控制与决策
Control and Decision

**基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法**

方冰, 韩冰, 朱江

引用本文:
方冰,韩冰,朱江. 基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2657-2666.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0328

---

# 基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法

方 冰†, 韩 冰, 朱 江

(陆军指挥学院，南京 210045)

**摘 要:** 实践中发现,犹豫模糊信息和概率犹豫模糊信息在计算过程中存在着计算繁琐、与数量运算规则不相容等问题. 对此,提出一套基于调和犹豫模糊元的解决方法. 通过定义调和犹豫模糊元为一组概率分布相同的概率犹豫模糊元,在犹豫模糊信息和概率犹豫模糊信息之间架起一座桥梁,将它们纳入统一处理框架. 在此基础上,定义调和犹豫模糊信息的基本运算规则、信息集成算子、距离测度和混合熵测度,构建基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法,并将其应用于陆军合成旅指挥控制能力评估. 数值实验表明: 调和犹豫模糊决策理论克服了已有理论的缺陷,具有计算量可控、易于编程实现、与数量运算规则相容等优势.

**关键词:** 犹豫模糊元；概率犹豫模糊元；调和犹豫模糊元；集成合算子；距离测度；熵测度

**中图分类号:** C934 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2021.0328 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

**引用格式:** 方冰,韩冰,朱江. 基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2657-2666.

# Multi-attribute decision-making method based on the reconciled hesitant fuzzy information

*FANG Bing*†, *HAN Bing*, *ZHU Jiang*

(Army Command College of PLA，Nanjing 210045，China)

**Abstract:** It has been found that hesitant fuzzy information and probabilistic hesitant fuzzy information have some problems with calculating, such as cumbersome calculations and incompatibility with quantitative calculation rules. In this work, we propose a set of solutions, based on the reconciled hesitant fuzzy elements (RHFEs), to solve these problems. By defining the RHFEs as a set of probabilistic hesitant fuzzy elements (PHFEs) with the same probability distribution, this work bridges the gap between hesitant fuzzy information and probabilistic hesitant fuzzy information, and incorporates them into a unified processing framework. Based on this, we build a reconciled hesitant fuzzy multi-attribute decision-making (MADM) method, by developing the operation rules, the information aggregation operators, the distance measures and the hybrid entropy measure for RHFEs, and further apply it to evaluate the command and control (C2) capability of the army's combined brigades. Numerical experiments show that the theory of reconciled hesitant fuzzy decision-making overcomes the shortcomings of existing theories, and has some advantages of controllable calculations, easy to program and compatible with quantitative calculation rules.

**Keywords:** hesitant fuzzy elements；probabilistic hesitant fuzzy elements；reconciled hesitant fuzzy elements；aggregation operator；distance measure；entropy measure

## 0 引 言

模糊概念来自模糊现象,模糊现象在自然界和人类社会中是广泛存在的. 模糊集(fuzzy set, FS)[1] 的核心思想是把取值为 1 或 0 的集合特征函数拓展为可以在单位闭区间 [0, 1] 内任意取值的隶属度函数,用以刻画一个元素属于某个集合的可能程度. 模糊集的出现使得数学理论的研究与应用范围从精确问题拓展至含有模糊现象的领域,是解决复杂决策问题的重要工具. 目前,模糊决策已经成为决策分析中一个非常活跃的研究领域,涌现出一大批优秀研究成果.

2010 年, Torra[2] 针对在复杂多属性决策中,辅助专家在给出评估信息时常常犹豫不决以及多个专家互相不能说服、难以达成一致意见的情形,提出了犹豫模糊集 (hesitant fuzzy set, HFS) 的概念. 作为模糊集的一种重要拓展形式,犹豫模糊集描述了评估对象对于指定集合有多个可能隶属度的情形,增加了决策者评估赋值的灵活性,在现实多属性决策中有广泛的应用场景. 犹豫模糊集的基本描述工具是犹豫模糊元 (hesitant fuzzy element, HFE),它是由多个实值构成的集合,表示评估对象对于指定集合所具有的几个可

**收稿日期:** 2021-02-25；**录用日期:** 2021-07-05.

†通讯作者. E-mail: bingfang_ch@163.com.

能隶属度[3]. 犹豫模糊元能够较为细腻地描述决策者对评估对象的不确定性认知,是多属性决策问题中描述和处理不确定性评估信息的有效工具.

随着研究的不断深入,犹豫模糊集的缺陷也在不断显现,如它对不同评估意见的处理过于简单,无法体现不同评估值的权重信息. 为了更加准确地描述决策者的不确定性认知,国内学者Xu等[4-5]提出了概率犹豫模糊集(probabilistic hesitant fuzzy set, PHFS)的概念. 概率犹豫模糊集的基本描述工具是概率犹豫模糊元(probabilistic hesitant fuzzy element, PHFE),概率犹豫模糊元在犹豫模糊元的基础上增加了每个隶属度的权重信息,即概率,因而能够包含更为丰富的评估信息,能够更加细腻地建模决策者的不确定性认知. 从这个意义上讲,概率犹豫模糊集是对犹豫模糊集的重要改进和推广. 近年来,国内外学者在概率犹豫模糊集的信息测度、信息集成、偏好关系和多属性决策方法等领域取得了丰富成果,且已有研究将理论成果应用于风险投资[6-7]、供应链管理[8]、运输管理[9]、舆情预测[10]等领域. 总之,得益于对概率信息的有效利用,概率犹豫模糊集能够较为精确地建模不确定性评估信息;基于概率犹豫模糊集的决策理论和方法更具合理性和有效性,具有更为广阔的应用前景.

然而,随着研究的持续深入和应用的不断拓展,实践中也发现犹豫模糊元和概率犹豫模糊元在计算中存在着逻辑不一致、计算繁琐、计算量不可控、与数量运算规则不相容等问题,但一直没有得到系统的解决. 在对概率犹豫模糊信息的处理上,文献[11]为了避免人为主观添加数据以及最大限度地利用原始评估信息,首先提出"调和概率犹豫模糊元"的概念,并结合概率犹豫模糊元的信息不完全度提出用于测量概率犹豫模糊元之间差异程度的交叉熵测度;文献[12-13]提出了具体方法将具有不同概率分布的概率语言术语集(probabilistic linguistic term sets, PLTSs)调整为具有相同概率分布的概率语言术语集,用以简化概率语言术语集之间的运算规则;文献[14]给出了完整的概率分裂算法,用于将一组概率分布不同的概率犹豫模糊元调整为一组概率分布相同的概率犹豫模糊元,以此来简化概率犹豫模糊偏好关系的定义和运算;文献[14]同时也指出了概率犹豫模糊运算规则中的逻辑不一致性.

犹豫模糊元和概率犹豫模糊元在实践中存在问题的首要原因是其规范化方法,原有的规范化方法会导致犹豫模糊元的得分值发生改变,从而影响其序关系,计算结果的可信性存在疑问;存在问题的第2个原因是犹豫模糊元和概率犹豫模糊元的加法和乘法运算是基于向量的张量积定义的,随着运算的进行,计算量和计算结果会以指数的方式不断膨胀,从而导致计算量和计算结果的不可控,在编程实现中,这是需要极力避免的. 这些原因也导致了犹豫模糊元和概率犹豫模糊元的加法运算与数乘运算、乘法运算与幂运算之间存在着逻辑上的不一致性.

本文针对上述问题,提出一套基于调和犹豫模糊元的解决方法. 这里,调和犹豫模糊元被定义为一组概率分布相同的概率犹豫模糊元. 调和犹豫模糊元可以由一组概率犹豫模糊元通过概率分裂算法[14]进行概率调整得到;也可以通过将一组犹豫模糊元先映射为一组等概率分布的概率犹豫模糊元,再通过概率分裂的方式调整得到. 调和犹豫模糊元在本质上还是概率犹豫模糊元,而且是成组出现的概率犹豫模糊元. 一组调和犹豫模糊元不仅具有相等的基数,而且具有相同的概率分布;调和犹豫模糊元在继承概率犹豫模糊元基本性质的基础上,也具有一些独特性,特别是在涉及到两个元素的比较和运算时,调和犹豫模糊元能够显示出不同于概率犹豫模糊元的独特优势.

本文在汇总文献[11-16]研究成果的基础上,给出调和犹豫模糊元的定义,以及调和犹豫模糊信息的运算规则、集成算子、距离测度和混合熵测度,构建基于调和犹豫模糊信息的决策理论. 总的来说,调和犹豫模糊理论既适用于概率犹豫模糊信息,也适用于犹豫模糊信息,而且能够避免已有规范化方法对原始评估信息带来的硬性损伤. 最后,本文分别基于TOPSIS算法和调和犹豫模糊信息集成算子构建基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法,并将其运用于陆军合成旅指挥控制能力评估.

## 1 理论基础

### 1.1 犹豫模糊元[3]

**定义1** 设$X$是一个给定的有限集合,犹豫模糊集是$X$的每个元素映射到$[0,1]$子集的函数.

为便于理解,文献[17]给出了犹豫模糊集的数学表达式

$$A=\{\langle x,h_A(x)\rangle|x\in X\}. \tag{1}$$

其中: $h_A(x)$是$[0,1]$中一些实值的集合,表示元素$x\in X$关于犹豫模糊集$A$的几个可能的隶属度,进一步称$h=h_A(x)$为犹豫模糊元.

为对犹豫模糊元进行比较,文献[17]给出了下列排序方法.

**定义2** 设$h$为一个犹豫模糊元,定义$h$的得分函数为

$$s(h)=\frac{1}{l_h}\sum_{\gamma\in h}\gamma, \tag{2}$$

其中$l_h$为$h$中的元素个数,也称为$h$的基数. 对于任意两个犹豫模糊元$h_1$和$h_2$,其比较规则为:

1) 若得分值$s(h_1)>s(h_2)$,则称犹豫模糊元$h_1$优于$h_2$,记为$h_1\succ h_2$;

2) 若得分值$s(h_1)<s(h_2)$,则称犹豫模糊元$h_1$劣于$h_2$,记为$h_1\prec h_2$;

3) 若得分值$s(h_1)=s(h_2)$,则称犹豫模糊元$h_1$和$h_2$无差别,记为$h_1\sim h_2$.

由定义2 可知:犹豫模糊元的得分值$s(h)$直接由$h$中所有元素的均值决定,均值越大,得分值$s(h)$越高,说明犹豫模糊元$h$越优. 然而,定义2并没有考虑两个犹豫模糊元得分值相同但偏差度不同的情形,从统计学意义上讲,这是不全面的.

犹豫模糊元中所有元素关于其均值的偏差度能够刻画这些元素的一致性或相容性程度,其规范性定义如下.

**定义3** 给定一个犹豫模糊元$h$,其偏差度$v(h)$可定义为

$$v(h)=\sqrt{\frac{1}{l_h}\sum_{\gamma\in h}[\gamma-s(h)]^2}. \tag{3}$$

其中: $s(h)$为统计学意义上的均值,$v(h)$为统计学意义上的标准差,$v(h)$反映了犹豫模糊元$h$中的所有元素与其平均值之间的偏差程度.

基于犹豫模糊元$h$的得分值$s(h)$和偏差度$v(h)$,文献[18]提出了一种比定义2更为科学合理的比较和排序犹豫模糊元的方法.

**定义4** 给定任意两个犹豫模糊元$h_1$和$h_2$,$s(h_1)$和$s(h_2)$是其得分值,$v(h_1)$和$v(h_2)$是其偏差度. 则犹豫模糊元$h_1$和$h_2$可作如下比较:

1) 如果得分值$s(h_1)>s(h_2)$,则称犹豫模糊元$h_1$优于$h_2$,记为$h_1\succ h_2$.

2) 如果得分值$s(h_1)<s(h_2)$,则称犹豫模糊元$h_1$劣于$h_2$,记为$h_1\prec h_2$.

3) 如果犹豫模糊元$h_1$和$h_2$的得分值相同,则需进一步比较其偏差度:①若$v(h_1)<v(h_2)$,则称$h_1$优于$h_2$,记为$h_1\succ h_2$; ②若$v(h_1)>v(h_2)$,则称$h_1$劣于$h_2$,记为$h_1\prec h_2$; ③若$v(h_1)=v(h_2)$,则称$h_1$和$h_2$无差别,记为$h_1\sim h_2$.

### 1.2 概率犹豫模糊元[4-5]

**定义5** 设$X$是一个给定有限集合,则定义在$X$上的一个概率犹豫模糊集$H$可表示为

$$H=\{\langle x,h_p(x)\rangle|x\in X\}. \tag{4}$$

其中:集合$h_p(x)=\{\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l_p\}$是描述概率犹豫模糊集$H$的基本工具,通常被称为概率犹豫模糊元;隶属度$\gamma^i\in[0,1](i=1,2,\ldots,l_p)$表示元素$x\in X$属于概率犹豫模糊集$H$的若干可能性;实数$p^i\in(0,1](i=1,2,\ldots,l_p)$表示隶属度$\gamma^i$出现的概率,且满足归一化条件$\sum_{i=1}^{l_p}p^i=1$.

为方便计,本文将涉及到的概率犹豫模糊元统一记为$q=h_p(x)$,其元素一律按照隶属度$\gamma^i(i=1,2,\ldots,l_p)$的值升序排列.

**定义6** 假设$q=\{\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l_p\}$为一个给定的概率犹豫模糊元,$l_p$是其基数,则$q$的得分函数可定义为

$$s(q)=\sum_{i=1}^{l_p}\gamma^i p^i. \tag{5}$$

在得分函数$s(q)$的基础上,概率犹豫模糊元$q$的偏差度可定义为

$$v(q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{l_p}[\gamma^i-s(h)]^2p^i}. \tag{6}$$

由定义6可知,概率犹豫模糊元的得分值和偏差度与犹豫模糊元的得分值和偏差度具有类似的统计学意义. 因此,概率犹豫模糊元的比较规则与犹豫模糊元的比较规则相似,这里不再赘述.

## 2 调和犹豫模糊理论

在概率犹豫模糊理论的基础上,本节提出了调和犹豫模糊元的定义、基本运算规则和集成算子.

### 2.1 调和犹豫模糊元

**定义7** 调和犹豫模糊元是指一组基数相同的概率犹豫模糊元,这组概率犹豫模糊元同时也具有相同的概率分布. 数学上,任意一组调和犹豫模糊元可定义为

$$r_k=q_k(\gamma_k^i|p^i),\ i=1,2,\ldots,l,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

其中:$n$表示这组调和犹豫模糊元的个数,$l$表示这组调和犹豫模糊元的基数,其他符号的定义与概率犹豫模糊元相同.

调和犹豫模糊元可以通过对一组概率犹豫模糊元进行概率调整得到,也可以通过对一组犹豫模糊元进行概率调整得到,因为犹豫模糊元也可以表述为具有等概率分布的概率犹豫模糊元. 这里将后文需要用到的概率分裂算法通过两个例子进行说明.

**例1** 假设$q_1=\{0.4|1\}$, $q_2=\{0.6|0.2,0.7|0.8\}$和$q_3=\{0.2|0.3,0.3|0.3,0.8|0.4\}$为一组概率犹豫模糊元. 通过概率分裂算法,可以将$q_1$、$q_2$和$q_3$调整为

一组调和犹豫模糊元,即

$$r_1 = \{0.4|0.2, 0.4|0.1, 0.4|0.3, 0.4|0.4\},$$

$$r_2 = \{0.6|0.2, 0.7|0.1, 0.7|0.3, 0.7|0.4\},$$

$$r_3 = \{0.2|0.2, 0.2|0.1, 0.3|0.3, 0.8|0.4\}.$$

**例2** 设$h_1 = \{0.4, 0.6\}$和$h_2 = \{0.3, 0.5, 0.7, 0.8\}$是一组犹豫模糊元. 首先,可将$h_1$和$h_2$调整为一组具有等概率分布的概率犹豫模糊元,即

$$q_1 = \{0.4|0.5, 0.6|0.5\},$$

$$q_2 = \{0.3|0.25, 0.5|0.25, 0.7|0.25, 0.8|0.25\};$$

然后,通过概率分裂算法,再将$q_1$和$q_2$调整为一组调和犹豫模糊元,即

$$r_1 = \{0.4|0.25, 0.4|0.25, 0.6|0.25, 0.6|0.25\},$$

$$r_2 = \{0.3|0.25, 0.5|0.25, 0.7|0.25, 0.8|0.25\}.$$

由定义6可知:概率分裂算法对概率犹豫模糊元或犹豫模糊元的得分值和偏差度没有影响. 因此,调整之后的调和犹豫模糊元能够保持原来概率犹豫模糊元或犹豫模糊元之间的序关系.

### 2.2 调和犹豫模糊运算规则

**定义8** 设$r(\gamma^i|p^i), r_1(\gamma_1^i|p^i)$和$r_2(\gamma_2^i|p^i)$是一组基数为$l$的调和犹豫模糊元,其中$i = 1, 2, \ldots, l$或记为$i \in \mathcal{L}$. 给定常量$\lambda > 0$,这组调和犹豫模糊元间的基本运算规则可定义为:

1) $r^c = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{1 - \gamma^i|p^i\}$;

2) $r_1 \bigcup r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\max(\gamma_1^i, \gamma_2^i)|p^i\}$;

3) $r_1 \bigcap r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\min(\gamma_1^i, \gamma_2^i)|p^i\}$;

4) $r^\lambda = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{(\gamma^i)^\lambda|p^i\}$;

5) $\lambda r = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^\lambda|p^i\}$;

6) $r_1 \oplus r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\gamma_1^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\gamma_2^i|p^i\}$;

7) $r_1 \otimes r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\gamma_1^i\gamma_2^i|p^i\}$.

**定理1** 设$r(\gamma^i|p^i), r_1(\gamma_1^i|p^i)$和$r_2(\gamma_2^i|p^i)$是一组基数为$l$的调和犹豫模糊元,其中$i = 1, 2, \ldots, l$或记为$i \in \mathcal{L}$. 给定常量$\lambda > 0, \lambda_1 > 0$和$\lambda_2 > 0$,则定义8给出的基本运算规则满足以下运算定律:

1) $r_1 \oplus r_2 = r_2 \oplus r_1$;

2) $r \oplus (r_1 \oplus r_2) = (r \oplus r_1) \oplus r_2$;

3) $\lambda(r_1 \oplus r_2) = (\lambda r_1) \oplus (\lambda r_2)$;

4) $\lambda_1(\lambda_2 r) = (\lambda_1\lambda_2)r$;

5) $(\lambda_1 + \lambda_2)r = (\lambda_1 r) \oplus (\lambda_2 r)$;

6) $r_1 \otimes r_2 = r_2 \otimes r_1$;

7) $r \otimes (r_1 \otimes r_2) = (r \otimes r_1) \otimes r_2$;

8) $(r_1 \otimes r_2)^\lambda = r_1^\lambda \otimes r_2^\lambda$;

9) $(r^{\lambda_1})^{\lambda_2} = r^{(\lambda_1\lambda_2)}$;

10) $r^{(\lambda_1+\lambda_2)} = r^{\lambda_1} \otimes r^{\lambda_2}$.

**证明** 限于篇幅,这里只证明运算定律3), 4), 5)和10),其他运算定律或可不证自明,或可用类似的方法进行证明.

先证定律3). 由定义8,有

$$r_1 \oplus r_2 = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{\gamma_1^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\gamma_2^i|p^i\},$$

$$\lambda r = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^\lambda|p^i\}.$$

因此,从定律3)的等号左端可以推导为

$$\begin{aligned}&\lambda(r_1 \oplus r_2) = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma_1^i - \gamma_2^i + \gamma_1^i\gamma_2^i)^\lambda|p^i\} = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma_1^i)^\lambda(1 - \gamma_2^i)^\lambda|p^i\};\end{aligned} \tag{8}$$

由定律3)的等号右端可以推导为

$$\begin{aligned}&(\lambda r_1) \oplus (\lambda r_2) = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma_1^i)^\lambda + 1 - (1 - \gamma_2^i)^\lambda - \\ &[1 - (1 - \gamma_1^i)^\lambda][1 - (1 - \gamma_2^i)^\lambda]|p^i\} = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma_1^i)^\lambda(1 - \gamma_2^i)^\lambda|p^i\}.\end{aligned} \tag{9}$$

由式(8)和(9)可得$\lambda(r_1 \oplus r_2) = (\lambda r_1) \oplus (\lambda r_2)$,运算定律3)因此得到证明.

再证定律4). 由定义8,有$\lambda r = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^\lambda|p^i\}$. 因此,运算定律4)可以推导如下:

$$\begin{aligned}&\lambda_1(\lambda_2 r) = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - [(1 - \gamma^i)^{\lambda_2}]^{\lambda_1}|p^i\} = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^{\lambda_1\lambda_2}|p^i\} = (\lambda_1\lambda_2)r.\end{aligned} \tag{10}$$

运算定律4)因此得到证明.

然后证定律5). 由定义8,有$\lambda r = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^\lambda|p^i\}, r_1 \oplus r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\gamma_1^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\gamma_2^i|p^i\}$. 因此,从定律5)的等号左端可以推导为

$$(\lambda_1 + \lambda_2)r = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^{(\lambda_1+\lambda_2)}|p^i\}; \tag{11}$$

从定律5)的等号右端可以推导为

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 r) \oplus (\lambda_2 r) = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^{\lambda_1}(1 - \gamma^i)^{\lambda_2}|p^i\} = \\ &\bigcup_{i \in \mathcal{L}} \{1 - (1 - \gamma^i)^{(\lambda_1+\lambda_2)}|p^i\}.\end{aligned} \tag{12}$$

根据式(11)和(12)可得$(\lambda_1 + \lambda_2)r = (\lambda_1 r) \oplus (\lambda_2 r)$,运算定律5)因此得到证明.

最后证明定律10). 由定义8有$r_1 \otimes r_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{\gamma_1^i\gamma_2^i|p^i\}, r^\lambda = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{L}} \{(\gamma^i)^\lambda|p^i\}$. 因此,定律10)可推导如下:

$$r^{(\lambda_1+\lambda_2)}=\bigcup_{i\in\mathcal{L}}\{(\gamma^i)^{(\lambda_1+\lambda_2)}|p^i\}=$$
$$\bigcup_{i\in\mathcal{L}}\{(\gamma^i)^{\lambda_1}(\gamma^i)^{\lambda_2}|p^i\}=r^{\lambda_1}\otimes r^{\lambda_2}. \tag{13}$$

运算定律10)得到证明. □

### 2.3 调和犹豫模糊信息集成算子

**定义9** 假设$r_k(\gamma_k^i|p^i)(k=1,2,\dots,n)$是一组基数为$l$的调和犹豫模糊元,其中$i=1,2,\dots,l$或记为$i\in\mathcal{L}$. 则调和犹豫模糊加权算术平均算子可定义为

$$\mathop{\oplus}_{k=1}^{n}\mu_k r_k=\bigcup_{i\in\mathcal{L}}\Big\{1-\prod_{k=1}^{n}(1-\gamma_k^i)^{\mu_k}|p^i\Big\}. \tag{14}$$

其中: $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)^{\rm T}$是调和犹豫模糊元$r_k(k=1,2,\dots,n)$的权重向量,且满足限制性条件$\mu_k\in[0,1](k=1,2,\dots,n)$和$\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k=1$.

**定义10** 设$r_k(\gamma_k^i|p^i)(k=1,2,\dots,n)$是一组基数为$l$的调和犹豫模糊元,其中$i=1,2,\dots,l$或记为$i\in\mathcal{L}$. 则调和犹豫模糊加权几何平均算子可定义为

$$\mathop{\otimes}_{k=1}^{n}r_k^{\mu_k}=\bigcup_{i\in\mathcal{L}}\Big\{\prod_{k=1}^{n}(\gamma_k^i)^{\mu_k}\Big|p^i\Big\}. \tag{15}$$

其中: $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)^{\rm T}$是调和犹豫模糊元$r_k(k=1,2,\dots,n)$的权重向量,且满足限制性条件$\mu_k\in[0,1](k=1,2,\dots,n)$和$\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k=1$.

## 3 调和犹豫模糊距离测度

调和犹豫模糊信息的独特优势,在于可以方便地对其进行比较和运算. 基于调和犹豫模糊元的距离测度能够有效避免原有规范化方法对原始概率犹豫模糊评估信息带来的损伤.

### 3.1 调和犹豫模糊距离测度的定义

**定义11** 任意两个调和犹豫模糊元$r_1$和$r_2$,如果函数$d(r_1,r_2)$是其距离测度,则函数$d(r_1,r_2)$应该满足以下3个公理性条件:

1) 非负性: $0\leqslant d(r_1,r_2)\leqslant 1$;

2) 反身性: $d(r_1,r_2)=0$当且仅当$r_1=r_2$;

3) 交换性: $d(r_1,r_2)=d(r_2,r_1)$.

**定义12** 假设$r_1=q_1(\gamma_1^i|p^i)$和$r_2=q_2(\gamma_2^i|p^i)$是两个基数为$l$的调和犹豫模糊元,其中$i=1,2,\dots,l$, 则调和犹豫模糊Hamming距离测度可定义为

$$d_1(r_1,r_2)=\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|p^i, \tag{16}$$

调和犹豫模糊Euclidean距离测度可定义为

$$d_2(r_1,r_2)=\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(\gamma_1^i-\gamma_2^i)^2p^i}. \tag{17}$$

进一步拓展上面的距离测度定义,调和犹豫模糊广义距离测度可定义为

$$d_3(r_1,r_2)=\Big(\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|^\lambda p^i\Big)^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{18}$$

其中常量$\lambda>0$.

**例3** 由例1可知: 概率犹豫模糊元$\{0.5|1\}$可以调整为任意概率分布的概率犹豫模糊元,由式(16), 任意调和犹豫模糊元$r$与$\{0.5|1\}$的Hamming距离测度可表示为

$$d_1(r,\{0.5|1\})=\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i. \tag{19}$$

值得注意的是,式(19)所示的距离公式会在下文的距离熵定义中发挥重要作用.

### 3.2 调和犹豫模糊距离测度的性质

**定理2** 定义12给出的3个距离测度公式都能够满足定义11所要求的调和犹豫模糊距离测度的3个公理性条件.

**证明** 由于Hamming距离测度和Euclidean距离测度是广义距离测度的特例,这里只对广义距离测度$d_3$的性质进行证明.

1) 非负性. 因为$\gamma_1^i,\gamma_2^i\in[0,1]$, $\forall i=1,2,\dots,l$, 所以有下列不等式关系:

$$0\leqslant|\gamma_1^i-\gamma_2^i|\leqslant 1,\ \forall i=1,2,\dots,l. \tag{20}$$

根据调和犹豫模糊元的概率限制条件$\sum\limits_{i=1}^{l}p^i=1$和$p^i\in(0,1],i=1,2,\dots,l$,可推导出如下不等式关系:

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|^\lambda p^i\leqslant 1. \tag{21}$$

因此有

$$0\leqslant d_3(r_1,r_2)\leqslant 1. \tag{22}$$

广义距离测度$d_3(r_1,r_2)$的非负性得到证明.

2) 反身性. 为了证明广义距离测度的反身性,需要证明如下的充分必要关系:

$$d_3(r_1,r_2)=0\Leftrightarrow r_1=r_2. \tag{23}$$

① 必要性. 在两个调和犹豫模糊元相同的条件下,即$r_1=r_2$时,必定存在如下等式关系:

$$\gamma_1^i=\gamma_2^i,\ \forall i=1,2,\dots,l. \tag{24}$$

从这个等式关系出发,必定会有下式成立:

$$d_3(r_1,r_2)=\Big(\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|^\lambda p^i\Big)^{\frac{1}{\lambda}}=0. \tag{25}$$

必要性关系$d_3(r_1,r_2)=0\Leftarrow r_1=r_2$得到证明.

②充分性. 在广义的调和犹豫模糊距离等于零的条件下,因为$p^i\in(0,1],\forall i=1,2,\dots,l$,所以有

$$\gamma_1^i=\gamma_2^i,\ \forall i=1,2,\dots,l. \tag{26}$$

充分性关系$d_3(r_1,r_2)=0\Rightarrow r_1=r_2$得到证明.

3) 交换性. 根据式(18)所示的广义调和犹豫模糊距离测度定义,可得如下等式关系:

$$d_3(r_1,r_2)=d_3(r_2,r_1). \tag{27}$$

广义距离测度$d_3(r_1,r_2)$的交换性得到证明.

所以说,定义12所给出的3个距离测度公式能够满足定义11所要求的调和犹豫模糊距离测度的3个公理性条件. □

## 4 调和犹豫模糊熵测度

本质上,调和犹豫模糊元是一组概率分布相同的概率犹豫模糊元. 因此,本节针对调和犹豫模糊元的熵测度定义同样适用于概率犹豫模糊元.

### 4.1 距离熵测度

根据文献[15]中犹豫模糊元的距离熵定义,调和犹豫模糊元的距离熵测度可定义如下.

**定义13** 给定一组基数为$l$的调和犹豫模糊元$r=q(\gamma^i|p^i),i=1,2,\dots,l$. 如果函数$E(r)$是其距离熵测度,则$E(r)$应满足以下5个公理性条件:

1) $0\leqslant E(r)\leqslant 1$;

2) $E(r)=0$当且仅当$r=\{0|1\}$或$r=\{1|1\}$;

3) $E(r)=1$当且仅当$r=\{0.5|1\}$;

4) $E(r)=E(r^c)$;

5) $E(r)$的值关于距离测度$d(r,\{0.5|1\})$递减.

在定义13所要求的公理性条件下,基于距离公式(16),可以构建如下的距离熵公式:

$$E_1(r)=\sum_{i=1}^{l}(1-2|\gamma^i-0.5|)p^i, \tag{28}$$

其中分项$\sum\limits_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i$正是$d_1(r,\{0.5|1\})$的表达式,如式(19)所示. 显然,距离熵公式$E_1(r)$能够满足定义13所要求的5个公理性条件.

### 4.2 伪距离熵测度

**定义14** 给定两个基数为$l$的调和犹豫模糊元$r_1=q_1(\gamma_1^i|p^i)$和$r_2=q_2(\gamma_2^i|p^i),i=1,2,\dots,l$. 则调和犹豫模糊元$r_1$和$r_2$之间的伪距离测度可定义为

$$d'(r_1,r_2)=\Big|\sum_{i=1}^{l}\gamma_1^ip^i-\sum_{i=1}^{l}\gamma_2^ip^i\Big|=|s(r_1)-s(r_2)|, \tag{29}$$

其中函数$s(r_1)$和$s(r_2)$分别为调和犹豫模糊元$r_1$和$r_2$的得分函数.

根据文献[16]中概率犹豫模糊元的伪距离熵定义,调和犹豫模糊元的伪距离熵测度可定义如下.

**定义15** 给定基数为$l$的调和犹豫模糊元$r=q(\gamma^i|p^i),i=1,2,\dots,l$. 如果函数$E(r)$是其伪距离熵测度,则$E(r)$应满足以下5个公理性条件:

1) $0\leqslant E(r)\leqslant 1$;

2) $E(r)=0$ 当且仅当$r=\{0|1\}$或$r=\{1|1\}$;

3) $E(r)=1$当且仅当$r=\{0.5|1\}$;

4) $E(r)=E(r^c)$;

5) $E(r)$ 的值关于伪距离测度 $d'(r,\{0.5|1\})$ 递减.

在定义15所要求的公理性条件下,基于伪距离公式(29),可以构建如下伪距离熵公式:

$$E_2(r)=1-2\Big|\sum_{i=1}^{l}\gamma^ip^i-0.5\Big|=1-2|s(r)-0.5|, \tag{30}$$

其中函数$s(r)$为调和犹豫模糊元$r$的得分函数.

### 4.3 混合熵测度

本质上讲,距离熵是对个体不确定性的加权平均,而伪距离熵是对整体不确定性的度量. 因此,可在整体不确定性与个体不确定性之间进行适当权衡,提出如下式所示的混合熵测度:

$$E_3(r)=(1-\alpha)E_1(r)+\alpha E_2(r)=$$
$$1-2\alpha|s(r)-0.5|-2(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i, \tag{31}$$

其中$\alpha\in[0,1]$为权衡系数. 根据混合熵的定义,距离熵和伪距离熵只是其特例而已.

为了对上述3种熵测度进行比较,本文对5个调和犹豫模糊元的熵测度的计算结果如表1所示,对另外5个概率犹豫模糊元的熵测度的计算结果如表2所示. 在计算中,混合熵的权衡系数取为$\alpha=0.5$.

**表1 调和犹豫模糊熵计算示例 ($\alpha=0.5$)**

| 调和犹豫模糊元 | $E_1(r)$ | $E_2(r)$ | $E_3(r)$ |
|---|---|---|---|
| $r=\{0.0\|0.5,1.0\|0.5\}$ | 0 | 1 | 0.5 |
| $r=\{0.2\|0.5,0.8\|0.5\}$ | 0.4 | 1 | 0.7 |
| $r=\{0.4\|0.5,0.6\|0.5\}$ | 0.8 | 1 | 0.9 |
| $r=\{0.6\|0.5,0.6\|0.5\}$ | 0.8 | 0.8 | 0.8 |
| $r=\{0.4\|0.5,0.4\|0.5\}$ | 0.8 | 0.8 | 0.8 |

**表2 概率犹豫模糊熵计算示例 ($\alpha=0.5$)**

| 概率犹豫模糊元 | $E_1(q)$ | $E_2(q)$ | $E_3(q)$ |
|---|---|---|---|
| $q=\{0.4\|0.5,0.6\|0.5\}$ | 0.8 | 1 | 0.90 |
| $q=\{0.4\|0.4,0.6\|0.6\}$ | 0.8 | 0.96 | 0.88 |
| $q=\{0.4\|0.3,0.6\|0.7\}$ | 0.8 | 0.92 | 0.86 |
| $q=\{0.4\|0.2,0.6\|0.8\}$ | 0.8 | 0.88 | 0.84 |
| $q=\{0.4\|0.0,0.6\|1.0\}$ | 0.8 | 0.80 | 0.80 |

由表1和表2的计算结果可知: 伪距离熵对得分值相同的调和犹豫模糊元无法区分,如表1中的$E_2(r)$所示;距离熵对隶属度和隶属度的补无法区分,如表2中的$E_1(q)$所示;但是,混合熵能够在保留距离

熵和伪距离熵的优点的同时克服它们的缺点.

## 5 调和犹豫模糊多属性决策方法

本节以调和犹豫模糊理论为基础, 分别基于TOPSIS算法,加权算术平均算子和加权几何平均算子构建了调和犹豫模糊多属性决策方法.

### 5.1 问题描述

假设一个多属性决策问题包括$m$个备选方案和$n$个评价属性. 令集合$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为备选方案集,集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$为评价属性集,$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$为属性权重向量. 进一步假设属性权重向量$\boldsymbol{w}$为未知,但满足限制条件$w_j \in [0,1]$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) 和$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. 本文目标是在属性权重向量未知的条件下,对多个备选方案$x_i$($i = 1, 2, \ldots, m$)进行优劣排序. 由于受环境压力、问题复杂性和自身认知程度等因素的影响,决策者在评估时往往会在一些评估值之间犹豫不决. 因此,决策者给出方案$x_i$($i = 1, 2, \ldots, m$)关于属性$a_j$($j = 1, 2, \ldots, n$)的评估值通常为概率犹豫模糊元. 将决策者给出的评估信息按照矩阵的形式排列出来,可以得到如下的概率犹豫模糊决策矩阵:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

矩阵$\boldsymbol{R}$中的所有列向量均为一组调和犹豫模糊元.

### 5.2 基于混合熵确定属性权重向量

根据式(31)中混合熵测度的定义,关于各属性的调和犹豫模糊信息的平均熵可计算为

$$E_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E_3(r_{ij}),\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

由信息熵理论可知,平均熵$E_j$($j = 1, 2, \ldots, n$)的值越小,相应属性包含的确定性评价信息越多,关于该属性的评价信息越有价值. 因此,各属性的权重可以计算为

$$w_j = \frac{1 - E_j}{\sum_{j=1}^{n}(1 - E_j)},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

### 5.3 基于TOPSIS的多属性决策方法

TOPSIS方法是基于双基点的经典排序算法,其正负理想解可定义如下.

**定义16** 根据得分值的大小,概率犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{R}$的正理想解(reference positive ideal solution, R-PIS)可定义为

$$R^+ = \{r_j^+ = \max_{i=1,2,\ldots,m} s(r_{ij}),\ j = 1, 2, \ldots, n\}; \tag{35}$$

其负理想解 (reference negative ideal solution, R-NIS)可定义为

$$R^- = \{r_j^- = \min_{i=1,2,\ldots,m} s(r_{ij}),\ j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{36}$$

根据定义16,各备选方案$x_i$($i = 1, 2, \ldots, m$)与概率犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{R}$的正理想解之间的加权距离可计算为

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^{n} w_j d_2(r_{ij}, r_j^+),\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{37}$$

各备选方案$x_i$($i = 1, 2, \ldots, m$)与$\boldsymbol{R}$ 的负理想解之间的加权距离可计算为

$$D_i^- = \sum_{j=1}^{n} w_j d_2(r_{ij}, r_j^-),\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{38}$$

式(37)和(38)中均使用了调和犹豫模糊Euclidean距离测度. 因此,各备选方案$x_i$($i = 1, 2, \ldots, m$)与决策矩阵$\boldsymbol{R}$的正理想解之间的相对贴近度可定义为

$$\mathrm{CI}(x_i) = \frac{D_i^-}{D_i^- + D_i^+},\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{39}$$

根据$\mathrm{CI}(x_i)$($i = 1, 2, \ldots, m$)的值即可对各备选方案进行排序,$\mathrm{CI}(x_i)$的值越大,备选方案$x_i$越优秀.

### 5.4 基于信息集成的多属性决策方法

基于信息集成的方式进行决策需要对决策矩阵$\boldsymbol{R}$在横向上进一步概率调整,使$\boldsymbol{R}$在整体上成为一个调和犹豫模糊决策矩阵. 然后按照式(14)或(15)所示的加权平均方式对各属性的评价信息进行综合集成,再比较其综合得分值即可.

## 6 实例分析

信息化战争时代,新型陆军合成旅是执行“能打仗、打胜仗”使命任务的基本作战单元,指挥控制能力是其完成体系作战任务的核心要素. 加强合成旅指挥控制能力评估是贯彻习主席“加快把指挥能力搞过硬”指示精神的重要途径. 积极探索建立合成旅指挥控制能力评估指标体系,并构建相应的评估模型和评估方法,能够帮助各级指挥员厘清指挥控制的本质内涵,科学组织合成旅指挥控制能力评估,加快推进陆军合成部队转型建设. 本文以打赢未来体系化战争为目标,根据陆军转型建设需要和指挥控制体系建设现状,基于OODA环提出了如表3所示的合成旅指挥控制能力评估指标体系. 为准确掌握所属合成部队能力建设底数,某集团军机关综合运用调阅查询、汇报座谈、问卷调查、理论考查、技能考核、系统验

表 3 合成旅指挥控制能力评估指标体系

| 评估指标 | 指标含义 |
|---|---|
| 态势评估能力 $a_1$ | 能够将零散、杂乱、表象的战场情报资料融合成完整、精确、有序的情报结论 |
| 筹划决策能力 $a_2$ | 能够提出关键信息需求,高效完成"以指挥员决策为中心"的作战筹划,及时定下决心 |
| 协调控制能力 $a_3$ | 部队行动有序,与友邻协同顺畅,参战分队效能发挥明显,部队整体优势明显,作战重点突出 |

表 4 概率犹豫模糊决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

| 属性 | 方案 | $\boldsymbol{R}$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $x_1$ | $\{0.72\|0.4, 0.72\|0.2, 0.76\|0.2, 0.76\|0.2\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.75\|0.4, 0.75\|0.2, 0.75\|0.2, 0.75\|0.2\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.54\|0.4, 0.58\|0.2, 0.58\|0.2, 0.60\|0.2\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.52\|0.4, 0.55\|0.2, 0.55\|0.2, 0.55\|0.2\}$ |
| $a_2$ | $x_1$ | $\{0.53\|0.2, 0.55\|0.1, 0.55\|0.2, 0.56\|0.1, 0.56\|0.1, 0.56\|0.3\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.59\|0.2, 0.59\|0.1, 0.62\|0.2, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.66\|0.3\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.64\|0.2, 0.64\|0.1, 0.64\|0.2, 0.67\|0.1, 0.67\|0.1, 0.67\|0.3\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.55\|0.2, 0.55\|0.1, 0.55\|0.2, 0.55\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.3\}$ |
| $a_3$ | $x_1$ | $\{0.68\|0.5, 0.68\|0.1, 0.77\|0.4\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.58\|0.5, 0.62\|0.1, 0.62\|0.4\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.62\|0.5, 0.62\|0.1, 0.62\|0.4\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.67\|0.5, 0.71\|0.1, 0.71\|0.4\}$ |

证、战备演练、战备拉动和检验性演习等方法,对所属4个合成旅 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的指挥控制能力进行了专项评估. 为清晰表达不同意见,评估数据以概率犹豫模糊元的形式给出,并经过一定的预处理,最终得到了如表4所示的概率犹豫模糊决策矩阵 $\boldsymbol{R}$. 在决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中,每个列向量都是一组调和犹豫模糊元,其代表的评估信息是某个分项的综合评估结果. 本文目标是根据决策矩阵 $\boldsymbol{R}$,对4个合成旅 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的指挥控制能力进行综合排序.

### 6.1 确定属性权重向量

论文采用熵权法确定属性权重向量,并采用混合熵的概念,其具体步骤如下.

step 1: 根据式(28)计算决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的距离熵矩阵为

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 0.5280 & 0.8980 & 0.5680 \\ 0.5000 & 0.7540 & 0.8000 \\ 0.8640 & 0.6900 & 0.7600 \\ 0.9240 & 0.8760 & 0.6200 \end{bmatrix}.$$

step 2: 根据式(30)计算决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的伪距离熵矩阵

$$\boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 0.5280 & 0.8980 & 0.5680 \\ 0.5000 & 0.7540 & 0.8000 \\ 0.8640 & 0.6900 & 0.7600 \\ 0.9240 & 0.8760 & 0.6200 \end{bmatrix}.$$

step 3: 确定决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的混合熵矩阵 $\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$. 这里 $\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$ 是特例,因为决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中所有概率犹豫模糊元的隶属度均大于0.5.

step 4: 基于混合熵矩阵 $\boldsymbol{E}_3$,根据式(34)将各属性的权重确定为: $w_1 = 0.3679, w_2 = 0.2430, w_3 = 0.3891$.

### 6.2 基于TOPSIS算法进行排序

TOPSIS算法是一种基于理想参考点的决策方法,其具体步骤如下.

step 1: 根据式(5),决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的得分矩阵计算为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.7360 & 0.5510 & 0.7160 \\ 0.7500 & 0.6230 & 0.6000 \\ 0.5680 & 0.6550 & 0.6200 \\ 0.5380 & 0.5620 & 0.6900 \end{bmatrix}.$$

step 2: 基于得分矩阵 $\boldsymbol{S}$,根据定义(16),将决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的正理想解确定为 $R^+ = \{r_{21}, r_{32}, r_{13}\}$;负理想解确定为 $R^- = \{r_{41}, r_{12}, r_{23}\}$.

step 3: 根据式(17),计算4个合成旅各属性值与正理想解 $R^+$ 各属性值的Euclidean距离测度矩阵

$$\boldsymbol{D}^+ = \begin{bmatrix} 0.0241 & 0.1044 & 0 \\ 0 & 0.0369 & 0.1198 \\ 0.1836 & 0 & 0.1056 \\ 0.2125 & 0.0934 & 0.0397 \end{bmatrix}.$$

step 4: 根据式(17),计算4个合成旅各属性值与负理想解 $R^-$ 各属性值的Euclidean距离测度矩阵

$$\boldsymbol{D}^- = \begin{bmatrix} 0.1985 & 0 & 0.1198 \\ 0.2125 & 0.0747 & 0 \\ 0.0319 & 0.1044 & 0.0283 \\ 0 & 0.0158 & 0.0900 \end{bmatrix}.$$

step 5: 根据式(39),4个合成旅与正理想解的相对贴近度可计算为: $\mathrm{CI}(x_1) = 0.7776, \mathrm{CI}(x_2) = 0.6341, \mathrm{CI}(x_3) = 0.3070, \mathrm{CI}(x_4) = 0.2503$.

step 6: 根据相对贴近度的值, 可以将4个合成旅按其指挥控制能力排序为$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$.

### 6.3 基于信息集成算子进行排序

采用信息集成的方式, 需要对表4所示的决策矩阵$\boldsymbol{R}$进一步进行概率调整, 其步骤如下:

step 1: 调整后的调和犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{R}$如表5所示.

step 2: 根据式(14), 采取加权算术平均的方式, 将决策矩阵$\boldsymbol{R}$中的评估信息进行横向集成, 并求其得分值, 如表6所示; 也可采取加权几何平均的方式, 根据式(15), 将决策矩阵$\boldsymbol{R}$中的评估信息进行横向集成, 并求其得分值, 如表7所示.

step 3: 根据表6和表7的计算结果, 可将4个合成旅按其指挥控制能力排序为$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$.

**表 5　调和犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{R}$**

| 属性 | 方案 | $\boldsymbol{R}$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $x_1$ | $\{0.72\|0.2, 0.72\|0.1, 0.72\|0.1, 0.72\|0.1, 0.72\|0.1, 0.76\|0.1, 0.76\|0.1, 0.76\|0.2\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.75\|0.2, 0.75\|0.1, 0.75\|0.1, 0.75\|0.1, 0.75\|0.1, 0.75\|0.1, 0.75\|0.1, 0.75\|0.2\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.54\|0.2, 0.54\|0.1, 0.54\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.60\|0.2\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.52\|0.2, 0.52\|0.1, 0.52\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.2\}$ |
| $a_2$ | $x_1$ | $\{0.53\|0.2, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.56\|0.1, 0.56\|0.1, 0.56\|0.1, 0.56\|0.2\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.59\|0.2, 0.59\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.66\|0.1, 0.66\|0.2\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.64\|0.2, 0.64\|0.1, 0.64\|0.1, 0.64\|0.1, 0.67\|0.1, 0.67\|0.1, 0.67\|0.1, 0.67\|0.2\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.55\|0.2, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.55\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.2\}$ |
| $a_3$ | $x_1$ | $\{0.68\|0.2, 0.68\|0.1, 0.68\|0.1, 0.68\|0.1, 0.68\|0.1, 0.77\|0.1, 0.77\|0.1, 0.77\|0.2\}$ |
| | $x_2$ | $\{0.58\|0.2, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.58\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.2\}$ |
| | $x_3$ | $\{0.62\|0.2, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.1, 0.62\|0.2\}$ |
| | $x_4$ | $\{0.67\|0.2, 0.67\|0.1, 0.67\|0.1, 0.67\|0.1, 0.71\|0.1, 0.71\|0.1, 0.71\|0.1, 0.71\|0.2\}$ |

**表 6　加权算术平均的方式**

| 方案 | 综合评估信息 | 得分值 |
|---|---|---|
| $x_1$ | $\{0.6655\|0.2, 0.6690\|0.1, 0.6690\|0.1, 0.6690\|0.1, 0.6708\|0.1, 0.7265\|0.1, 0.7265\|0.1, 0.7265\|0.2\}$ | 0.6915 |
| $x_2$ | $\{0.6550\|0.2, 0.6550\|0.1, 0.6613\|0.1, 0.6613\|0.1, 0.6743\|0.1, 0.6743\|0.1, 0.6829\|0.1, 0.6829\|0.2\}$ | 0.6685 |
| $x_3$ | $\{0.5976\|0.2, 0.5976\|0.1, 0.5976\|0.1, 0.6109\|0.1, 0.6190\|0.1, 0.6190\|0.1, 0.6190\|0.1, 0.6258\|0.2\}$ | 0.6110 |
| $x_4$ | $\{0.5916\|0.2, 0.5916\|0.1, 0.5916\|0.1, 0.6012\|0.1, 0.6207\|0.1, 0.6270\|0.1, 0.6270\|0.1, 0.6270\|0.2\}$ | 0.6096 |

**表 7　加权几何平均的方式**

| 方案 | 综合评估信息 | 得分值 |
|---|---|---|
| $x_1$ | $\{0.6536\|0.2, 0.6596\|0.1, 0.6596\|0.1, 0.6596\|0.1, 0.6624\|0.1, 0.7092\|0.1, 0.7092\|0.1, 0.7092\|0.2\}$ | 0.6785 |
| $x_2$ | $\{0.6402\|0.2, 0.6402\|0.1, 0.6479\|0.1, 0.6479\|0.1, 0.6650\|0.1, 0.6650\|0.1, 0.6752\|0.1, 0.6752\|0.2\}$ | 0.6572 |
| $x_3$ | $\{0.5938\|0.2, 0.5938\|0.1, 0.5938\|0.1, 0.6097\|0.1, 0.6165\|0.1, 0.6165\|0.1, 0.6165\|0.1, 0.6242\|0.2\}$ | 0.6083 |
| $x_4$ | $\{0.5818\|0.2, 0.5818\|0.1, 0.5818\|0.1, 0.5939\|0.1, 0.6074\|0.1, 0.6153\|0.1, 0.6153\|0.1, 0.6153\|0.2\}$ | 0.5990 |

### 6.4 比较分析

表4中的数据来源于文献[4], 并以加权算术平均的方式进行了预处理. 数据预处理使用的是式(14), 4个专家的权重相等, 结果保留两位小数. 论文所用3种方法的排序结果与文献[4]所用3种方法的排序结果如表8所示.

**表 8　排序结果比较**

| 方法 | 排序结果 |
|---|---|
| TOPSIS算法 | $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ |
| 加权算术平均 | $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ |
| 加权几何平均 | $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ |
| 文献[4]中HPFO$^{\alpha}$WA算子 | $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ |
| 文献[4]中HPFO$^{\varepsilon}$WA算子 | $x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$ |
| 文献[4]中HPFOWA算子 | $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ |

由表8的排序结果可知: 本文所用3种方法的排序结果完全一致, 并与文献[4]所用方法的排序结果基本一致, 这充分说明了本文方法的合理性和有效性. 从计算过程来看, 基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法具有以下优势:

1) 调和犹豫模糊信息的运算规则利于编程实现, 计算量可控;

2) 概率犹豫模糊元和犹豫模糊元都可经过简单的数据预处理转换成调和犹豫模糊元, 从而实现处理方法的统一;

3) 基于概率分裂算法的概率调整过程不会改变原来概率犹豫模糊元的得分值、偏差度和熵测度等, 能够有效避免原有规范化方法带来的信息结构改变;

4) 调和犹豫模糊混合熵测度能够克服原有熵测度的缺点, 具有较强的区分能力;

5) 调和犹豫模糊基本运算规则能够满足交换律、结合律、分配律、封闭性和相容性等特点.

## 7 结论

本文针对犹豫模糊信息和概率犹豫模糊信息在实践应用中出现的问题,提出了基于调和犹豫模糊元的解决方法,新方法能够把犹豫模糊信息和概率犹豫模糊信息纳入统一处理框架. 在调和犹豫模糊元定义的基础上,本文系统地定义了调和犹豫模糊信息的基本运算规则、集成算子、距离测度和混合熵测度,基本构建了调和犹豫模糊决策理论. 最后,本文将理论成果应用于陆军合成旅指挥控制能力评估. 数值实验表明: 本文所提出基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法具有逻辑结构清晰、易于编程实现、计算量可控、计算结果客观有效等特点.

### 参考文献(References)


[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010: 25(6): 529-539.

[3] 徐泽水, 赵华. 犹豫模糊集理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 308-382.
(Xu Z S, Zhao H. Hesitant fuzzy sets theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2018: 308-382.)

[4] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

[5] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.

[6] Tian X L, Xu Z S, Fujita H. Sequential funding the venture project or not? A prospect consensus process with probabilistic hesitant fuzzy preference information[J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 161: 172-184.

[7] Zhou W, Xu Z S. Expected hesitant VaR for tail decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment[J]. Applied Soft Computing, 2017, 60: 297-311.

[8] 武文颖. 基于广义概率犹豫模糊信息的群决策方法研究及其在供应商选择中的应用[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2019.
(Wu W Y. Research on group decision making methods with generalized probabilistic hesitant fuzzy information and their applications in supplier selection[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2019.)

[9] Jiang F J, Ma Q G. Multi-attribute group decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment with application to evaluate the transformation efficiency[J]. Applied Intelligence, 2018, 48(4): 953-965.

[10] 周小领, 马庆功. 概率犹豫模糊算法及其网络舆情预测模型选择[J]. 计算机工程与应用, 2019, 55(4): 179-184.
(Zhou X L, Ma Q G. Probabilistic hesitant fuzzy algorithm and its application for selection method of network public opinion prediction model[J]. Computer Engineering and Applications, 2019, 55(4): 179-184.)

[11] 朱峰, 徐济超, 刘玉敏, 等. 基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(8): 1977-1986.
(Zhu F, Xu J C, Liu Y M, et al. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision method based on signed distance and cross entropy[J]. Control and Decision, 2020, 35(8): 1977-1986.)

[12] 胡悦, 江登英, 李贺. 基于双向投影法的概率语言多属性群决策[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(9): 2052-2059.
(Hu Y, Jiang D Y, Li H. Probabilistic linguistic multi-attribute group decision-making based on bidirectional projection method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2020, 42(9): 2052-2059.)

[13] Wu X L, Liao H C, Xu Z S, et al. Probabilistic linguistic MULTIMOORA: A multicriteria decision making method based on the probabilistic linguistic expectation function and the improved Borda rule[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3688-3702.

[14] Lin M W, Zhan Q S, Xu Z S. Decision making with probabilistic hesitant fuzzy information based on multiplicative consistency[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2020, 35(8): 1233-1261.

[15] Farhadinia B, Xu Z S. Information measures for hesitant fuzzy sets and their extensions[M]. Singapore: Springer, 2019.

[16] Su Z, Xu Z S, Zhao H, et al. Entropy measures for probabilistic hesitant fuzzy information[J]. IEEE Access, 2019, 7: 65714-65727.

[17] Xia Meimei, Xu Zeshui. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3) : 395-407.

[18] Chen Na, Xu Zeshui, Xia Meimei. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.


### 作者简介


方冰 (1980−), 男, 讲师, 博士, 从事信息融合、军事运筹等研究, E-mail: bingfang_ch@163.com;

韩冰 (1976−), 男, 副教授, 博士, 从事军事运筹、建模与仿真等研究, E-mail: hbgfy@163.com;

朱江 (1981−) 男, 副教授, 博士, 从事军事运筹、建模与仿真、态势融合等研究, E-mail: pearlriver_1981@163.com.


(责任编辑: 孙艺红)