

控制与决策

Control and Decision

融合专家经验和寿命试验数据的产品可靠性评估

贾祥, 郭波

引用本文:

贾祥, 郭波. 融合专家经验和寿命试验数据的产品可靠性评估[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2600–2608.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0471>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双不确定相依竞争失效模型的可靠性评估

Reliability evaluation of dependent competitive failure models with bi-uncertainty

控制与决策. 2022, 37(3): 685–689 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1487>

全寿命周期下退化的大规模系统预防性维修策略优化

Preventive maintenance optimization for deteriorating large-scale systems in life-cycle perspective

控制与决策. 2022, 37(9): 2360–2368 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1813>

考虑多重决策心理的海岛孤网调度综合评价

Comprehensive evaluation of island isolated microgrid dispatch considering multiple decision psychology

控制与决策. 2022, 37(6): 1591–1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1792>

大群体应急决策中考虑属性关联的偏好信息融合方法

Preference information fusion method of large groups emergency decision-making based on attributes association

控制与决策. 2021, 36(10): 2537–2546 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0117>

专家交互情境下不完备群组DEMATEL决策方法

Incomplete group DEMATEL decision-making method under expert interaction context

控制与决策. 2020, 35(12): 3066–3072 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0353>

融合专家经验和寿命试验数据的产品可靠性评估

贾 祥[†], 郭 波

(国防科技大学 系统工程学院, 长沙 410073)

摘 要: 专家经验是可靠性工程中常见的一类可靠性数据, 通过将其与产品的寿命试验数据融合, 可以扩充可靠性信息, 为产品可靠性的评估提供新的思路. 对此, 利用 Bayes 理论, 考虑不同类型和不同形式的专家经验, 通过验前矩拟合的方法将其转化为产品寿命分布参数的验前分布. 进一步, 根据寿命试验数据确定似然函数, 推断分布参数的验后分布, 可求得数据融合后产品的可靠度和剩余寿命等可靠性评估结果. 通过蓄电池算例分析, 表明所提出方法的应用及其有效性.

关键词: 可靠性评估; 专家经验; 信息融合; 矩拟合; Bayes 理论

中图分类号: TB114.3

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0471

引用格式: 贾祥, 郭波. 融合专家经验和寿命试验数据的产品可靠性评估[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2600-2608.

Reliability evaluation for products by fusing expert knowledge and lifetime data

JIA Xiang[†], GUO Bo

(College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The expert knowledge is common in reliability engineering. It would provide a new insight on the estimation of reliability by incorporating the expert knowledge and lifetime data. This problem is studied in this paper through Bayesian theory considering different categories and forms of expert knowledge. First, the prior distribution of distribution parameters are elicited from expert knowledge by fitting prior moments. Further, the posterior distribution of distribution parameters are obtained by integrating the likelihood function from lifetime data and prior distribution. Finally, the estimations of reliability and remaining useful lifetime are computed from posterior distribution. Through an example for battery, the proposed method is applied and proved to be effective.

Keywords: reliability evaluation; expert knowledge; data incorporation; moment fitting; Bayes theory

0 引 言

产品的可靠性是其通用质量特性的重要指标, 对于航天装备等高端装备, 其可靠性至关重要. 加强产品的可靠性研究, 是推动国家高端装备制造发展, 实施“制造强国”战略的迫切需求. 产品的可靠性评估是可靠性研究的重要方面^[1], 评估的指标包括可靠度^[2]、寿命和剩余寿命^[3]等.

传统的产品可靠性评估方法是建立在大量的失效数据基础上, 通过验证或假设产品的寿命服从某个特定分布, 再对产品的可靠性进行评估^[4]. 但目前产品的可靠性水平普遍得到了很大的提升, 且受限于试验时间和成本, 难以在有限的时间内收集到大量的

产品失效数据, 从而限制了传统可靠性评估方法的应用.

针对这一工程难题, 得益于数据收集和存储技术的发展, 对于待评估的产品, 除了寿命数据外, 还能收集到同类产品的历史寿命数据^[5]、相似产品的寿命数据^[6]、性能数据^[7]、专家经验^[8]等其他类型的可靠性数据. 通过充分利用这些数据, 可以扩充产品的可靠性信息源, 为产品的可靠性评估提供新的思路. 因此, 基于信息融合的产品可靠性评估理论得到了长足的发展. 在这些信息源中, 专家经验是一类重要的数据源, 特别是在卫星等航天装备的可靠性数据中, 主要依靠可靠性专家在长期工程实践中积累的经验给

收稿日期: 2021-03-21; 录用日期: 2021-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71801219); 湖南省自然科学基金项目(2019JJ50730).

责任编辑: 姜斌.

[†]通讯作者. E-mail: jiaxiang09@sina.cn.

出的主观信息^[9],其存在的形式包括可靠性参数的点估计和区间估计等^[10].这就带来融合专家经验对产品可靠性进行评估的问题,也是工程实践中的迫切需求.

对于专家经验在可靠性工程中的应用方面: Mkrtychyan等^[11]讨论了如何利用专家经验分析人因可靠性; Jia等^[12]在威布尔分布场合通过融合专家经验和不等定时截尾数据评估了产品的可靠性; Johnston等^[13]利用专家经验评估了互联网的脆弱性; Liu等^[14]探讨了专家经验在产品可靠性设计中的应用; Compare等^[15]通过协变量模型利用专家经验评估了工业设备的可靠性.对于专家经验的融合分析问题, Jia等^[12]和陈浩^[16]利用Bayes理论,分别将专家经验转化为可靠度的离散验前样本和可靠度的验前分布,继而再将可靠性参数的验前分布转化为分布参数的验前分布.这种思路造成分布参数的验前分布数学形式非常复杂,不便于验后分布的推导和可靠性的融合评估. Uzunoglu^[17]和Sun等^[18]分别提出了基于主观逻辑可靠性网络和层次分析法的方法对专家经验数据进行了转化,但这两个方法主观性较强,不便于工程实践中的应用.

为此,本文假定产品的寿命服从威布尔分布,并考虑不同类型和不同形式的专家经验,利用Bayes理论将其直接转化为分布参数的验前分布,再与寿命数据进行融合,从而提出产品的可靠性融合评估方法.

1 模型描述

威布尔分布在可靠性工程中被广泛用于描述产品的寿命^[19],其概率密度函数为

$$f(t; m, \lambda) = m\lambda t^{m-1} \exp(-\lambda t^m). \quad (1)$$

其中: $t > 0$ 为产品的寿命, $m > 0$ 为形状参数, $\lambda > 0$ 为反映尺度的分布参数. 相应的可靠度函数为

$$R(t; m, \lambda) = \exp(-\lambda t^m). \quad (2)$$

本文假定专家经验是专家给出的产品可靠性预计值,具体形式包括以下几种: 1) 产品在 t 时刻的可靠度预计值 \hat{R} ; 2) 置信水平 $(1 - \gamma)$ 下, 产品在 t 时刻的可靠度置信下限 R_L ; 3) 产品 τ 时刻的剩余寿命预计值 \hat{L} ; 4) 置信水平 $(1 - \gamma)$ 下, 产品在 τ 时刻的剩余寿命置信区间 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$. 特别地, 当 $\tau = 0$ 时, 剩余寿命的预计值和置信区间就是产品平均寿命的预计值和置信区间, 因此, 本文不再考虑专家经验为产品平均寿命的预计值和置信区间. 进一步, 针对待评估产品的专家经验, 假定共收集到 M 个数据 $H_i (i = 1, \dots, M)$, H_i

可以为 \hat{R} 、 R_L 、 \hat{L} 和 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$ 中任何一种形式.

除了专家经验, 通过产品的寿命试验, 也收集到了 n 个数据 (t_i, δ_i) . 其中: $i = 1, \dots, n$; $\delta_i = 1$ 代表 t_i 是失效数据, 反之是截尾数据. 针对融合产品的专家经验和寿命数据对其可靠性进行评估的问题, 本文采用Bayes理论, 将专家经验视为验前信息并将其转化为验前分布, 再将寿命数据视为现场数据, 结合验前分布推导验后分布, 最后评估产品的可靠性. 这需要分析验前分布的确定方法以及验后分布的推导和数据融合后的产品可靠性评估等内容.

2 验前分布的确定

不同于现有方法, 本文将专家经验直接转化为 m 和 λ 的验前分布, 这就需要确定验前分布的形式和验前分布的参数. 借鉴现有文献中的常用方法^[8,20], 本文假定 m 和 λ 的验前分布相互独立, 其分布形式为

$$\pi(m, \lambda) = \pi(m)\pi(\lambda). \quad (3)$$

进一步假定 m 的验前分布为均匀分布^[20], 即

$$\pi(m) = \frac{1}{m_u - m_l}, \quad m_l \leq m \leq m_u, \quad (4)$$

而 λ 的验前分布则取为共轭伽马分布, 即

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda). \quad (5)$$

其中: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$ 为伽马函数, $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 为超参数.

当专家经验是关于可靠度和剩余寿命等可靠性参数的预计值时, 考虑到可靠性参数是分布参数 m 和 λ 的函数, 如可靠度函数见式(2), 因此, 可靠性参数也是一个随机变量. 利用式(3)中 m 和 λ 的验前分布, 结合可靠性参数的函数, 可推导可靠性参数的验前分布, 并进一步求解可靠性参数的矩, 称之为专家经验的验前矩. 通过拟合专家经验的验前矩及其具体数值, 可以确定超参数 α 和 β , 从而将专家经验转化为式(3)中的验前分布. 接下来分析验前矩的求解.

2.1 可靠度的验前矩

当专家经验为可靠度 $R(t)$ 的预计值或置信下限时, 为了确定专家经验的验前矩, 可先根据式(3)中 m 和 λ 的验前分布推导 $R(t)$ 的验前分布. 在给定参数 m 时, 可得其分布函数为

$$\begin{aligned} F_R(x|m) &= P(\exp(-\lambda t^m) \leq x|m) = \\ &P\left(\lambda \geq -\frac{\ln x}{t^m} \middle| m\right) = \\ &\int_{-\frac{\ln x}{t^m}}^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

进一步推得在给定参数 m 时,其概率密度函数为

$$f_R(x|m) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{t^m}\right)^\alpha (-\ln x)^{\alpha-1} x^{\frac{\beta}{t^m}-1}, \quad (6)$$

再结合式(4)中 m 的验前分布,可得

$$f_R(x) = \int_m f_R(x|m) \cdot \pi(m) dm = \frac{\int_{\frac{\beta}{t^{m_u}}}^{\frac{\beta}{t^{m_l}}} (-y \ln x)^{\alpha-1} \exp[-(-y \ln x)] \frac{1}{x \ln t} dy}{(m_u - m_l) \Gamma(\alpha)}.$$

引入不完全伽马函数

$$\Gamma(\alpha, b) = \int_0^b x^{\alpha-1} \exp(-x) dx, \quad (7)$$

可得概率密度函数 $f_R(x)$ 的解析式为

$$f_R(x) = \frac{1}{m_u - m_l} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x \ln t} \frac{1}{\ln x} \times \left[\Gamma\left(\alpha, -\frac{\beta}{t^{m_u}} \ln x\right) - \Gamma\left(\alpha, -\frac{\beta}{t^{m_l}} \ln x\right) \right]. \quad (8)$$

利用式(8)中的验前分布,可得 $R(t)$ 的验前矩为

$$E(R) = \int_0^1 x f_R(x) dx = \frac{1}{m_u - m_l} \int_{m_l}^{m_u} \frac{\beta^\alpha}{(\beta + t^m)^\alpha} dm = \frac{1}{(m_u - m_l) \ln t} \int_{\frac{\beta}{t^{m_u}}}^{\frac{\beta}{t^{m_l}}} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx. \quad (9)$$

通过引入超几何函数

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (10)$$

其中 $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$, 可得^[21]

$$\int \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = {}_2F_1(1, \alpha; \alpha+1; x) \frac{x^\alpha}{\alpha} + C,$$

这里 C 为常数. 进一步,可给出式(9)中验前矩的解析式为

$$E(R) = \frac{{}_2F_1(1, \alpha; \alpha+1; x_u)(x_u)^\alpha - {}_2F_1(1, \alpha; \alpha+1; x_l)(x_l)^\alpha}{\alpha(m_u - m_l) \ln t}. \quad (11)$$

其中: $x_l = \frac{\beta}{\beta + t^{m_u}}, x_u = \frac{\beta}{\beta + t^{m_l}}$.

在置信水平 $(1 - \gamma)$ 下,产品 t 时刻的可靠度置信下限 R_L 满足 $\int_0^{R_L} f_R(x) dx = 1 - \gamma$, 因此分析 R_L 的验前矩,关键是求解 $F_R(u) = \int_0^u f_R(x) dx$. 对于 $F_R(u)$, 重新化简可得

$$F_R(u) = \int_0^u \int_m f_R(x|m) \cdot \pi(m) dm dx =$$

$$\int_0^u \int_m \frac{\pi(m)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{t^m}\right)^\alpha (-\ln x)^{\alpha-1} x^{\frac{\beta}{t^m}-1} dm dx = 1 - \frac{\int_{m_l}^{m_u} \Gamma\left(\alpha, -\frac{\beta}{t^m} \ln u\right) dm}{(m_u - m_l) \Gamma(\alpha)}. \quad (12)$$

利用泰勒展开,可得式(7)中的不完全伽马函数为

$$\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k b^{a+k}}{a+k} \frac{1}{k!}.$$

故式(12)可进一步化简为

$$F_R(u) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{m_l}^{m_u} \frac{1}{\alpha+k} \frac{(-1)^k}{k!} \left(-\frac{\beta}{t^m} \ln u\right)^{\alpha+k} dm}{(m_u - m_l) \Gamma(\alpha)} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha+k)^2 k!} \left[\left(\frac{-\beta \ln u}{t^{m_l}}\right)^{\alpha+k} - \left(\frac{-\beta \ln u}{t^{m_u}}\right)^{\alpha+k} \right]}{(m_u - m_l) \Gamma(\alpha) \ln t}.$$

因为

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+k)^2} \frac{(-1)^k}{k!} \left(-\frac{\beta \ln u}{t^m}\right)^{\alpha+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k (\alpha)_k}{\alpha^2 (\alpha+1)_k (\alpha+1)_k} \left(-\frac{\beta \ln u}{t^m}\right)^\alpha \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta \ln u}{t^m}\right)^k = \frac{1}{\alpha^2} \left(-\frac{\beta \ln u}{t^m}\right)^\alpha {}_2F_2\left(\alpha, \alpha; \alpha+1, \alpha+1; \frac{\beta}{t^m} \ln u\right),$$

故可得式(12)的解析式为

$$F_R(u) = 1 - \frac{y_u^\alpha {}_2F_2(\alpha, \alpha; \alpha+1, \alpha+1; -y_u)}{(m_u - m_l) \alpha^2 \Gamma(\alpha) \ln t} + \frac{y_l^\alpha {}_2F_2(\alpha, \alpha; \alpha+1, \alpha+1; -y_l)}{(m_u - m_l) \alpha^2 \Gamma(\alpha) \ln t}. \quad (13)$$

其中: $y_u = -\frac{\beta \ln u}{t^{m_l}}, y_l = -\frac{\beta \ln u}{t^{m_u}}$.

2.2 剩余寿命的验前矩

当专家经验为 τ 时刻剩余寿命 L 的预计值或置信下限时,需要分析 L 的验前矩. 根据式(1)中产品寿命的概率密度函数,可得产品剩余寿命的概率密度函数为

$$f(l) = m\lambda(l + \tau)^{m-1} \exp[\lambda\tau^m - \lambda(l + \tau)^m], \quad (14)$$

其中 $l > 0$. 由式(14)可知,平均剩余寿命为

$$L(\tau; m, \lambda) = \lambda^{-\frac{1}{m}} \exp(\lambda\tau^m) \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) - \tau - \lambda^{-\frac{1}{m}} \exp(\lambda\tau^m) \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1, \lambda\tau^m\right). \quad (15)$$

对于 L 的置信区间,关键是根据式(14)求解 L 的

分位点 L_γ , 其中 $\int_0^{L_\gamma} f(l)dl = 1 - \gamma$. 经化简可得

$$L_\gamma(\tau; \lambda, m) = (\tau^m - \lambda^{-1} \ln \gamma)^{\frac{1}{m}} - \tau. \quad (16)$$

因此, 在置信水平 $(1 - \gamma)$ 下, 产品 τ 时刻的剩余寿命置信区间 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$ 为

$$L_l^\gamma = \left[\tau^m - \lambda^{-1} \ln \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \right]^{\frac{1}{m}} - \tau,$$

$$L_u^\gamma = \left[\tau^m - \lambda^{-1} \ln \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right]^{\frac{1}{m}} - \tau. \quad (17)$$

对于 L 的验前矩, 注意到式 (15) 中的平均剩余寿命是关于分布参数 m 和 λ 的函数, 因此可得

$$E(L) = \int_m \int_0^{+\infty} \pi(m)\pi(\lambda)L(\tau; \lambda, m)d\lambda dm.$$

代入式 (4) 和 (5) 中的验前分布以及式 (15) 中的平均剩余寿命, 可得

$$E(L) = \int_{m_l}^{m_u} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha - \frac{1}{m} - 1} \exp[-(\beta - \tau^m)\lambda] \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma(\alpha)} d\lambda dm - \tau - \int_{m_l}^{m_u} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha - \frac{1}{m} - 1} \exp[-(\beta - \tau^m)\lambda] \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}, \lambda\tau^m\right)}{\Gamma(\alpha)} d\lambda dm. \quad (18)$$

对于式 (18), 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha - \frac{1}{m} - 1} \exp[-(\beta - \tau^m)\lambda] \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}, \lambda\tau^m\right)}{\Gamma(\alpha)} d\lambda = \frac{\beta^\alpha \lambda^\alpha \exp[-(\beta - \tau^m)\lambda] \tau^{m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\lambda\tau^m)^k}{k!}}{\Gamma(\alpha) \left(1 + \frac{1}{m} + k\right)} d\lambda = \frac{\alpha m \tau^{m+1} \beta^\alpha}{(m+1)(\beta - \tau^m)^{1+\alpha}} {}_2F_1\left(\alpha+1, 1 + \frac{1}{m}; 2 + \frac{1}{m}; -\frac{\tau^m}{\beta - \tau^m}\right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha - \frac{1}{m} - 1} \exp[-(\beta - \tau^m)\lambda] \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) d\lambda}{\Gamma(\alpha)} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\beta - \tau^m)^{\alpha - \frac{1}{m}}} \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{m}\right) = B\left(1 + \frac{1}{m}, \alpha - \frac{1}{m}\right) \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta - \tau^m)^{\alpha - \frac{1}{m}}}.$$

其中: $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数, ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ 见式 (10). 故可将式 (18) 化简为

$$E(L) = \int_{m_l}^{m_u} B\left(1 + \frac{1}{m}, \alpha - \frac{1}{m}\right) \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta - \tau^m)^{\alpha - \frac{1}{m}}} dm - \tau - \int_{m_l}^{m_u} \frac{\alpha \beta^\alpha m \tau^{m+1} {}_2F_1\left(\alpha+1, 1 + \frac{1}{m}; 2 + \frac{1}{m}; -\frac{\tau^m}{\beta - \tau^m}\right)}{(m+1)(\beta - \tau^m)^{1+\alpha}} dm.$$

因难以进一步给出积分的解析式, 故采用数值近似算法, 通过从均匀分布 $[m_l, m_u]$ 中抽取 N 个样本, 记为 $m_i (i = 1, \dots, N)$, 可得 $E(L)$ 的近似值为

$$E(L) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha \beta^\alpha B\left(1 + \frac{1}{m_i}, \alpha - \frac{1}{m_i}\right)}{(\beta - \tau^{m_i})^{\alpha - \frac{1}{m_i}}} - \tau - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha \beta^\alpha m_i \tau^{m_i+1} {}_2F_1\left(\alpha+1, 1 + \frac{1}{m_i}; 2 + \frac{1}{m_i}; -\frac{\tau^{m_i}}{\beta - \tau^{m_i}}\right)}{(m_i + 1)(\beta - \tau^{m_i})^{1+\alpha}}. \quad (19)$$

对于 L 的置信区间, 由式 (17) 可知, 其也是关于 m 和 λ 的函数, 可类似于 $E(L)$ 求解置信区间的验前矩. 由于式 (17) 中 L 的置信区间与式 (16) 中 L 的分位点 L_γ 有关, 为了简便, 先求解 L_γ 的验前矩

$$E(L_\gamma) = \int_m \int_0^{+\infty} \pi(m)\pi(\lambda)L_\gamma(\tau; \lambda, m)d\lambda dm.$$

代入式 (4) 和 (5) 中的验前分布以及式 (16) 中的分位点 L_γ , 可得

$$E(L_\gamma) = \int_{m_l}^{m_u} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha - 1} \exp(-\beta\lambda)(\tau^m - \lambda^{-1} \ln \gamma)^{\frac{1}{m}}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda dm - \tau. \quad (20)$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha - 1} \exp(-\beta\lambda)(\tau^m - \lambda^{-1} \ln \gamma)^{\frac{1}{m}} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau^m)^{\frac{1}{m} - k} \times (\ln \gamma)^k \left(-\frac{1}{m}\right)_k \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha - k - 1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\tau^m)^{\frac{1}{m} - k} (\beta \ln \gamma)^k \left(-\frac{1}{m}\right)_k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)} = \tau {}_1F_1\left(-\frac{1}{m}; 1 - \alpha; -\frac{\beta \ln \gamma}{\tau^m}\right),$$

其中 ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ 见式 (10). 故可将式 (20) 化简为

$$E(L_\gamma) = \tau \int_{m_l}^{m_u} {}_1F_1\left(-\frac{1}{m}; 1 - \alpha; -\frac{\beta \ln \gamma}{\tau^m}\right) dm - \tau.$$

类似于式 (19), 利用从均匀分布 $[m_l, m_u]$ 中抽取的样本 $m_i (i = 1, \dots, N)$, 可得 $E(L_\gamma)$ 的近似值为

$$E(L_\gamma) \approx \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N {}_1F_1\left(\frac{-1}{m_i}; 1 - \alpha; -\frac{\beta \ln \gamma}{\tau^{m_i}}\right) - \tau. \quad (21)$$

由式(21)可知, L 的置信区间的矩为

$$\begin{aligned}
 E(L_l^\gamma) &\approx \\
 \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N {}_1F_1\left(\frac{-1}{m_i}; 1-\alpha; \frac{-\beta}{\tau^{m_i}} \ln\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right) - \tau, \\
 E(L_u^\gamma) &\approx \\
 \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N {}_1F_1\left(-\frac{1}{m_i}; 1-\alpha; -\frac{\beta}{\tau^{m_i}} \ln\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) - \tau. \quad (22)
 \end{aligned}$$

2.3 基于矩拟合的超参数求解

对于收集到的 M 个反映专家经验的数据 $H_i (i = 1, 2, \dots, M)$, H_i 可以为 \hat{R} 、 R_L 、 \hat{L} 和 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$ 中任意一种形式, 根据式(11)、(13)、(19)和(22), 可依次确定不同形式的专家经验的验前矩. 因而, 可通过拟合专家经验的验前矩及其具体数值确定超参数 α 和 β .

当 $M \geq 2$ 时, 验前矩拟合的误差平方和函数为

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M S_i^2 = \sum_{i=1}^M [E(H_i) - H_i]^2. \quad (23)$$

其中: 当专家经验 H_i 为可靠度预计值 \hat{R} 时, S_i 为

$$\begin{aligned}
 S_i &= \frac{{}_2F_1(1, \alpha; \alpha + 1; x_u)(x_u)^\alpha}{\alpha(m_u - m_l) \ln t} - \\
 &\quad \frac{{}_2F_1(1, \alpha; \alpha + 1; x_l)(x_l)^\alpha}{\alpha(m_u - m_l) \ln t} - H_i,
 \end{aligned}$$

x_l 和 x_u 见式(11); 当 H_i 为置信水平 $(1 - \gamma)$ 下的可靠度置信下限 R_L 时, S_i 为

$$\begin{aligned}
 S_i &= \frac{y_u^\alpha {}_2F_2(\alpha, \alpha; \alpha + 1, \alpha + 1; -y_u)}{(m_u - m_l) \alpha^2 \Gamma(\alpha) \ln t} - \\
 &\quad \frac{y_l^\alpha {}_2F_2(\alpha, \alpha; \alpha + 1, \alpha + 1; -y_l)}{(m_u - m_l) \alpha^2 \Gamma(\alpha) \ln t} - \gamma,
 \end{aligned}$$

y_l 和 y_u 见式(13); 当 H_i 为剩余寿命预计值 \hat{L} 时, 有

$$\begin{aligned}
 S_i &= \\
 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B\left(1 + \frac{1}{m_i}, \alpha - \frac{1}{m_i}\right) \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta - \tau^{m_i})^{\alpha - \frac{1}{m_i}}} - \tau - H_i - \\
 \sum_{i=1}^N \frac{\alpha \beta^\alpha m_i \tau^{m_i + 1} {}_2F_1\left(\alpha + 1, 1 + \frac{1}{m_i}; 2 + \frac{1}{m_i}; \frac{-\tau^{m_i}}{\beta - \tau^{m_i}}\right)}{N(m_i + 1)(\beta - \tau^{m_i})^{1 + \alpha}};
 \end{aligned}$$

当 H_i 为置信水平 $(1 - \gamma)$ 下的剩余寿命置信区间 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$ 时, S_i^2 为

$$\begin{aligned}
 S_i^2 &= \\
 \left[\frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N {}_1F_1\left(\frac{-1}{m_i}; 1-\alpha; \frac{-\beta}{\tau^{m_i}} \ln\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) - \tau - H_i^u \right]^2 +
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N {}_1F_1\left(\frac{-1}{m_i}; 1-\alpha; \frac{-\beta}{\tau^{m_i}} \ln\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\right) - \tau - H_i^l \right]^2,$$

H_i^l 和 H_i^u 分别代表 L_l^γ 和 L_u^γ 的具体数值.

当要求式(23)中的误差平方和函数最小时, 可确定超参数 α 和 β , 即构建有约束优化模型

$$\begin{aligned}
 \min S(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^M [E(H_i) - H_i]^2; \\
 \text{s.t. } \alpha &> 0, \beta > 0. \quad (24)
 \end{aligned}$$

其中 $S(\alpha, \beta)$ 见式(23). 为了简化式(24)中优化模型的求解, 引入新变量 $w_1 = \ln \alpha$ 和 $w_2 = \ln \beta$, 可将式(24)中的有约束优化模型转化成无约束优化模型

$$\min S(w_1, w_2) = \sum_{i=1}^M [E(H_i) - H_i]^2. \quad (25)$$

根据式(25)求得变量 w_1 和 w_2 , 即可确定超参数 $\alpha = \exp(w_1)$ 和 $\beta = \exp(w_2)$.

当 $M = 1$ 时, 在拟合专家经验 H 及其验前矩时, 只能得到 $E(H) = H$, 难以确定 2 个超参数. 因此, 引入式(3)中验前分布 $\pi(m, \lambda)$ 的信息熵

$$D(\alpha, \beta) = - \int_{m_l}^{m_u} \int_0^{+\infty} \pi(m, \lambda) \cdot \ln \pi(m, \lambda) d\lambda dm, \quad (26)$$

并利用最大熵方法^[22] 确定超参数 α 和 β . 代入式(3)中的验前分布 $\pi(m, \lambda)$ 并结合式(4)中的验前分布 $\pi(m)$ 以及式(5)中的验前分布 $\pi(\lambda)$, 可得式(26)中信息熵的解析式为

$$\begin{aligned}
 D(\alpha, \beta) &= \ln(m_u - m_l) - \ln \beta + \ln \Gamma(\alpha) + \\
 &\quad \alpha - (\alpha - 1)\varphi(\alpha), \quad (27)
 \end{aligned}$$

其中 $\varphi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \ln \Gamma(\alpha)$. 令 $E(H) = H$, 可确定超参数 α 和 β , 即构建有约束优化模型

$$\begin{aligned}
 \max D(\alpha, \beta). \\
 \text{s.t. } E(H) &= H; \\
 \alpha > 0, \beta > 0. \quad (28)
 \end{aligned}$$

针对 \hat{R} 、 R_L 、 \hat{L} 或 $[L_l^\gamma, L_u^\gamma]$ 中不同形式的 H , 可根据式(11)、(13)、(19)和(22)确定 $E(H)$. 通过求解式(28), 确定超参数 α 和 β .

3 验后分布的推导和可靠性的评估

在确定式(3)中的验前分布 $\pi(m, \lambda)$ 后, 可利用 Bayes 公式, 结合寿命数据 (t_i, δ_i) 的似然函数

$$L(D|m, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(t_i; m, \lambda)^{\delta_i} R(t_i; m, \lambda)^{1 - \delta_i}, \quad (29)$$

可得分布参数 m 和 λ 的验后分布为

$$\pi(m, \lambda|D) \propto \pi(m, \lambda) \cdot L(D|m, \lambda).$$

代入式(3)中的验前分布 $\pi(m, \lambda)$ 、(29)中的似然函数 $L(D|m, \lambda)$ 、(1)中的 $f(t; m, \lambda)$ 以及(2)中的 $R(t; m, \lambda)$, 可得

$$\begin{aligned} \pi(m, \lambda|D) &\propto \\ m^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \cdot \prod_{i=1}^n t_i^{(m-1)\delta_i} \cdot \lambda^{\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i - 1} \cdot \\ \exp \left[- \left(\beta + \sum_{i=1}^n t_i^m \right) \lambda \right] \pi(m). \end{aligned} \quad (30)$$

进一步, 可将 $\pi(m, \lambda|D)$ 转化为分布参数 m 的验后分布 $\pi(m|D)$ 与给定 m 时分布参数 λ 的验后分布 $\pi(\lambda|m, D)$ 的乘积, 即

$$\pi(m, \lambda|D) \propto \pi(m|D) \cdot \pi(\lambda|m, D). \quad (31)$$

其中

$$\pi(m|D) \propto \frac{m^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \cdot \prod_{i=1}^n t_i^{(m-1)\delta_i}}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i}} \cdot \pi(m), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|m, D) &= \frac{\left(\beta + \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i}}{\Gamma \left(\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i \right)} \cdot \lambda^{\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i - 1} \cdot \\ &\exp \left[- \left(\beta + \sum_{i=1}^n t_i^m \right) \lambda \right], \end{aligned} \quad (33)$$

即伽马分布 $\Gamma \left(\lambda; \alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i, \beta + \sum_{i=1}^n t_i^m \right)$.

将式(30)中的验后分布 $\pi(m, \lambda|D)$ 转化为可靠性参数的验后分布, 即可进一步求解可靠性参数的 Bayes 估计, 作为数据融合后的可靠性评估结果. 例如, 结合式(2)中的可靠度函数, 将 $\pi(m, \lambda|D)$ 转化为可靠度 $R(t)$ 的验后分布 $\pi(R(t)|D)$, 可在平方损失函数下, 给出 $R(t)$ 的 Bayes 点估计为

$$\hat{R}_b = \int_0^1 R \cdot \pi(R(t)|D) dR, \quad (34)$$

在置信水平 $(1 - \alpha)$ 下的置信下限 R_b^L 为

$$\int_{R_b^L}^1 \pi(R(t)|D) dR = 1 - \alpha. \quad (35)$$

但因难以推得式(30)中 $\pi(m, \lambda|D)$ 的解析式, 故无法推得可靠性参数的验后分布. 因此, 本文提出一个基于蒙特卡罗马尔可夫(MCMC)抽样的计算方法, 即从 $\pi(m, \lambda|D)$ 中抽取大量 m 和 λ 的样本, 利用这些样本

近似可靠性参数的验后分布, 并利用抽得的样本给出可靠性的评估结果.

由式(31)易知, 可以利用 Gibbs 抽样算法, 先抽取 m 的样本, 再抽取 λ 的样本, 然后利用可靠度和剩余寿命等可靠性参数的函数, 将 m 和 λ 的样本转化为可靠性参数的样本. 为此, 提出以下基于抽样的融合评估计算步骤.

step 1: 令 $i = 1$;

step 2: 利用 Metropolis-Hastings 法^[23] 从式(32)中的验后分布 $\pi(m|D)$ 中抽取样本 m_i ;

step 3: 利用反函数法从式(33)中的验后分布 $\pi(\lambda|m_i, D)$ 中抽取样本 λ_i ;

step 4: 利用式(2)中的可靠度函数 $R(t; m, \lambda)$, 将样本 m_i 和 λ_i 转化为样本 $R_i(t; m_i, \lambda_i)$;

step 5: 利用式(15)中的平均剩余寿命函数 $L(\tau; m, \lambda)$, 将样本 m_i 和 λ_i 转化为样本 $L_i(\tau; m_i, \lambda_i)$;

step 6: 利用式(17)中的剩余寿命置信区间 $[L_l^\alpha, L_u^\alpha]$, 将样本 m_i 和 λ_i 转化为样本 $[L_l^i, L_u^i]$, 并令 $i = i + 1$;

step 7: 重复 step 2 ~ step 6 直到 $i = S$, 可得样本 R_i, L_i, L_l^i 和 L_u^i , 其中 $i = 1, \dots, S$.

将抽得的样本 R_i, L_i, L_l^i 和 L_u^i 升序排列为 $R_1 \leq \dots \leq R_S, L_1 \leq \dots \leq L_S, L_l^1 \leq \dots \leq L_l^S$ 和 $L_u^1 \leq \dots \leq L_u^S$, 可得融合专家经验和寿命数据后可靠性参数的 Bayes 估计. 如可靠度的点估计为

$$\hat{R}_b = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S R_i, \quad (36)$$

置信水平 $(1 - \alpha)$ 下可靠度的置信下限为

$$R_b^L = R_{\alpha S}, \quad (37)$$

剩余寿命的点估计为

$$\hat{L}_b = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S L_i, \quad (38)$$

置信水平 $(1 - \alpha)$ 下剩余寿命的置信区间 $[L_l^b, L_u^b]$ 为

$$\left[\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S L_l^i, \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S L_u^i \right]. \quad (39)$$

4 算例分析

本节利用蓄电池算例数据^[24] 来说明所提出方法的应用. 该算例中分析的蓄电池是某型卫星平台的重要部件, 且表明可以采用威布尔分布描述其寿命. 对于该蓄电池, 收集到的寿命试验数据如图1所示, 其中前2个数据为失效数据, 其余数据为截尾数据. 为便于计算, 将图1中的寿命试验数据除以8760小

时,从而转化为以年为单位的数据.

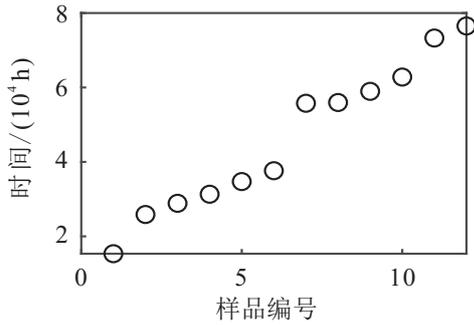
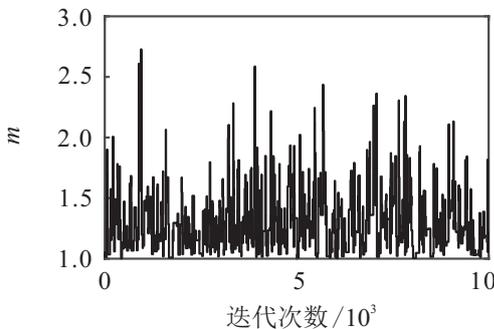
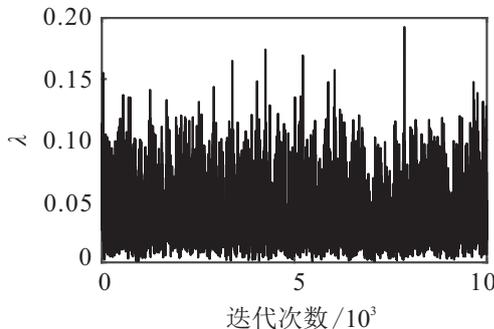


图1 蓄电池的寿命试验数据

针对该蓄电池的可靠性,假定存在2个专家经验数据,分别为蓄电池在0.1年处的可靠度预计值0.9974和在置信水平0.9下1年时的可靠度置信下限0.9049. 设定 m 的验前分布为均匀分布 $[1, 10]$,利用专家经验,结合式(11)中可靠度点估计的验前矩,以及式(13)中可靠度置信下限的验前矩,可确定式(25)并求得超参数 $\alpha = 1.8217$ 和 $\beta = 7.3439$. 取 $S = 10000$,依据分布参数 m 和 λ 的验后分布进行抽样,如图2所示,可进一步生成可靠度和剩余寿命等可靠性参数的验后样本,并根据式(36)~(39)求得融合专家经验后的蓄电池可靠性评估结果,如图3所示,其中置信水平取0.9.



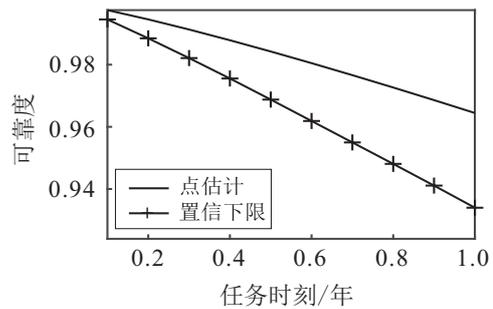
(a) m的验后抽样



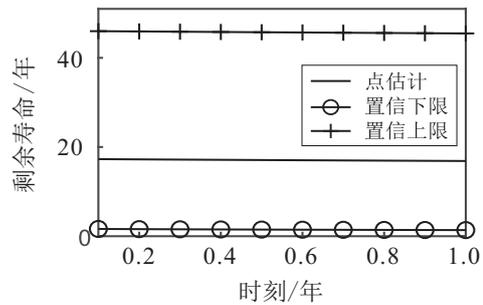
(b) lambda的验后抽样

图2 融合2个专家经验数据后所得的分布参数验后样本

进一步,除了上述专家经验,再引入另外2个专家经验数据,即0.5年处的剩余寿命预计值26.21年,以及置信水平0.9下0.8年处的剩余寿命置信区间



(a) 可靠度评估结果



(b) 剩余寿命预测结果

图3 融合2个专家经验数据后所得的可靠性评估结果

[1.57, 75.69]年,从而构成4个专家经验数据. 类似地,设定 m 的验前分布为均匀分布 $[1, 10]$,利用这4个数据,结合式(11)中可靠度预计值的验前矩、式(13)中可靠度置信下限的验前矩、式(19)中剩余寿命预计值的验前矩,以及式(22)中剩余寿命置信区间的验前矩,根据式(25)求得超参数 $\alpha = 1.5, \beta = 49.2397$. 取 $S = 10000$,对分布参数 m 和 λ 的验后分布进行抽样,并进一步算得蓄电池的可靠性评估结果,如图4所示,其中置信水平取0.9.

由于本文对可靠度和剩余寿命的计算依赖于对验后分布的抽样,抽样的合理与否决定了计算结果的准确性. 又因为分布参数 λ 的验后分布与 m 有关,所以分布参数 m 的抽样更重要. 为此,针对图2中 m 的验后样本,绘制其概率密度函数,并与式(32)中的验后分布 $\pi(m|D)$ 作对比,如图5所示,显然,抽样的概率密度函数与验后分布基本吻合. 此外,图2说明分布参数 m 和 λ 的样本数据链趋于稳定,因而抽样算法是收敛的. 这表明本文提出的验后抽样算法是有效的、准确的.

另一方面,对比图3和图4可知,对于融合专家经验后的蓄电池可靠性评估,融合4个数据后所得的可靠度和剩余寿命高于融合2个数据后所得的评估结果. 从图1中注意到,在试验时间较长时蓄电池没有失效,这说明其可靠性很高,故融合4个数据后所得的可靠性评估结果可信度更高,这也说明在融合专家经验时,数据越多,可靠性评估结果的精度越高.

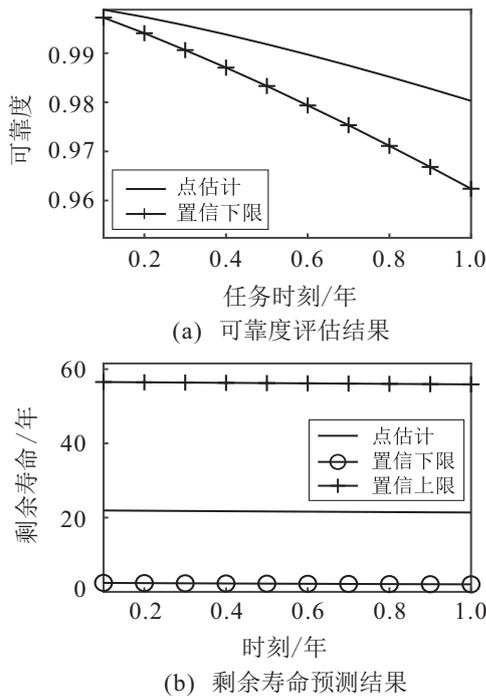


图4 融合4个专家经验数据后所得的可靠性评估结果

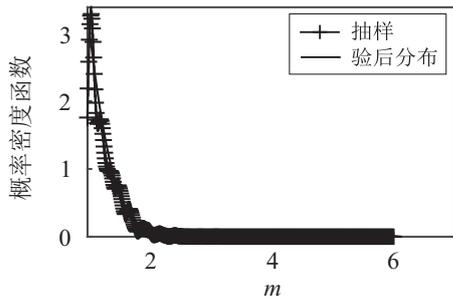


图5 分布参数 m 的验后分布与其抽样的对比

5 结论

针对高可靠性产品,由于失效样本极少,甚至没有,造成传统的可靠性评估方法难以适用.针对这一工程难题,通过融合其他类型的可靠性数据,可以扩充可靠性信息,为产品可靠性的评估提供新的有效途径.针对融合专家经验和寿命试验数据的产品可靠性评估问题,本文考虑了不同类型的专家经验,利用Bayes理论将其视为验前信息,求得不同形式专家经验的验前矩,并通过拟合其具体值与验前矩确定验前分布,随后再将寿命试验数据视为现场信息,给出其似然函数,并与验前分布相结合推得分布参数的验后分布,可对融合专家经验后的产品可靠度和剩余寿命等可靠性指标进行评估.由于验后分布的复杂性,难以推得融合评估结果的解析式,为此,提出了一个基于抽样的计算步骤.通过蓄电池算例分析,表明了本文所提出方法的具体应用.由仿真结果可知,融合评估的结果与实际吻合,且研究表明,融合专家经验的数据越多,评估结果的可信度越高.

参考文献(References)

[1] 尹东亮, 胡涛, 陈童, 等. 考虑多维修台异步多重休假的温贮备冗余系统可靠性模型[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 973-984.
(Yin D L, Hu T, Chen T, et al. Reliability analysis for warm standby redundancy system considering multiple asynchronous vacations of multiple maintenance stations[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 973-984.)

[2] 贾祥, 程志君, 郭波. 基于信息熵和Bayes理论的高可靠性产品可靠性评估[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(7): 1918-1926.
(Jia X, Cheng Z J, Guo B. Reliability evaluation for products based on entropy and Bayes theory[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2020, 40(7): 1918-1926.)

[3] 赵骞, 贾祥, 程志君, 等. 部件寿命服从威布尔分布时典型系统的寿命与剩余寿命估计[J]. 系统工程与电子技术, 2019, 41(7): 1665-1671.
(Zhao Q, Jia X, Cheng Z J, et al. Estimation of lifetime and residual life of typical system with Weibull distributed components[J]. Systems Engineering and Electronics, 2019, 41(7): 1665-1671.)

[4] 贾祥, 王小林, 郭波. 极少失效数据和无失效数据的可靠性评估[J]. 机械工程学报, 2016, 52(2): 182-188.
(Jia X, Wang X L, Guo B. Reliability assessment for very few failure data and zero-failure data[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(2): 182-188.)

[5] Bemment S D, Goodall R M, Dixon R, et al. Improving the reliability and availability of railway track switching by analysing historical failure data and introducing functionally redundant subsystems[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F—Journal of Rail and Rapid Transit, 2018, 232(5): 1407-1424.

[6] 毛松, 师义民, 孙天宇, 等. 竞争失效场合相似产品可靠性的综合评估[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 957-963.
(Mao S, Shi Y M, Sun T Y, et al. Reliability evaluation for relative products with competing risks data[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2014, 34(4): 957-963.)

[7] 郑龙, 杜永浩, 邢立宁, 等. 基于退化数据与marker数据综合的产品可靠性建模分析[J]. 控制与决策, 2020, 35(2): 461-468.
(Zheng L, Du Y H, Xing L N, et al. Product reliability modeling and analysis using degradation and marker data[J]. Control and Decision, 2020, 35(2): 461-468.)

[8] Jia X, Guo B. Inference on the reliability of Weibull distribution by fusing expert judgements and multiply type-I censored data[C]. IEEE International Systems

- Engineering Symposium. Rome, 2018: 1-7.
- [9] 方良海. 产品可靠性评估中的多源信息融合技术研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2006: 28-29.
(Fang G H. Research on the multi-source information fusion techniques in the process of reliability assessment[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2006: 28-29.)
- [10] Savchuk V P, Martz H F. Bayes reliability estimation using multiple sources of prior information: Binomial sampling[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(1): 138-144.
- [11] Mkrtchyan L, Podofilini L, Dang V N. Bayesian belief networks for human reliability analysis: A review of applications and gaps[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015, 139: 1-16.
- [12] Jia X, Wang D, Jiang P, et al. Inference on the reliability of Weibull distribution with multiply type-I censored data[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2016, 150: 171-181.
- [13] Johnston R, Sarkani S, Mazzuchi T, et al. Bayesian-model averaging using MCMC Bayes for web-browser vulnerability discovery[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 183: 341-359.
- [14] Liu P, Qiu Y P, Hu J T, et al. Expert judgments for performance shaping Factors' multiplier design in human reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 194: 106343.
- [15] Compare M, Baraldi P, Bani I, et al. Industrial equipment reliability estimation: A Bayesian Weibull regression model with covariate selection[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 200: 106891.
- [16] 陈浩. 基于多源信息融合的典型卫星平台分系统剩余寿命预测研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2016: 16-18.
(Chen H. Research on residual life prediction for typical satellite platform subsystem based on multi-source information fusion[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2016: 16-18.)
- [17] Uzunoğlu B. An adaptive Bayesian approach with subjective logic reliability networks for preventive maintenance[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2020, 69(3): 916-924.
- [18] Sun B, Yang Z J, Balakrishnan N, et al. An adaptive Bayesian melding method for reliability evaluation via limited failure data: An application to the servo turret[J]. Applied Sciences, 2020, 10(21): 7591.
- [19] Almalki S J, Nadarajah S. Modifications of the weibull distribution: A review[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 124: 32-55.
- [20] Jia X, Guo B. Analysis of non-repairable cold-standby systems in Bayes theory[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2016, 86(11): 2089-2112.
- [21] 贾祥. 基于不等定时截尾数据的卫星平台可靠性评估[M]. 北京: 国防工业出版社, 2020: 128.
(Jia X. The estimation of reliability for satellite platform based on multiply type-I censored data[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2020: 128.)
- [22] Wang Y H, Liu Y M. Bayesian entropy network for fusion of different types of information[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 195: 106747.
- [23] Jia X, Nadarajah S, Guo B. Bayes estimation of $P(Y < X)$ for the Weibull distribution with arbitrary parameters[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 47: 249-259.
- [24] 贾祥. 不等定时截尾数据下的卫星平台可靠性评估方法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2017: 87-88.
(Jia X. The estimation of reliability for satellite platform with multiply type-I censored data[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2017: 87-88.)

作者简介

贾祥(1992—), 男, 副教授, 博士, 从事复杂系统可靠性分析、试验评估等研究, E-mail: jiexiang09@sina.cn;

郭波(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事装备综合保障管理等研究, E-mail: boguo@nudt.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)