

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法

覃灏, 李军华

引用本文:

覃灏,李军华. 基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2808–2817.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0131>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 基于黑洞多目标进化算法的永磁直线同步电机优化设计

Optimization of a tubular coreless linear PM synchronous machine based on multi-objective blackhole evolutionary algorithm

*控制与决策*. 2022, 37(6): 1567–1572 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0869>

#### 基于向量角分解的高维多目标进化算法

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

*控制与决策*. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

#### 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

*控制与决策*. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

#### 一种求解约束多目标问题的协作进化算法

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

*控制与决策*. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

#### 基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

# 基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法

覃 灏, 李军华<sup>†</sup>

(南昌航空大学 江西省图像处理与模式识别重点实验室, 南昌 330063)

**摘要:** 一般的高维多目标进化算法无法有效处理不同类型的 Pareto 前沿. 针对这一情况, 提出一种基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法 (many-objective evolutionary algorithm based on population association strategy and enhanced solution set criterion, MaOEA/PAS-ESC). 该算法在环境选择中采用种群关联策略 (population association strategy, PAS) 和强化解集准则 (enhanced solution set criterion, ESC) 协同指导种群进化. PAS 利用解与参考向量的角度和欧氏距离以及种群中解之间的距离构建角度与距离联合函数 (joint function of angle and distance, JFAD), 选择多样性良好的解, 然后 ESC 利用参考点与种群间的联系组成适应度函数, 选择收敛性良好的解, 以共同达到有效平衡多样性和收敛性的目的. 实验结果表明, 采用 MaOEA/PAS-ESC 处理高维多目标优化问题具有更强的竞争性能, 而且提高了处理不同类型 Pareto 前沿的能力.

**关键词:** 高维多目标进化算法; 种群关联策略; 强化解集准则; 种群进化; 角度与距离联合函数

中图分类号: TP18

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0131

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 覃灏, 李军华. 基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2808-2817.

## Many-objective evolutionary algorithm based on population association strategy and enhanced solution set criterion

QIN Hao, LI Jun-hua<sup>†</sup>

(Key Laboratory of Jiangxi Province for Image Processing and Pattern Recognition, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract:** Research shows that the general many-objective evolutionary algorithm can not effectively deal with different types of Pareto fronts. In view of the above situation, this paper proposes a many-objective evolutionary algorithm based on the population association strategy and enhanced solution set criterion (MaOEA/PAS-ESC). In this algorithm, the population association strategy (PAS) and enhanced solution set criterion (ESC) are used to guide the population evolution. The PAS uses the angle and Euclidean distance between the solution and the reference vector as well as the distance between the solutions in the population to construct the joint function of angle and distance (JFAD) and select the solution with good diversity. Then, the ESC uses the connection between the reference point and the population to form the fitness function and select the solution with good convergence, in order to balance diversity and convergence effectively. The experimental results show that the MaOEA/PAS-ESC not only has stronger competitive performance in dealing with many-objective optimization problems, but also improves the ability to deal with different types of Pareto fronts.

**Keywords:** many-objective evolutionary algorithm; population association strategy; enhanced solution set criterion; population evolution; joint function of angle and distance

## 0 引言

多目标优化问题 (multi-objective optimization problems, MOPs)<sup>[1]</sup> 的各目标之间大多具有冲突关

系. 目标数在 4 个及以上的多目标优化问题为高维多目标优化问题 (many-objective optimization problems, MaOPs)<sup>[2]</sup>.

收稿日期: 2021-01-22; 录用日期: 2021-07-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62066031, 61866025, 61866026); 江西省自然科学基金项目 (2018BAB202025); 江西省优势科技创新团队计划项目 (2018BCB24008); 基于自适应参考点策略和降维技术的高维多目标进化优化研究项目 (YC2020030).

责任编辑: 巩敦卫.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: jhlee126@126.com.

近年来, 研究者们在高维多目标进化算法研究领域相继提出了大量进化算法, 大致可分为以下几类:

1) 基于性能指标的算法, 这类算法根据相关指标, 筛选性能优越的解. 目前, 相关文献提出了大量评价指标, 如  $I_{\epsilon+}$  指标<sup>[3]</sup>、纯粹多样性(PD)<sup>[4]</sup>、反世代距离(IGD)<sup>[5]</sup>、超体积(HV)<sup>[6]</sup>以及R2<sup>[7]</sup>等.

2) 基于分解的算法, 这类算法使用一组均匀分布的权重向量, 将高维多目标优化问题分解为一系列标量目标子问题或便于管理的多目标优化问题.

3) 基于松弛Pareto支配的方法, 当目标数增多时, 通过增大支配区域, 能快速识别临近PF的解. 相关方法很多, 如GrEA<sup>[8]</sup>、SDR支配<sup>[9]</sup>、RP支配<sup>[10]</sup>、角度支配<sup>[11]</sup>和D支配<sup>[12]</sup>等.

除以上3种分类, 还有一些经典的MaOEA s不属于这3类. 例如, 基于转移的密度估计(SDE)<sup>[13]</sup>、增强Pareto进化算法(SPEA)<sup>[14]</sup>、偏好激励协同进化算法(PICEA-g)<sup>[15]</sup>和SetEA<sup>[16]</sup>等.

大量的MaOEA s在处理MaOPs方面表现出较好的性能, 但相关研究<sup>[17-18]</sup>表明, 这些算法依赖PF形状, 在各种不同的PF上普适性不佳. 为解决上述问题, 本文提出一种基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法(MaOEA/PAS-ESC). 该算法的主要创新如下:

1) 为选择多样性良好的个体, 采用参考向量分解种群, 利用参考向量与解的距离和角度值以及种群中各解之间的距离组成联合函数以提高解的多样性和分布性.

2) 为选择收敛性良好的个体, 根据每个解与对应参考点的欧氏距离、非贡献解与其相关联参考点的角度组成适应度函数. 欧氏距离增强解的收敛性, 角度提供解的分布性.

## 1 相关工作

### 1.1 基于指标的MOEA s

近年来, 相关文献中提出了许多评价指标, 这些指标作用各异. 世代距离(GD)<sup>[19]</sup>衡量收敛性, 纯粹多样性(PD)<sup>[4]</sup>衡量多样性, 反世代距离(IGD)<sup>[5]</sup>、超体积(HV)<sup>[6]</sup>和增强型反世代距离(IGD-NS)<sup>[20]</sup>等同时衡量收敛性和多样性. 这些指标在多目标进化算法中应用广泛.

典型的基于评价指标的多目标进化算法包括MaOEA/IGD<sup>[21]</sup>、SMS-EMOA<sup>[22]</sup>、AR-MOEA<sup>[20]</sup>、MOMBI-II<sup>[23]</sup>、TS-R2EA<sup>[24]</sup>、R2-IBEA<sup>[25]</sup>和HypE<sup>[26]</sup>等. MaOEA/IGD的环境选择采用IGD指标作为选择标准, 由于高维空间较大, 计算量增大, 很难识别出最

邻近个体. SMS-EMOA<sup>[22]</sup>是基于HV指标的MOEA s, 通过对比实验可以发现SMS-EMOA能有效处理低维情况, 但面对高维情况, 计算复杂度急剧增加. AR-MOEA采用IGD-NS指标创建参考点自适应方法调整参考点, 以应对不同形状PF. 实验表明, AR-MOEA在规则和不规则PF问题上均性能良好. HypE是一种基于快速HV的进化算法, 采用蒙特卡罗模拟估计近似HV值, 提高了计算效率.

### 1.2 基于分解的MOEA s

基于分解的MOEA s也存在许多经典的算法, 例如NSGA-III<sup>[27]</sup>、RVEA<sup>[28]</sup>、MOEA/D-LWS<sup>[29]</sup>、ARVEA<sup>[30]</sup>、SPEA/R<sup>[31]</sup>和并行优化等<sup>[32]</sup>. SPEA/R中采用基于参考向量的密度估计方法、适应度分配方法和新的环境选择策略, 使用将两个种群合并后归一化的方法处理目标尺度不一致的问题; 巩敦卫等<sup>[32]</sup>提出的基于目标分解的高维多目标并行进化优化方法, 在并行环境下求解优化问题, 采用新的保存集成策略, 降低了问题求解难度, 保证了Pareto最优集的逼近和分布性能; RVEA使用一组均匀分布的参考向量分解目标空间, 使候选解能够收敛到每个目标子空间的最优情况.

## 2 基于PAS和ESC的高维多目标进化算法

MaOEA/PAS-ESC采用种群关联策略和强化解集准则. 首先, 基于种群关联策略, 利用参考向量将组合种群划分为多个子种群, 利用解与参考向量之间的角度和种群中解之间的距离选择多样性良好的解; 然后, 采用强化解集准则, 利用参考点与淘汰解之间的联系选择收敛性良好的解.

MaOEA/PAS-ESC的主要框架包含下列步骤: 首先, 随机生成一个大小为 $N$ 的初始种群 $P_0$ 、一组均匀分布的参考向量 $V$ 和参考点集 $R$ ; 然后, 采用二元竞争策略构建一个交配池 $P'_t$ ; 随后, 执行交叉、变异; 最后, 在环境选择中根据候选解的PAS和ESC对种群 $P_t$ 中候选解进行排序, 选择 $N$ 个解进入下一代种群. MaOEA/PAS-ESC算法的伪代码如下.

### 算法1 MaOEA/PAS-ESC.

输入: 种群规模 $N$ , 参考点和存档数目 $N_R$ ;

输出: 最终种群 $P$ .

1)  $P_0 = \text{RandomPopulation}(N)$ ;

2)  $V = \text{UniformPoint}(N_R)$ ;

3)  $R = \text{UniformReference Point}(V)$ ;

4)  $A = P$ ;

5)  $R' = R$ ;

6) while  $t < t_{\max}$  do

- 7)  $P'_t = \text{MatingSelection}(P_t, R')$ ;
- 8)  $Q_t = \text{Variation}(P'_t, N)$ ;
- 9)  $[A_t, R'] =$   
     $\text{RefPointAdaption}(A_t \cup Q_t, R, P_t)$ ;
- 10)  $P_{t+1} =$   
     $\text{EnvironmentalSelection}(P_t \cup Q_t, R', V)$ ;
- 11) end while

环境选择的过程如下所示:首先使用PAS算法分解种群,获得 $P_{t+1,1}$ ;然后计算 $P_{t+1,1}$ 中解的数目,如果没有达到种群规模,则在PAS算法淘汰的解集 $\bar{P}_t$ 中采用ESC算法,通过计算解与参考点间的欧氏距离和夹角筛选 $P_{t+1,2}$ ;最后,合并 $P_{t+1,1}$ 和 $P_{t+1,2}$ 得到 $P_{t+1}$ .一般而言, $P_{t+1,1}$ 无法满足种群规模,利用ESC算法保留收敛性和多样性良好的解以达到种群规模.

### 算法2 环境选择.

输入: 组合种群 $P_t$ , 自适应参考点 $R'$ , 参考向量 $V$ , 种群大小 $N$ ;

输出: 下一代种群 $P_{t+1}$ .

- 1) /\*PAS\*/
- 2)  $P_{t+1,1} = \text{PAS}(P_t, V)$ ;
- 3)  $K = N - |P_{t+1,1}|$ ;
- 4) if  $K > 0$  then
- 5)  $\bar{P}_t = P_t - P_{t+1,1}$ ;
- 6) /\*ESC\*/
- 7)  $P_{t+1,2} = \text{ESC}(\bar{P}_t, R', K)$ ;
- 8)  $P_{t+1} = P_{t+1,1} \cup P_{t+1,2}$ ;
- 9) else
- 10)  $P_{t+1} = P_{t+1,1}$ ;
- 11) end if

## 2.1 PAS算法

PAS基于参考向量筛选解,其过程如下所示.首先,归一化种群目标值,得到归一化目标值 $f'_{t,i}(p)$ ;接着,计算种群中每个解与其他解之间的欧氏距离 $\text{dis}_{t,i}$ ,归一化欧氏距离 $\text{Dis}_{t,i}$ ;然后,根据每个解与参考向量间的夹角分解组合种群 $P_t$ 为一组子种群;最后,利用获得的角度、欧氏距离计算角度与距离联合函数(joint function of angle and distance, JFAD),在每个子种群中进行精英选择.

### 算法3 PAS算法.

输入: 种群 $P_t$ , 参考向量 $V$ ;

输出: PAS选择解集 $P_{t+1,1}$ .

- 1) /\*归一化\*/
- 2) for  $i = 1$  to  $M$  do
- 3) 计算理想点:  $z_i^{\min} = \min_{p \in P_t} f_{t,i}(p)$ ;

- 4) 计算最差点:  $z_i^{\max} = \max_{p \in P_t} f_{t,i}(p)$ ;

5) end for

- 6)  $f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}$ ;

7) /\*种群间距\*/

8) for  $i = 1$  to  $N$  do

- 9)  $\text{dis}_{t,i} = \text{pdist2}(p, P_t)$ ;

10) end for

- 11)  $\text{Dis}_{t,i} = \frac{\min(\text{dis}_{t,i})}{\max(\text{dis})}$ ;

12) /\*分解种群\*/

13) for  $i = 1$  to  $N$  do

- 14)  $\theta_{t,i} = \arccos \frac{f'_{t,i}(p) \cdot v_i}{\|f'_{t,i}(p)\|}$ ;

15) end for

16) /\*精英选择\*/

17) 去重复排序:  $A = \text{unique}(\theta_t)$ ;

18) for  $i = 1$  to  $|A|$  do

19) /\*角度与距离联合函数(JFAD)\*/

20)  $\text{JFAD}_{t,i} =$

$$\alpha \cdot \left(1 + M \cdot \frac{\theta_{t,i}}{\theta_v^{\min}}\right) \|f'_{t,i}(p)\| + \beta \cdot \text{Dis}_{t,i};$$

21) end for

22) 确定对应解  $P_{t+1,1} = \min(\text{JFAD}_t)$ .

算法3中JFAD的计算公式如下所示:

$$\text{JFAD}_{t,i} = \alpha \cdot \text{DCA}(\theta, p) + \beta \cdot \text{Dis}_{t,i},$$

$$\alpha + \beta = 1. \quad (1)$$

其中:  $\text{DCA}(\theta, p)$  为解与参考点的距离,  $\text{Dis}_{t,i}$  为解之间的最小归一化欧氏距离,  $\alpha$  和  $\beta$  为权值.

$\text{DCA}(\theta, p)$  的数学表达式如下:

$$\text{DCA}(\theta, p) = \left(1 + M \cdot \frac{\min(\theta_{t,i})}{\min(\theta)}\right) \|f'_{t,i}(p)\|. \quad (2)$$

其中:  $M$  为目标数,  $\min(\theta_{t,i})$  为第  $i$  个解与参考向量的最小夹角,  $\min(\theta)$  为参考向量  $v_i$  与其他参考向量的最小角度,  $\|f'_{t,i}(p)\|$  为第  $i$  个解的归一化范数.

通过JFAD同时衡量解的收敛性和多样性.第1, 利用解与参考向量的角度 $\theta_{t,i}$ 为JFAD在多样性方面提供计量方式,筛选多样性更加优良的解;第2,解之间的欧氏距离 $\text{Dis}_{t,i}$ 能加强解的收敛性.解的JFAD越小,表明解的收敛性和多样性越好,各子种群中JFAD最小的解将被选择进入解集 $P_{t+1,1}$ ,与解集组合成为下一代种群.

PAS的优势如图1所示.其中:  $v_1, v_2, v_3$  为参考向量,  $p_1, p_2, p_3, p_4$  为种群中的解;  $p_1$  与  $v_1$  关联,  $p_2$  和  $p_3$  与  $v_2$  关联,  $p_4$  与  $v_3$  关联.在参考向量  $v_2$  所在子种群中存在两个解  $p_2$  和  $p_3$ , 计算获得  $p_3$  的JFAD值明显低于  $p_2$ , 故选择  $\{p_1, p_3, p_4\}$ .

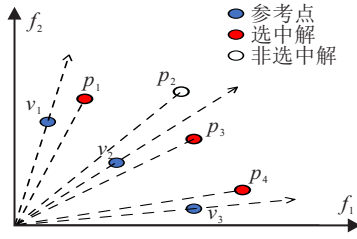


图1 PAS示意图

2.2 ESC算法

由于PAS筛选的解的数目无法达到种群规模,需要ESC排序,在剩余解中筛选出性能优良的解,以满足种群规模.首先,将 $\bar{P}_t$ 非支配排序,划分为多个非支配层,获得 $\bar{\bar{P}}_t$ ,计算解与参考点之间的欧氏距离和夹角;然后,取前 $k-1$ 层加入 $P_{t+1,2}$ 中,其中 $k-1$ 层非支配解数目少于 $K$ 值;接着,计算第 $k$ 层的fitness值,删除fitness值最小的解,每次删除一个候选解后,重新计算适应度值,重复上述过程,直到解的数目等于 $K$ ;最后,返回 $P_{t+1,2}$ .

算法4 ESC排序.

输入: PAS淘汰的解 $\bar{P}_t$ ,自适应参考点 $R'$ ,ESC需获得的解的数目 $K$ ;

输出: ESC选择解集 $P_{t+1,2}$ .

- 1) /\*计算解与参考点之间的距离和角度\*/
- 2)  $Front_t = \text{NondominatedSort}(\bar{P}_t)$ ;
- 3) 获取非支配解集 $\bar{\bar{P}}_t = Front_t$ ;
- 4)  $\{dis_t, \theta_t\} = \text{CalDistance}(\bar{\bar{P}}_t, R')$ ;
- 5) /\*选中前 $k-1$ 层解\*/
- 6)  $k$ 取满足 $|\bigcup_{i=1}^k Front_{t,i}| \geq K$ 的最小值;
- 7)  $P_{t+1,2} = \bigcup_{i=1}^{k-1} Front_{t,i}$ ;
- 8) /\*适应度选择\*/
- 9) While  $|Front_{t,k}| > K - |P_{t+1,2}|$  do
- 10)  $fitness_t = \text{ESC}(Front_{t,k} \setminus \{p\}, R', \theta_t)$ ,
- 11)  $p = \min(fitness_t)$ ,
- 12)  $P_{t+1,2} = P_{t+1,2} \cup \{p\}$ ;
- 13) end While

算法4第10行的适应度函数由贡献解和非贡献解两部分组成,即

$$fitness_t = CS(p, R') + NCS(p, R'). \quad (3)$$

其中: $p$ 表示在第 $k$ 层非支配层中的非支配解, $R'$ 表示自适应参考点, $CS(p, R')$ 表示解 $p$ 的贡献解部分, $NSC(p, R')$ 表示解 $p$ 的非贡献解部分.在计算解 $p$ 的适应度值时,先将解 $p$ 从种群中删除,然后重新判别贡献解和非贡献解,计算 $CS(p, R')$ 和 $NSC(p, R')$ 组成解 $p$ 的适应度值.具体的贡献解和非贡献解相关计

算公式如下所示:

$$CS(p, R') = \sum_{r \in R'} \min_{p \in P_{t,k}} \text{dis}(r, p); \quad (4)$$

$$NSC(p, R') = \sum_{p' \in P_{t,k}^*} [a \cdot \min_{r \in R'} \text{dis}(r, p') + b \cdot \theta(r, p')],$$

$$a + b = 1. \quad (5)$$

其中: $P_{t,k}$ 表示在第 $k$ 层非支配层的一组非支配解, $P_{t,k}^*$ 表示 $P_{t,k}$ 中的非贡献解, $\text{dis}(r, p)$ 表示目标空间中 $r$ 和 $p$ 之间的欧氏距离, $a$ 和 $b$ 表示在非贡献解相关计算中欧氏距离和角度的权值分配.

图2为ESC关于解集中优良解的筛选机制.其中: $r_1, r_2, r_3$ 为参考点, $p_1, p_2$ 和 $p_5$ 为贡献解, $p_3, p_4, p_6$ 为非贡献解, $z^*$ 为理想点.当需要在这6个候选解中选择5个质量最佳的解填充到下一代中时,ESC可以区分最佳解集 $\{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$ .

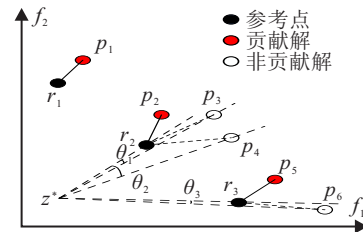


图2 ESC示意图

3 实验仿真及分析

将算法 MaOEA/PAS-ESC 与 NSGA-II/SDR<sup>[9]</sup>、MOMBI-II<sup>[23]</sup>、NSGA-III<sup>[27]</sup>、RVEA<sup>[28]</sup>和MOEA/D-AWA<sup>[33]</sup>进行比较,采用DTLZ<sup>[34]</sup>测试集、WFG<sup>[35]</sup>测试集和MaF<sup>[36]</sup>测试集,使用多目标进化算法平台 PlatEMO<sup>[37]</sup>进行对比实验.接下来介绍相关设置,并将各算法在测试集的实验结果进行对比分析.

3.1 实验设置

1) 基准测试问题.本文采用测试问题DTLZ<sub>1</sub>~DTLZ<sub>7</sub>、WFG<sub>1</sub>~WFG<sub>9</sub>和MaF<sub>1</sub>~MaF<sub>13</sub>.可任意扩展这些测试问题的目标数,在目标数为8、15、20的测试问题上进行对比实验.

2) 种群规模.6种算法的种群规模与参考点的数量相关.详细参数见表1.

表1 种群规模

目标数( $M$ )	系数( $P_1, P_2$ )	种群规模( $N$ )
8	(3, 2)	156
15	(2, 1)	135
20	(2, 1)	230

3) 运行代数.最大运行代数均设置为500.

4) 评价指标.使用反世代距离(IGD)<sup>[5]</sup>和超体积

(HV)<sup>[6]</sup> 分别度量算法的收敛性和多样性。

5) 算法参数设置. 在MaOEA/PAS-ESC算法中, 经过多次实验对比, PAS中JFAD权值设置为 $\alpha = 0.73, \beta = 0.27$ ; ESC中的非贡献解中关于欧氏距离和角度的权重比例分别设置为 $a = 0.34, b = 0.66$ .

6) 统计方法. 在每个测试问题上, 每个算法都进行30次独立运行, 并且在实验结果的基础上采用Wilcoxon秩和检验方法进行分析比较, 实验结果用均值表述.

表2 6种算法在DTLZ<sub>1</sub> ~ DTLZ<sub>7</sub>上获得的8、15、20目标IGD值的统计结果

problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
DTLZ <sub>1</sub>	8	1.653 1e-1-	<b>9.706 8e-2+</b>	1.059 0e-1+	1.104 3e-1=	2.032 3e-1-	1.085 8e-1
	15	1.942 8e-1-	<b>1.590 0e-1+</b>	2.283 5e-1-	1.870 9e-1-	2.844 1e-1-	1.700 1e-1
	20	2.260 3e-1=	<b>1.734 5e-1+</b>	2.516 1e-1=	2.486 7e-1-	3.099 8e-1-	2.207 6e-1
DTLZ <sub>2</sub>	8	5.206 4e-1-	<b>3.155 1e-1+</b>	3.283 6e-1-	3.485 6e-1-	3.282 2e-1-	3.225 3e-1
	15	7.371 5e-1-	<b>6.266 3e-1+</b>	6.428 1e-1-	7.256 9e-1-	8.593 8e-1-	6.283 8e-1
	20	6.465 4e-1-	6.236 7e-1-	7.840 7e-1-	8.324 7e-1-	9.164 2e-1-	<b>6.222 7e-1</b>
DTLZ <sub>3</sub>	8	3.936 2e-1-	<b>3.319 2e-1+</b>	1.848 6e+0-	5.099 4e-1-	4.453 2e-1=	3.761 1e-1
	15	7.057 4e-1-	9.973 2e-1-	5.561 5e+0-	8.758 5e-1-	1.103 4e+0-	<b>6.364 4e-1</b>
	20	6.836 7e-1-	6.373 4e-1=	7.418 6e+1-	9.363 6e-1-	1.170 4e+0-	<b>6.306 5e-1</b>
DTLZ <sub>4</sub>	8	7.744 4e-1-	<b>3.239 9e-1+</b>	3.412 9e-1-	4.712 5e-1-	3.794 4e-1-	3.291 9e-1
	15	8.165 7e-1-	6.297 9e-1-	6.475 3e-1=	6.590 7e-1-	6.561 1e-1-	<b>6.290 1e-1</b>
	20	7.978 0e-1-	6.236 0e-1-	6.793 1e-1-	6.377 8e-1-	6.288 1e-1-	<b>6.224 8e-1</b>
DTLZ <sub>5</sub>	8	1.170 6e-1=	3.618 1e-1-	2.656 7e-1-	<b>9.828 9e-2+</b>	3.015 2e-1-	1.169 2e-1
	15	<b>9.807 8e-2+</b>	4.326 5e-1-	2.478 6e-1-	1.415 4e-1+	7.018 5e-1-	1.794 7e-1
	20	<b>1.100 2e-1+</b>	4.755 4e-1-	7.855 0e-1-	1.270 3e-1+	7.110 1e-1-	1.738 3e-1
DTLZ <sub>6</sub>	8	2.015 1e-1-	2.835 4e-1-	5.441 3e-1-	1.661 9e-1-	5.832 8e-1-	<b>1.222 2e-1</b>
	15	<b>1.271 9e-1+</b>	2.107 0e-1=	8.371 5e-1-	1.794 9e-1+	6.998 9e-1-	2.231 7e-1
	20	<b>1.239 8e-1=</b>	2.060 9e-1-	7.356 5e+0-	1.965 2e-1-	6.623 2e-1-	1.306 7e-1
DTLZ <sub>7</sub>	8	9.958 9e-1-	1.444 6e+0-	7.890 3e-1-	9.231 9e-1-	3.041 7e+0-	<b>7.340 1e-1</b>
	15	4.671 4e+0-	2.436 3e+0-	8.322 3e+0-	2.788 6e+0-	1.094 9e+1-	<b>1.872 0e+0</b>
	20	6.959 4e+0-	2.799 4e+0-	9.304 3e+0-	3.230 4e+0-	1.502 2e+1-	<b>2.258 3e+0</b>
+ / - / =		3/15/3	7/12/2	1/18/2	4/16/1	0/20/1	

表3 6种算法在DTLZ<sub>1</sub> ~ DTLZ<sub>7</sub>上获得的8、15、20目标HV值的统计结果

problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
DTLZ <sub>1</sub>	8	9.206 4e-1-	<b>9.975 2e-1+</b>	9.959 9e-1+	9.915 8e-1-	9.146 1e-1-	9.939 3e-1
	15	8.999 6e-1-	<b>9.985 4e-1+</b>	9.146 5e-1-	9.637 0e-1-	8.111 0e-1-	9.816 4e-1
	20	9.236 8e-1-	<b>9.994 9e-1+</b>	9.259 3e-1-	9.646 5e-1-	8.922 0e-1-	9.893 7e-1
DTLZ <sub>2</sub>	8	7.376 2e-1-	9.238 1e-1=	9.175 2e-1-	9.130 1e-1-	<b>9.257 5e-1+</b>	9.237 0e-1
	15	8.464 8e-1-	9.898 0e-1-	9.771 5e-1-	8.887 6e-1-	8.181 9e-1-	<b>9.902 6e-1</b>
	20	9.936 9e-1-	9.985 8e-1-	8.637 9e-1-	9.006 5e-1-	8.652 7e-1-	<b>9.985 8e-1</b>
DTLZ <sub>3</sub>	8	9.022 8e-1=	<b>9.032 6e-1=</b>	3.434 2e-1-	8.000 2e-1-	8.634 9e-1=	9.023 1e-1
	15	9.167 9e-1=	7.487 5e-1-	2.964 4e-2-	6.417 0e-1-	4.137 1e-1-	<b>9.550 9e-1</b>
	20	9.878 1e-1-	<b>9.954 5e-1+</b>	0-	7.303 9e-1-	4.530 0e-1-	9.924 0e-1
DTLZ <sub>4</sub>	8	4.388 7e-1-	9.224 6e-1-	9.145 5e-1-	8.826 0e-1-	9.186 2e-1-	<b>9.252 5e-1</b>
	15	7.344 2e-1-	9.902 7e-1-	9.813 4e-1-	9.741 1e-1-	9.827 7e-1-	<b>9.909 2e-1</b>
	20	8.655 0e-1-	9.986 7e-1-	9.808 1e-1-	9.968 1e-1-	9.983 3e-1-	<b>9.987 2e-1</b>
DTLZ <sub>5</sub>	8	9.180 7e-2+	9.090 0e-2=	9.195 2e-2+	<b>9.976 6e-2+</b>	9.699 5e-2+	8.958 2e-2
	15	9.053 3e-2+	9.104 1e-2+	8.653 5e-2-	<b>9.221 2e-2+</b>	9.147 6e-2+	8.980 6e-2
	20	8.970 2e-2=	9.093 3e-2+	5.759 1e-4-	<b>9.163 4e-2+</b>	9.126 3e-2+	8.974 6e-2
DTLZ <sub>6</sub>	8	9.158 1e-2-	9.253 4e-2=	6.298 2e-2-	<b>9.983 2e-2+</b>	9.237 3e-2=	9.285 4e-2
	15	9.104 9e-2=	8.779 3e-2-	3.940 8e-2-	<b>9.197 8e-2+</b>	9.137 8e-2=	9.131 4e-2
	20	9.089 6e-2-	8.791 4e-2-	0.000 0e+0-	<b>9.162 3e-2+</b>	9.138 8e-2=	9.121 3e-2
DTLZ <sub>7</sub>	8	1.793 7e-1+	1.498 7e-1=	<b>1.967 0e-1+</b>	1.246 1e-1-	1.774 9e-1+	1.610 3e-1
	15	1.385 3e-8-	1.164 7e-1-	<b>1.494 7e-1+</b>	1.387 0e-2-	1.221 5e-1-	1.304 9e-1
	20	0.000 0e+0-	1.022 2e-1-	1.176 4e-1-	5.028 6e-5-	1.168 2e-1-	<b>1.244 1e-1</b>
+ / - / =		3/14/4	6/10/5	4/17/0	6/15/0	5/12/4	

### 3.2 算法在DTLZ<sub>1</sub>~DTLZ<sub>7</sub>的对比分析

本节中给出了6个算法在DTLZ测试集上的实验结果,表2和表3分别展示了对比算法的IGD值和HV值的均值.其中:黑体表示算法获得最佳结果,‘+’、‘-’和‘=’分别表示获得的结果与MaOEA/PAS-ESC相比更好、更差和相似.

DTLZ<sub>1</sub>~DTLZ<sub>4</sub>的PF形状表现为规则形状,DTLZ<sub>5</sub>~DTLZ<sub>7</sub>的PF形状表现为不规则形状.MaOEA/PAS-ESC在DTLZ<sub>2</sub>的20目标、DTLZ<sub>3</sub>的15目标、DTLZ<sub>4</sub>的15和20目标以及DTLZ<sub>7</sub>的20目标上获得了最好的性能,这些测试问题具有不同的PFs.由于算法生成均匀分布的初始参考点集,在应对规则PF的高维多目标优化问题时,无需更新存档.算法中采用了参考点自适应方法,在原先参考点的基础上,对每个参考点检测与该参考点所在参考向量垂直距离最近的解,并将参考点沿参考向量方向移动到离

该解最近的位置进行自适应调整,故能有效处理不规则PF的高维多目标优化问题.同时,在算法的PAS和ESC适应度计算中均使用了解之间的距离,可以增强分布性.尽管MaOEA/PAS-ESC没有在所有的测试问题上表现出完全的优势,但是总体较优.综上所述, MaOEA/PAS-ESC能有效处理具有规则和不规则的PFs分布的高维多目标问题.

### 3.3 算法在WFG测试集的对比分析

为探讨算法在WFG测试问题上的性能表现,本节中给出了MaOEA/PAS-ESC与其他算法在WFG测试集上的对比实验结果.

表4和表5是算法在测试问题WFG<sub>1</sub>~WFG<sub>9</sub>上IGD值和HV值的统计实验结果.WFG<sub>1</sub>的PF形状具有凸型和混合结构,WFG<sub>2</sub>的Pareto前沿形状表现为凸型和断开,WFG<sub>3</sub>的Pareto前沿形状具有线性和退化的特性,WFG<sub>4</sub>~WFG<sub>9</sub>的Pareto前沿形状

表4 6种算法在WFG<sub>1</sub>~WFG<sub>9</sub>上获得的8、15、20目标IGD值的统计结果

problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
WFG <sub>1</sub>	8	1.713 5e+0-	<b>9.731 1e-1=</b>	1.107 1e+0-	1.198 4e+0-	1.172 3e+0-	9.777 1e-1
	15	2.491 5e+0-	<b>1.879 6e+0+</b>	2.051 2e+0-	2.238 1e+0-	2.564 6e+0-	1.976 6e+0
	20	5.140 3e+0-	<b>3.913 0e+0+</b>	4.140 4e+0=	4.576 9e+0-	4.654 4e+0-	4.269 5e+0
WFG <sub>2</sub>	8	1.453 9e+0-	1.023 5e+0-	1.033 6e+0=	1.346 9e+0-	1.305 9e+0-	<b>9.395 3e-1</b>
	15	2.397 8e+0-	<b>1.783 5e+0+</b>	1.876 2e+0-	2.230 0e+0-	6.818 0e+0-	1.795 0e+0
	20	5.162 6e+0-	<b>3.458 2e+0+</b>	4.021 9e+0-	4.346 4e+0-	8.948 1e+0-	3.902 4e+0
WFG <sub>3</sub>	8	<b>9.734 8e-1+</b>	2.313 0e+0-	1.690 1e+0-	1.882 3e+0-	7.937 3e+0-	1.437 8e+0
	15	4.576 8e+0-	7.516 3e+0-	<b>3.3587e+0+</b>	5.234 3e+0-	1.572 0e+1-	3.894 1e+0
	20	8.651 6e+0-	1.231 5e+1-	8.660 6e+0-	6.443 3e+0-	2.110 6e+1-	<b>5.496 0e+0</b>
WFG <sub>4</sub>	8	3.222 2e+0-	2.994 9e+0+	<b>2.979 5e+0+</b>	3.224 8e+0-	3.701 8e+0-	3.011 9e+0
	15	9.436 5e+0-	9.445 8e+0-	<b>9.349 9e+0+</b>	1.035 2e+1-	1.999 5e+1-	9.408 3e+0
	20	1.442 0e+1-	1.241 1e+1-	1.258 4e+1-	1.504 9e+1-	2.887 7e+1-	<b>1.150 8e+1</b>
WFG <sub>5</sub>	8	3.247 5e+0-	2.977 5e+0+	<b>2.941 7e+0+</b>	3.164 6e+0-	3.671 0e+0-	2.991 9e+0
	15	9.236 1e+0+	9.245 6e+0+	<b>9.230 7e+0+</b>	9.549 9e+0-	2.491 2e+1-	9.321 2e+0
	20	1.192 1e+1-	1.166 3e+1-	1.156 4e+1-	1.350 7e+1-	3.677 0e+1-	<b>1.153 9e+1</b>
WFG <sub>6</sub>	8	3.341 9e+0-	3.041 6e+0-	<b>2.961 8e+0+</b>	3.129 3e+0-	3.682 6e+0-	3.028 2e+0
	15	1.021 2e+1-	1.016 0e+1-	9.499 2e+0-	9.642 7e+0-	1.873 2e+1-	<b>9.377 7e+0</b>
	20	1.913 1e+1-	1.304 8e+1-	1.428 3e+1-	1.348 5e+1-	2.815 4e+1-	<b>1.154 2e+1</b>
WFG <sub>7</sub>	8	3.298 0e+0-	3.034 4e+0=	<b>2.974 1e+0+</b>	3.080 7e+0-	3.574 8e+0-	3.026 4e+0
	15	1.083 1e+1-	<b>9.250 7e+0=</b>	9.299 4e+0=	9.508 9e+0=	1.779 0e+1-	9.326 5e+0
	20	1.536 0e+1-	1.205 5e+1-	1.441 3e+1-	1.381 9e+1-	2.593 5e+1-	<b>1.155 2e+1</b>
WFG <sub>8</sub>	8	3.336 1e+0-	3.098 1e+0-	3.282 2e+0-	3.521 7e+0-	3.977 3e+0-	<b>3.055 4e+0</b>
	15	1.043 5e+1-	9.747 0e+0-	<b>9.175 9e+0+</b>	1.189 3e+1-	2.023 9e+1-	9.336 4e+0
	20	1.462 4e+1-	1.257 1e+1-	1.422 7e+1-	1.862 3e+1-	3.054 6e+1-	<b>1.156 1e+1</b>
WFG <sub>9</sub>	8	3.177 3e+0-	2.986 0e+0-	<b>2.934 9e+0+</b>	3.226 3e+0-	3.705 3e+0-	2.960 0e+0
	15	8.958 8e+0+	9.244 0e+0-	<b>8.752 4e+0+</b>	9.762 5e+0-	2.603 2e+1-	9.079 3e+0
	20	1.252 5e+1-	1.190 7e+1-	1.335 8e+1-	1.523 6e+1-	3.807 8e+1-	<b>1.170 8e+1</b>
+ / - / =		3/24/0	7/17/3	10/14/3	0/26/1	0/27/0	

表5 6种算法在WFG<sub>1</sub> ~ WFG<sub>9</sub>上获得的8、15、20目标HV值的统计结果

problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
WFG <sub>1</sub>	8	9.776 1e-1+	9.136 7e-1-	8.342 7e-1-	<b>9.994 7e-1+</b>	9.971 1e-1+	9.377 3e-1
	15	9.863 8e-1-	9.644 8e-1-	9.869 5e-1-	9.967 8e-1-	9.473 5e-1-	<b>9.972 1e-1</b>
	20	9.879 3e-1-	9.982 4e-1-	<b>9.991 1e-1+</b>	9.890 4e-1-	9.874 6e-1-	9.988 3e-1
WFG <sub>2</sub>	8	9.742 7e-1-	9.770 5e-1-	9.936 5e-1=	<b>9.945 7e-1+</b>	9.827 3e-1-	9.926 4e-1
	15	9.835 8e-1-	9.648 7e-1-	9.922 3e-1=	9.892 8e-1-	8.867 2e-1-	<b>9.9297e-1</b>
	20	9.891 8e-1-	9.831 3e-1-	9.930 7e-1-	9.939 6e-1=	9.170 4e-1-	<b>9.949 9e-1</b>
WFG <sub>3</sub>	8	4.180 8e-2+	1.620 6e-3-	1.521 1e-2+	7.994 8e-2+	<b>1.148 8e-1+</b>	7.426 8e-3
	15	<b>0=</b>	0=	0=	0=	0=	0
	20	<b>0=</b>	0=	0=	0=	0=	0
WFG <sub>4</sub>	8	<b>9.033 2e-1=</b>	8.939 0e-1-	8.973 1e-1-	8.582 1e-1-	8.194 5e-1-	9.030 9e-1
	15	9.563 6e-1-	9.463 2e-1-	9.673 6e-1-	9.000 5e-1-	4.780 6e-1-	<b>9.755 9e-1</b>
	20	8.587 2e-1=	9.649 1e-1-	8.813 7e-1-	9.339 1e-1-	5.582 9e-1-	<b>9.830 7e-1</b>
WFG <sub>5</sub>	8	8.511 6e-1-	8.561 6e-1+	<b>8.579 2e-1+</b>	7.934 7e-1-	7.333 1e-1-	8.549 0e-1
	15	9.078 3e-1-	<b>9.128 4e-1+</b>	9.090 7e-1-	8.505 1e-1-	2.382 7e-1-	9.122 4e-1
	20	9.094 4e-1-	9.151 4e-1-	8.956 4e-1-	8.644 3e-1-	2.554 5e-1-	<b>9.159 4e-1</b>
WFG <sub>6</sub>	8	<b>8.446 7e-1+</b>	8.173 8e-1-	8.243 0e-1=	7.950 2e-1-	7.123 2e-1-	8.324 0e-1
	15	8.352 8e-1=	6.430 8e-1-	<b>8.839 0e-1=</b>	8.150 4e-1-	4.329 0e-1-	8.759 8e-1
	20	5.104 6e-1-	6.673 3e-1-	8.256 9e-1-	8.465 2e-1-	4.741 5e-1-	<b>8.932 1e-1</b>
WFG <sub>7</sub>	8	9.079 3e-1=	8.884 7e-1-	<b>9.086 7e-1=</b>	8.906 9e-1-	8.374 7e-1-	9.085 1e-1
	15	8.336 4e-1-	7.795 9e-1-	9.781 4e-1-	8.919 2e-1-	4.888 0e-1-	<b>9.8142e-1</b>
	20	8.703 1e-1-	6.320 3e-1-	8.636 3e-1-	9.207 8e-1-	5.721 0e-1-	<b>9.933 1e-1</b>
WFG <sub>8</sub>	8	<b>8.055 5e-1=</b>	6.898 1e-1-	7.808 4e-1-	7.245 1e-1-	6.027 8e-1-	7.970 2e-1
	15	7.090 7e-1-	5.476 9e-1-	9.089 0e-1-	7.721 6e-1-	3.583 8e-1-	<b>9.291 1e-1</b>
	20	8.082 7e-1-	6.444 9e-1-	6.276 1e-1-	8.305 2e-1-	3.876 4e-1-	<b>9.643 5e-1</b>
WFG <sub>9</sub>	8	<b>8.582 6e-1+</b>	6.898 1e-1-	7.904 8e-1-	7.3883e-1-	7.4734e-1-	8.3413e-1
	15	<b>9.033 8e-1+</b>	7.743 0e-1-	8.832 1e-1+	7.066 8e-1-	2.270 2e-1-	8.725 3e-1
	20	<b>9.061 1e-1+</b>	7.863 7e-1-	8.262 2e-1-	7.293 0e-1-	2.372 8e-1-	8.937 9e-1
+ / - / =		6/14/7	2/23/2	4/16/7	3/21/3	2/23/2	

都是规则的,表现为凹型. MaOEA/PAS-ESC在WFG<sub>2</sub>和WFG<sub>4</sub> ~ WFG<sub>9</sub>相关测试实例中表现出较大的优势. 由于MaOEA/PAS-ESC中的种群分解均匀生成参考点,算法在凹型的规则Pareto前沿问题上表现优异. 综合考虑各算法在测试问题WFG<sub>1</sub> ~ WFG<sub>9</sub>上实验统计结果, MaOEA/PAS-ESC能有效处理凹型的规则PF和断开PF.

### 3.4 算法在MaF测试集的对比分析

为了更深入地探讨MaOEA/PAS-ESC在处理不同PF测试问题的性能,表6展示了相关算法在测试问题MaF<sub>1</sub> ~ MaF<sub>13</sub>上IGD值的统计结果. MaF<sub>1</sub>的PF为线性, MaF<sub>2</sub>、MaF<sub>4</sub>和MaF<sub>12</sub>的PF为凹形, MaF<sub>3</sub>和MaF<sub>5</sub>的PF为凸形, MaF<sub>6</sub>和MaF<sub>13</sub>的PF为凹形和退化, MaF<sub>7</sub>的PF为混合型和退化, MaF<sub>8</sub>和MaF<sub>9</sub>的PF为线性和退化, MaF<sub>10</sub>的PF是混合型, MaF<sub>11</sub>的PF是凸形和断开. MaOEA/PAS-ESC在MaF<sub>2</sub>、MaF<sub>3</sub>、

MaF<sub>5</sub> ~ MaF<sub>9</sub>、MaF<sub>11</sub> ~ MaF<sub>13</sub>的相关测试实例中表现优秀. 综上所述, MaOEA/PAS-ESC能够很好地处理线性、凹型、断开型、退化型等多种PFs分布.

### 3.5 时间复杂度分析

时间复杂度是评价算法性能的重要指标之一,本文中的算法复杂度主要分为种群选择和参考点自适应. 下面对这两个部分进行分析.

在种群选择中,最主要的部分分别为PAS算法和ESC算法. PAS算法中种群归一化的时间复杂度为 $O(MN)$ . 其中:目标数为 $M$ ,种群大小为 $N$ . 种群划分的时间复杂度为 $O(MN^2)$ . JFAD的时间复杂度为 $O(MN^2)$ . ESC精英选择的时间复杂度为 $O(N^2)$ .

在参考点自适应中,存档更新的时间复杂度为 $O(N^2)$ ,参考点调整的时间复杂度为 $O(N^2)$ .

由以上分析可知,本文所提算法的时间复杂度为 $O[(2M + 3)N^2]$ .

表 6 6 种算法在 MaF<sub>1</sub> ~ MaF<sub>13</sub> 上获得的 8、15、20 目标 IGD 值的统计结果

problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
MaF <sub>1</sub>	8	<b>2.019 6e-1+</b>	5.362 8e-1-	2.812 6e-1-	3.544 9e-1-	3.562 0e-1-	2.161 4e-1
	15	<b>3.124 1e-1+</b>	6.427 1e-1-	3.469 7e-1+	5.600 9e-1-	4.306 7e-1-	3.600 5e-1
	20	<b>3.428 9e-1+</b>	7.648 3e-1-	4.460 4e-1-	6.337 1e-1-	5.507 6e-1-	3.880 9e-1
MaF <sub>2</sub>	8	2.016 6e-1-	2.425 3e-1-	2.372 9e-1-	1.969 3e-1-	2.969 7e-1-	<b>1.804 1e-1</b>
	15	3.629 7e-1-	7.257 8e-1-	2.683 3e-1=	2.702 3e-1=	8.454 2e-1-	<b>2.592 2e-1</b>
	20	3.463 5e-1-	7.349 9e-1-	2.542 5e-1=	2.813 8e-1-	8.545 4e-1-	<b>2.452 5e-1</b>
MaF <sub>3</sub>	8	1.763 7e-1-	3.261 8e-1-	1.179 9e+3-	1.268 1e-1-	1.382 2e-1-	<b>1.227 0e-1</b>
	15	<b>1.422 0e-1+</b>	2.518 0e-1+	1.523 9e+5-	1.443 6e-1+	2.666 6e-1-	2.647 7e-1
	20	1.982 4e-1+	<b>1.471 2e-1+</b>	6.350 8e+3-	1.845 9e-1+	2.686 6e-1-	2.011 2e-1
MaF <sub>4</sub>	8	5.652 4e+1-	5.787 7e+1-	2.998 4e+1+	<b>2.416 3e+1+</b>	3.480 5e+1=	3.633 8e+1
	15	9.472 3e+3-	8.852 6e+3-	<b>3.674 0e+3+</b>	6.095 4e+3=	4.664 5e+3+	5.734 8e+3
	20	3.021 6e+5-	2.673 4e+5-	<b>1.144 2e+5+</b>	1.639 3e+5=	1.436 2e+5+	1.828 1e+5
MaF <sub>5</sub>	8	8.272 8e+1-	2.285 2e+1-	2.090 2e+1-	2.344 0e+1=	2.233 8e+1-	<b>1.870 6e+1</b>
	15	7.225 5e+3-	3.406 1e+3-	3.113 1e+3-	<b>2.814 6e+3=</b>	3.068 0e+3=	2.953 9e+3
	20	1.685 5e+5-	<b>6.255 7e+4+</b>	6.466 4e+4=	6.531 2e+4=	6.509 7e+4=	6.280 8e+4
MaF <sub>6</sub>	8	1.456 3e-2-	1.031 0e-1-	1.469 1e-1-	1.830 8e-2-	6.544 9e-1-	<b>2.988 2e-3</b>
	15	<b>5.440 3e-3+</b>	2.568 8e-1-	2.652 1e+0-	7.620 6e-2=	6.989 9e-1-	8.522 8e-2
	20	<b>5.410 5e-2+</b>	1.750 6e-1-	1.469 6e+0-	6.276 8e-2+	6.587 4e-1-	9.291 4e-2
MaF <sub>7</sub>	8	1.002 6e+0-	1.514 2e+0-	8.027 4e-1-	9.273 3e-1-	3.046 5e+0-	<b>7.343 7e-1</b>
	15	4.500 2e+0-	2.454 8e+0-	5.873 7e+0-	2.573 0e+0-	1.091 6e+1-	<b>1.836 0e+0</b>
	20	7.106 3e+0-	2.907 3e+0-	9.157 6e+0-	3.086 4e+0-	1.511 1e+1-	<b>2.587 0e+0</b>
MaF <sub>8</sub>	8	1.810 5e-1-	7.871 3e-1-	3.206 9e-1-	7.670 3e-1-	1.176 0e+0-	<b>1.448 6e-1</b>
	15	3.019 0e-1-	1.233 3e+0-	4.170 6e-1-	1.237 1e+0-	2.368 8e+0-	<b>2.212 4e-1</b>
	20	2.332 5e-1-	1.346 5e+0-	4.178 8e-1-	1.425 7e+0-	2.472 9e+0-	<b>1.980 7e-1</b>
MaF <sub>9</sub>	8	2.132 0e-1-	6.385 8e-1-	1.141 3e+0-	7.501 7e-1-	1.328 5e+0-	<b>2.001 1e-1</b>
	15	2.475 9e-1-	2.892 7e+0-	3.234 7e+0-	4.363 0e+0-	9.758 4e+0-	<b>2.149 4e-1</b>
	20	<b>2.189 4e-1+</b>	2.316 0e+0-	1.240 8e+1-	6.138 8e+0-	1.409 4e+1-	2.307 0e-1
MaF <sub>10</sub>	8	1.682 0e+0-	<b>9.680 4e-1=</b>	1.083 5e+0-	1.169 0e+0-	1.157 5e+0-	9.681 1e-1
	15	2.498 6e+0-	<b>1.870 2e+0+</b>	2.154 8e+0-	2.254 4e+0-	2.650 2e+0-	2.036 2e+0
	20	5.138 5e+0-	<b>3.897 0e+0+</b>	4.203 0e+0=	4.586 6e+0-	4.858 7e+0-	4.296 5e+0
MaF <sub>11</sub>	8	1.453 6e+0-	1.021 5e+0-	1.090 6e+0=	1.324 0e+0-	1.233 3e+0-	<b>9.542 2e-1</b>
	15	2.399 6e+0-	<b>1.786 7e+0+</b>	2.166 8e+0-	2.200 7e+0-	6.723 6e+0-	1.903 9e+0
	20	5.174 0e+0-	<b>3.475 5e+0+</b>	4.053 1e+0=	4.237 2e+0-	9.257 0e+0-	3.926 3e+0
MaF <sub>12</sub>	8	3.180 1e+0-	2.970 1e+0-	2.966 1e+0-	3.214 1e+0-	3.710 0e+0-	<b>2.959 6e+0</b>
	15	<b>9.058 5e+0+</b>	9.265 3e+0-	9.174 2e+0=	9.770 0e+0-	2.592 4e+1-	9.101 9e+0
	20	1.286 4e+1-	1.179 6e+1=	1.378 0e+1-	1.477 4e+1-	3.743 3e+1-	<b>1.171 6e+1</b>
MaF <sub>13</sub>	8	1.908 1e-1-	7.725 2e-1-	2.536 7e-1-	3.072 9e-1-	1.351 2e+0-	<b>1.295 6e-1</b>
	15	2.069 5e-1-	1.180 1e+0-	3.208 2e-1-	4.427 5e-1-	1.905 0e+0-	<b>1.820 1e-1</b>
	20	1.742 0e-1-	1.414 2e+0-	2.920 3e-1-	3.862 6e-1-	2.211 1e+0-	<b>1.537 6e-1</b>
+ / - / =		9/30/0	7/30/2	4/28/7	4/28/7	2/34/3	

3.6 参数分析

MaOEA/PAS-ESC 中,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $a$  和  $b$  是 4 个主要参数, 且  $\alpha + \beta = 1$ ,  $a + b = 1$ , 故仅需探讨参数  $\alpha$  和  $a$ . 为考察 MaOEA/PAS-ESC 对  $\alpha$  和  $a$  的敏感性, 采用测试问题 WFG<sub>2</sub>.

图 3 给出的是参数  $\alpha$  和  $a$  不同取值时的 HV 值折线图, (a) 和 (c) 显示参数取值为 0~1 的折线, (b)

显示参数  $\alpha$  在 0.7~0.8 的折线, (d) 显示参数  $a$  取值 0.3~0.4 的折线. 从图 3 可以看出, MaOEA/PAS-ESC 对  $\alpha$  和  $a$  均非常敏感. (a) 显示  $\alpha$  取值在 0.7~0.8, (b) 确定  $\alpha$  取值为 0.73, (c) 显示  $a$  取值在 0.3~0.4, (d) 确定  $a$  取值为 0.34. 综上所述,  $\alpha = 0.73$ ,  $a = 0.34$  时, MaOEA/PAS-ESC 获得最佳性能.

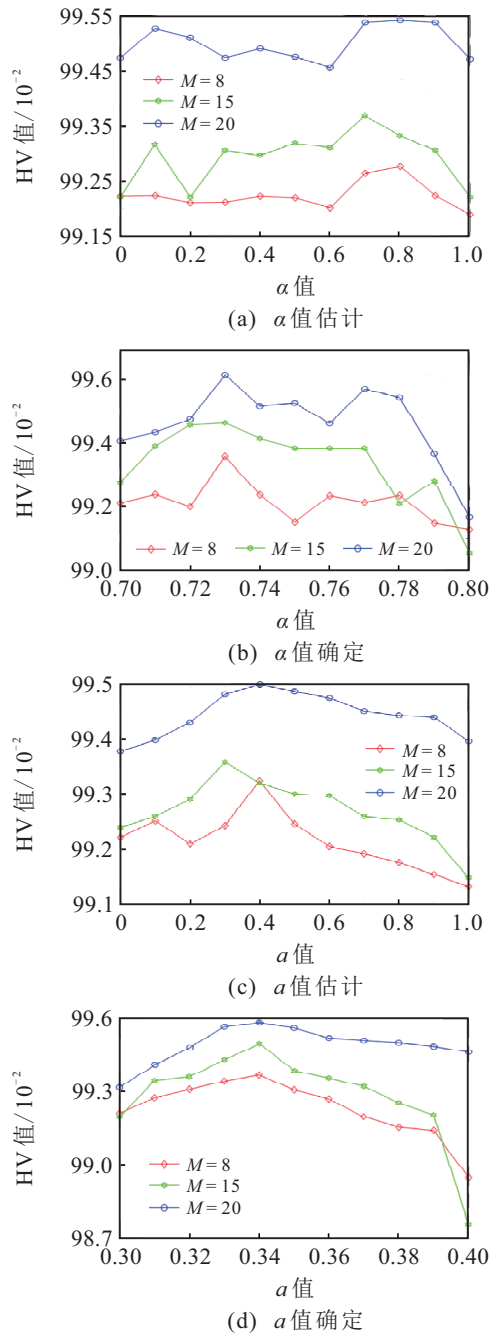


图3 MaOEA/PAS-ESC获得的HV平均值

## 4 结论

为提高处理不同类型PFs的MaOPs的普适性,本文提出了一种基于PAS和ESC的高维多目标进化算法MaOEA/PAS-ESC.首先,将种群分解为多个子种群,利用解与参考向量的角度和解之间的距离选择多样性良好的解.然后,在淘汰的解中,利用解与参考点之间的距离和角度选择收敛性良好的解,合并选择的两组解,获得下一代种群.

实验表明,与其他几种算法相比较, MaOEA/PAS-ESC算法在不同PF形状的MOPs和MaOPs中都具有较强的竞争力.运用PAS和ESC能够很好地平衡收敛性和多样性.算法在高维情况下的性能表现

优异,但在低维情况下的性能不是很理想,且运算时间较长.这是由于低维情况下种群中解的数量较少,解的分布较密集,使用参考点自适应策略与种群分解在多样性方面性能不佳,且使用参考点自适应策略极大地增加了运行时间.因此,下一步的工作是改进种群选择算法,使得算法在低维情况下能够有效地指导种群优化,提高种群的收敛性和多样性,且缩短运行时间.

## 参考文献(References)

- [1] Zhou A M, Qu B Y, Li H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 32-49.
- [2] Zhang J W, Xing L N. A survey of multiobjective evolutionary algorithms[C]. 2017 IEEE International Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC). Guangzhou, 2017: 93-100.
- [3] Yang Y, Luo J P, Huang L, et al. A many-objective evolutionary algorithm with epsilon-indicator direction vector[J]. *Applied Soft Computing Journal*, 2019, 76: 326-355.
- [4] Wang H D, Jin Y C, Yao X. Diversity assessment in many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(6): 1510-1522.
- [5] Zhou A M, Jin Y C, Zhang Q F, et al. Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization using a convergence criterion[C]. 2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Vancouver, 2006: 892-899.
- [6] While L, Hingston P, Barone L, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(1): 29-38.
- [7] 刘建昌, 赵阳杰, 李飞, 等. 基于R2指标的昂贵多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(4): 823-832. (Liu J C, Zhao Y J, Li F, et al. Expensive multi-objective optimization algorithm based on R2 indicator[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(4): 823-832.)
- [8] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721-736.
- [9] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 331-345.
- [10] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A new decomposition-based NSGA-II for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(7): 1191-1210.
- [11] Liu Y, Zhu N B, Li K L, et al. An angle

- dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 376-399.
- [12] Chen L, Liu H L, Tan K C, et al. Evolutionary many-objective algorithm using decomposition-based dominance relationship[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(12): 4129-4139.
- [13] Li M Q, Yang S X, Liu X H. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(3): 348-365.
- [14] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271.
- [15] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(4): 474-494.
- [16] Gong D W, Ji X F, Sun X Y. Solving many-objective optimization problems using set-based evolutionary algorithms[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(1): 77-83.
- [17] Ishibuchi H, Setoguchi Y, Masuda H, et al. Performance of decomposition-based many-objective algorithms strongly depends on Pareto front shapes[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(2): 169-190.
- [18] Zhou J J, Yao X F, Chan F T S, et al. A decomposition based evolutionary algorithm with direction vector adaptation and selection enhancement[J]. *Information Sciences*, 2019, 501: 248-271.
- [19] Van D A, Gary V, Lamont B. Multiobjective evolutionary algorithm research: A history and analysis[J]. *Evolutionary Computation*, 1998, 8(2): 125-147.
- [20] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(4): 609-622.
- [21] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 173-187.
- [22] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [23] Hernández Gómez R, Coello Coello C A. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization[C]. *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. Madrid, 2015: 679-686.
- [24] Li F, Cheng R, Liu J. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing Journal*, 2018, 67: 245-260.
- [25] Phan D H, Suzuki J. R2-IBEA: R2 indicator based evolutionary algorithm for multi-objective optimization[C]. *Proceedings of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Cancun, 2013: 1836-1845.
- [26] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1): 45-76.
- [27] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [28] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [29] Wang R, Zhou Z B, Ishibuchi H, et al. Localized weighted sum method for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(1): 3-18.
- [30] Li J H, Chen G Y, Li M, et al. An adaptive reference vector based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 80506-80518.
- [31] Jiang S Y, Yang S X. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346.
- [32] Gong D W, Liu Y P, Sun X Y, et al. Parallel many-objective evolutionary optimization using objectives decomposition[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(8): 1438-1451.
- [33] Qi Y T, Ma X L, Liu F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment[J]. *Evolutionary Computation*, 2014, 22(2): 231-264.
- [34] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization[C]. *Proceedings of the 2005 Evolutionary Multi-objective Optimization*. London: Springer, 2005: 105-145.
- [35] Huband S, Barone L, While L, et al. A scalable multi-objective test problem toolkit[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, 3410: 280-295.
- [36] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [37] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.

## 作者简介

覃灏(1995-), 男, 硕士生, 从事进化计算的研究, E-mail: qin95117@163.com;

李军华(1974-), 男, 教授, 博士, 从事进化计算、智能控制等研究, E-mail: jhlee126@126.com.