yuxiao19@sdjzu.edu.cn.

(责任编辑: 闫妍)