

控制与决策

Control and Decision

基于非光滑采样控制算法的二阶有向多智能体系统的一致性

都海波, 陈维乐

引用本文:

都海波,陈维乐. 基于非光滑采样控制算法的二阶有向多智能体系统的一致性[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2897–2906.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0395>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法

Analytic solutions to the optimal design for fast consensus of low-order multi-agent systems

控制与决策. 2022, 37(10): 2543–2551 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0151>

基于事件驱动的多智能体有限时间分群一致控制

Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with event-triggered control

控制与决策. 2022, 37(11): 2925–2933 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0162>

DoS攻击下一类二阶多智能体系统的安全分组一致性研究

Security group consensus for second-order multi-agent systems with cooperative-competitive interactions subject to DoS attacks

控制与决策. 2022, 37(11): 2887–2896 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0495>

多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems

控制与决策. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

基于非光滑采样控制算法的二阶有向多智能体系统的一致性

都海波[†], 陈维乐

(合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 合肥 230009)

摘要: 针对二阶有向多智能体系统的一致性问题, 在连续时间域和离散时间域分别提出一种非光滑控制协议. 首先, 提出一种连续时间非光滑一致性协议, 通过李雅普诺夫理论和齐次系统理论, 证明在无扰动情况下可以实现智能体状态的有限时间一致, 而在有扰动情况下智能体状态之间的误差将收敛到一个与控制参数和外部扰动相关的范围内; 然后, 基于采样控制, 提出离散非光滑一致性协议, 进一步分析采样周期对智能体状态之间误差的影响, 并给出误差收敛区间与控制参数、外部扰动和采样周期关系的显性表达式; 最后, 通过仿真实例验证理论的正确性和有效性.

关键词: 复杂网络; 多智能体系统; 有限时间控制; 非线性控制; 采样控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0395

引用格式: 都海波, 陈维乐. 基于非光滑采样控制算法的二阶有向多智能体系统的一致性[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2897-2906.

Consensus of second-order directed multi-agent system based on non-smooth sampled-data control algorithm

DU Hai-bo[†], CHEN Wei-le

(School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A non-smooth control protocol is proposed in the continuous time domain and the discrete time domain respectively for the consensus problem of second-order directed multi-agent systems. Firstly, a continuous-time non-smooth consensus protocol is proposed. By the Lyapunov theory and homogeneous system theory, it is proved that the finite time consensus of agents' states can be achieved in the absence of external disturbance, and the errors between the agents' states will converge to a range related to the control parameters and external disturbance in the presence of external disturbance. Then, based on sampled-data control, a discrete-time non-smooth consensus protocol is proposed, and the influence of the sampling period on the errors between agents' states is further analyzed, and the explicit expression of the influence of external disturbance, control parameters and the sampling period on the errors of any two agents is given. Finally, a simulation example is given to verify the correctness and effectiveness of the proposed theory.

Keywords: complex network; multi-agent systems; finite-time control; nonlinear control; sampled-data control

0 引言

近些年来, 多智能体的一致性问题的多个领域得到了广泛的研究, 如多移动机械手^[1-4]、姿态同步^[5-8]、编队^[9-14]、群集^[15-18]等. 所谓一致性指的是: 在没有中心协调控制或全局通信的情况下, 任意两个智能体相应状态(如位置、速度、加速度等)的误差通过智能体之间的局部相互作用收敛到 0. 此时称这种局部相互作用为一致性协议.

考虑到二阶系统在许多机械系统的模型, 如机器

人^[19-20]、Buck 变换器^[21-22]等, 研究二阶多智能体系统的一致性具有重要意义. 为了加快收敛速度和增强抗干扰能力, 一些学者引入了有限时间控制方法, 主要有齐次系统理论^[23]、终端滑模控制^[24]、加幂积分法^[25]3 种方法, 可以实现二阶多智能体系统的有限时间一致性. 其中, 文献[25]解决了无向连通拓扑下的二阶多智能体系统一致性问题, 但是对有向拓扑的问题并未提及, 这是本文要解决的关键问题之一.

此外, 这 3 种方法都是在连续时间域设计控制

收稿日期: 2021-03-08; 录用日期: 2021-07-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62073113, 62003122); 安徽省自然科学基金项目(2008085UD03, 1808085MF180); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(PA2020GDKC0016).

责任编辑: 关新平.

[†]通讯作者. E-mail: haibo.du@hfut.edn.cn.

器.在实际应用中,越来越多的控制器采用采样控制方法来实现^[26-31].在文献[29]中,针对二阶多智能体系统的一致性问题,提出了一种周期间歇采样数据控制策略,建立了耦合增益、通信宽度、采样周期和拉普拉斯矩阵频谱的充要条件.文献[30]研究了一般有向通信图条件下具有速度和输入约束的二阶多智能体系统的一致控制问题,并研究了在通信速率受限时领导者-跟随者多智能体系统的情况.此外,文献[31]研究了由连续时间子系统和离散时间子系统组成的具有切换动态的二阶多智能体系统的一致控制问题.

本文的主要贡献分为两个部分:1)在文献[25]的基础上,进一步将加幂积分法引入有向通信拓扑下的二阶多智能体系统;2)基于采样控制方式,得到了对应的离散一致性协议.在理论上,基于齐次系统理论和李雅普诺夫函数理论,得到了任意两个智能体之间误差收敛区间与控制参数、外部扰动和采样周期关系的显性表达式.最后,通过仿真实例验证了所提理论的有效性和正确性.

1 预备知识和问题描述

在本文中, $P > 0$ 表示矩阵 P 是对称正定矩阵.令 $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 分别代表 P 的最大特征值和最小特征值.此外,令 $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$, $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]^T$.

1.1 图理论

多智能体系统一般采用图理论中有向图来描述其通讯拓扑.具体地,对于无领导者多智能体系统,假设有 n 个智能体,记为 $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$,每个智能体代表一个节点,其通信拓扑用下列有向图表示, $G = \{V, E, A\}$.其中: $V = \{v_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是节点的集合, $E \subseteq V \times V$ 是边的集合, $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 是邻接矩阵.如果 $(v_j, v_i) \in E$,则 $a_{ij} > 0$,并称智能体 v_j 是智能体 v_i 的一个邻居智能体;否则, $a_{ij} = 0$.智能体 v_i 的所有邻居智能体的集合用 $N_i = \{j : (v_j, v_i) \in E\}$ 表示, v_i 的输出度定义为 $\deg_{\text{out}}(v_i) = d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$.图 G 的度矩阵为 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$,Laplacian矩阵为 $L = D - A$.图 G 中从 v_i 到 v_j 的路径是由不同的顶点组成的序列,以 v_i 开始,以 v_j 结束,每一步都包含在集合 E 中.如果有向图 G 中每一对不同的顶点 v_i 和 v_j 之间都有一条从 v_i 到 v_j 的路径,则称 G 是强连通的.此外,如果 $A^T = A$,则称 $G(A)$ 是无向图.如果每一对不同的顶点 v_i 和 v_j 之间都有一条从 v_i 到 v_j 的路径,则称 G 是连通的.

1.2 问题描述

本文研究下列具有外部扰动的二阶有向多智能体系统:

$$\dot{x}_i = v_i, \dot{v}_i = u_i + d_i(t), i \in \Gamma = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

其中: x_i 、 v_i 和 u_i 分别是第 i 个智能体的位置、速度和控制输入, $d_i(t)$ 是外部扰动,满足如下假设.

假设1 对于任意 $i \in \Gamma$,存在已知的常数 l 使得

$$|d_i(t)| \leq l, \forall t \geq 0. \quad (2)$$

考虑到在实际中,许多智能体只在采样时刻点发送和接收信息,控制器通常是数字实现的,其中常见的实现方式是使用零阶保持器

$$u(t) = u(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}),$$

$$t_{k+1} = t_k + T, k \in N = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

其中: t_k 和 t_{k+1} 是采样时刻点, T 是采样周期.基于此,本文的最终目标是设计一个分布式采样控制器 $u(t_k)$,该控制器仅基于自身和邻居智能体的采样数据信息,使所有智能体的状态达到一致.具体的设计分为两步:1)设计一种分布式连续时间控制器,该控制器仅基于自身和邻居智能体的实时数据信息;2)使用零阶保持器,将分布式连续时间控制器离散化,得到分布式采样控制器 $u(t_k)$.

1.3 重要引理

引理1^[32] 考虑下列系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in R^n, \quad (3)$$

其中 $f(\cdot) : R^n \rightarrow R^n$ 是一个连续函数.假设存在一个正定连续函数 $V(x) : U \rightarrow R$,这里有实数 $c > 0, \alpha \in (0, 1)$ 和一个原点的开区域 $U_0 \subset U$ 使得 $\dot{V}(x) + c(V(x))^\alpha \leq 0, x \in U_0 \setminus \{0\}$,那么 $V(x)$ 将在有限时间内收敛到0.此外,稳定时间 $T \leq \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$.

引理2^[33] 如果 $0 < p = p_1/p_2 \leq 1$,其中 $p_1 > 0, p_2 > 0$ 是正奇数,则 $|x^p - y^p| \leq 2^{1-p}|x - y|^p$.

引理3 如果 $p = p_1/p_2 \geq 1$,其中 $p_1 > 0, p_2 > 0$ 是正奇数,则 $|x^p - y^p| \geq 2^{1-p}|x - y|^p$.

引理4^[33] 对于任意 $c, d, \gamma > 0, x, y \in R$,有

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-c/d} |y|^{c+d}.$$

引理5^[34] 对于任何的 $x_i \in R, p \in (0, 1]$,有

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p.$$

引理6^[35] 对于无向连通图 G ,其Laplacian矩阵 L 有如下性质.对于任意 $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$,有

$$x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j)^2,$$

也就是说 L 是半正定的. 0 是 L 的一个单特征值并且 $\mathbf{1}$ 是对应的特征向量. 假设 L 的特征值用 $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 表示, 那么 $0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. 其中, 第2个最小的特征值 $\lambda_2 > 0$. 此外, $\mathbf{1}^T x = 0$ 时, 有 $x^T Lx \geq \lambda_2 x^T x$; 对于所有的 $i \in \Gamma, x^T Lx \leq \lambda_n x^T x$.

引理7^[36] 假设有向图 $G(A)$ 是强连通的, 则存在元素全为正数的列向量 \mathbf{w} 使得 $\mathbf{w}^T L(A) = \mathbf{0}^T$. 此外, 无向连通图 $(\text{diag}(\mathbf{w})A + A^T \text{diag}(\mathbf{w}))/2$ 的 Laplacian 矩阵是 $(\text{diag}(\mathbf{w})L(A) + L(A)^T \text{diag}(\mathbf{w}))/2$, 它是半正定的, 0 是它的代数简单特征值, $\mathbf{1}$ 是对应的特征向量.

引理8^[36] 假设有向图 $G(A)$ 有一棵生成树, L 是其 Laplacian 矩阵, 那么 0 是 L 的代数单特征值, $\mathbf{1}$ 是对应的特征向量, 其他特征值都有正实部.

2 主要结果

2.1 连续时间非光滑一致性协议

定理1 对于无领导者多智能体系统(1), 在假设1前提下, 如果有向图 G 是强连通的, 且控制输入 u_i 设计为

$$u_i(t) = -k_1 \left\{ v_i^{\frac{1}{1+\tau}} + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) \right] \right\}^{1+2\tau}, \quad i \in \Gamma. \quad (4)$$

其中

$$k_2 \geq \frac{2^{-\tau}(\gamma_2 + n\gamma_3) + \gamma_4 + n\gamma_5 + k_3}{2\gamma_1}, \quad k_3 > 0,$$

$$k_1 \geq$$

$$2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} \left[(\gamma_4 + n\gamma_5) \left(\frac{1}{2} + \frac{2^{-\tau}}{k_2} \right) + \frac{\gamma_2 + n\gamma_3}{2^{1+\tau}} + k_3 \right],$$

$$\gamma_1 = \min_{\psi \in \Pi^0} \psi^T B \psi, \quad \gamma_2 = \max_{\forall i \in \Gamma} \left\{ w_i \sum_{j \in N_i} a_{ij} \right\},$$

$$\gamma_3 = \max_{\forall i,j \in \Gamma} \{w_i a_{ij}\}, \quad \gamma_4 = \max_{\forall i \in \Gamma} \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \right\},$$

$$\gamma_5 = \max_{\forall i,j \in \Gamma} \{a_{ij}\}, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T,$$

$-1/2 < \tau = -q/p < 0, q$ 是偶数, p 是奇数.

1) 如果 $d_i(t) = 0, \forall i \in \Gamma$, 则所有智能体的状态在有限的时间内达成一致.

2) 如果 $d_i(t) \neq 0, \exists i \in \Gamma$, 则所有智能体的状态误差都将在有限时间内收敛到区域

$$\Omega_1 = \left\{ (x^T, v^T) \mid |x_i - x_j| \leq c_1 \left(\frac{2^{1+\tau} l}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3} \right)^{\frac{1}{1+2\tau}}, \right. \\ \left. |v_i - v_j| \leq c_2 \left(\frac{2^{1+\tau} l}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3} \right)^{\frac{1+2\tau}{1+2\tau}} \right\}, \quad (5)$$

其中 c_1 和 c_2 是一些常数.

证明 由引理7可知, 存在一个正列向量 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ 使得

$$\mathbf{w}^T L(A) = \mathbf{0}^T. \quad (6)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n V_i. \quad (7)$$

其中

$$V_0 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2+\tau} |q_i|^{2+\tau};$$

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T;$$

$$V_i = \frac{1}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \int_{v_i^*}^{v_i} (s^{\frac{1}{1+\tau}} - v_i^{*\frac{1}{1+\tau}}) ds, \quad i \in \Gamma;$$

$$q_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j);$$

$$v_i^* = -k_2 q_i^{1+\tau}. \quad (8)$$

首先, V_0 沿系统(1)轨迹的导数为

$$\dot{V}_0 = \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_i - v_j) = \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_i^* - v_j^*) + \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}[(v_i - v_i^*) + (v_j - v_j^*)]. \quad (9)$$

令 $\mathbf{q}^{1+\tau} = [q_1^{1+\tau}, q_2^{1+\tau}, \dots, q_n^{1+\tau}]^T, (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} = (\mathbf{q}^{1+\tau})^T$. 对于式(9)中的第1项, 有

$$\sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_i^* - v_j^*) = -k_2 \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij}(q_i^{1+\tau} - q_j^{1+\tau}) = -k_2 (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \text{diag}(\mathbf{w}) L(A) \mathbf{q}^{1+\tau} = -k_2 (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} B \mathbf{q}^{1+\tau}, \quad (10)$$

其中 $B = \frac{1}{2}(\text{diag}(\mathbf{w})L(A) + L(A)^T \text{diag}(\mathbf{w}))$.

对式(10)的估计参考了文献[37]中的处理方式. 令 $\Pi = \{\chi : \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$, 其中的非零项符号不完全相同, $\Pi^0 = \Pi \cap \{\chi^T \chi = 1\}$. 显然, Π^0 是有

界闭集,即一个紧集. 令 $\psi \in \Pi^0$, 那么 $\psi \notin \text{span}(1)$, 并通过引理7可知, $\psi^T B \psi > 0$. 考虑到函数 $\psi^T B \psi$ 是连续的, 并且 Π^0 是紧集, $\psi^T B \psi$ 必然有一个大于0的下界, 即存在一个正常数

$$\gamma_1 = \min_{\psi \in \Pi^0} \psi^T B \psi > 0. \quad (11)$$

注意到 $\mathbf{q} = L(A)\mathbf{x}$, 那么 $\mathbf{w}^T \mathbf{q} = \mathbf{w}^T L(A)\mathbf{x} = 0$, 这意味着 $\mathbf{q} \notin \text{span}(1)$ and $\mathbf{q} \in \Pi$. 因此有

$$\frac{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} B \mathbf{q}^{1+\tau}}{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau}} = \frac{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau}}{\sqrt{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau}}} B \frac{\mathbf{q}^{1+\tau}}{\sqrt{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau}}} \geq \gamma_1. \quad (12)$$

式(12)是在 $\frac{\mathbf{q}^{1+\tau}}{\sqrt{(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau}}} \in \Pi^0$ 和 $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ 前提下得到的.

进一步, 无论 \mathbf{q} 是否等于 $\mathbf{0}$, 下式成立:

$$(\mathbf{q}^T)^{1+\tau} B \mathbf{q}^{1+\tau} \geq \gamma_1 (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau}. \quad (13)$$

因此, 结合式(10), 有

$$\sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i^* - v_j^*) = -k_2 (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} B \mathbf{q}^{1+\tau} \leq -k_2 \gamma_1 (\mathbf{q}^T)^{1+\tau} \mathbf{q}^{1+\tau} = -k_2 \gamma_1 \sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau}. \quad (14)$$

接下来, 令 $\xi_i = v_i^{\frac{1}{1+\tau}} - (v_i^*)^{\frac{1}{1+\tau}} = v_i^{\frac{1}{1+\tau}} + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} q_i$. 对于式(9)中的第2项, 由引理2和引理4可知

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n w_i q_i^{1+\tau} \sum_{j=1}^n a_{ij} [(v_i - v_i^*) + (v_j - v_j^*)] \leq \\ & \sum_{i=1}^n \gamma_2 |q_i|^{1+\tau} |v_i - v_i^*| + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_3 |q_i|^{1+\tau} |v_m - v_m^*| \leq \\ & \sum_{i=1}^n \gamma_2 2^{-\tau} |q_i|^{1+\tau} |\xi_i|^{1+\tau} + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_3 2^{-\tau} |q_i|^{1+\tau} |\xi_m|^{1+\tau} \leq \\ & \sum_{i=1}^n \gamma_2 2^{-\tau} \left(\frac{1}{2} |q_i|^{2+2\tau} + \frac{1}{2} |\xi_i|^{2+2\tau} \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_3 2^{-\tau} \left(\frac{1}{2} |q_i|^{2+2\tau} + \frac{1}{2} |\xi_m|^{2+2\tau} \right) = \\ & \frac{\gamma_2 + n\gamma_3}{2^{1+\tau}} \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

其次, 给出 V_i 沿着系统(1)的导数

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \xi_i (u_i + d_i) - \frac{v_i - v_i^*}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \frac{d(v_i^{\frac{1}{1+\tau}})}{dt} =$$

$$\frac{\xi_i (u_i + d_i)}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} + \frac{v_i - v_i^*}{2^{-\tau} k_2} \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j). \quad (16)$$

对于式(16)的第2项, 由引理2得

$$\begin{aligned} & \frac{v_i - v_i^*}{2^{-\tau} k_2} \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) \leq \\ & \frac{|v_i - v_i^*|}{2^{-\tau} k_2} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) \right| \leq \\ & \frac{1}{k_2} |\xi_i|^{1+\tau} \left(\gamma_4 |v_i| + \gamma_5 \sum_{m=1}^n |v_m| \right). \end{aligned} \quad (17)$$

由引理2和引理4可得

$$\begin{aligned} & |\xi_i|^{1+\tau} |v_m| \leq \\ & |\xi_i|^{1+\tau} |v_m - v_m^*| + |\xi_i|^{1+\tau} |v_m^*| \leq \\ & 2^{-\tau} |\xi_i|^{1+\tau} |\xi_m|^{1+\tau} + k_2 |\xi_i|^{1+\tau} |q_m|^{1+\tau} \leq \\ & \frac{1 + 2^\tau k_2}{2^{1+\tau}} |\xi_i|^{2+2\tau} + \frac{|\xi_m|^{2+2\tau}}{2^{1+\tau}} + \frac{k_2}{2} |q_m|^{2+2\tau}. \end{aligned} \quad (18)$$

将不等式(18)和(17)代入(16)中, 发现

$$\begin{aligned} \dot{V}_i & \leq \\ & \frac{\xi_i (u_i + d_i)}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} + \frac{|\xi_i|^{2+2\tau}}{k_2} \frac{(1 + 2^\tau k_2)(\gamma_4 + n\gamma_5) + \gamma_4}{2^{1+\tau}} + \\ & \frac{\gamma_4}{2} |q_i|^{2+2\tau} + \frac{\gamma_5}{2^{1+\tau} k_2} \sum_{m=1}^n |\xi_m|^{2+2\tau} + \frac{\gamma_5}{2} \sum_{m=1}^n |q_m|^{2+2\tau}. \end{aligned} \quad (19)$$

然后, 结合式(7), (9), (14), (15)和(19), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq \\ & - \left(k_2 \gamma_1 - \frac{2^{-\tau} (\gamma_2 + n\gamma_3) + \gamma_4 + n\gamma_5}{2} \right) \sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} - \\ & \left((\gamma_4 + n\gamma_5) \left(\frac{1}{2} + \frac{2^{-\tau}}{k_2} \right) + \frac{\gamma_2 + n\gamma_3}{2^{1+\tau}} \right) \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i (u_i + d_i)}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}}. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入定理1中的控制律(4), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq - \frac{k_3}{2} \sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} - k_3 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i| l}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}}. \end{aligned} \quad (21)$$

令 $h = 2^{1+\tau} l / [k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3]$, 对于式(21)中的最后1项, 结合引理4, 有

$$\begin{aligned} & \frac{|\xi_i| l}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} = \frac{k_3}{2} |\xi_i| (h^{\frac{1}{1+\tau}})^{1+2\tau} \leq \\ & \frac{k_3}{2} \frac{1}{2 + 2\tau} |\xi_i|^{2+2\tau} + \frac{k_3}{2} \frac{1 + 2\tau}{2 + 2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+\tau}} \leq \\ & \frac{k_3}{2} |\xi_i|^{2+2\tau} + \frac{k_3}{2} \frac{1 + 2\tau}{2 + 2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+\tau}}. \end{aligned} \quad (22)$$

根据不等式(22), 得到

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{2} \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} \right) + \frac{k_3}{2} \frac{(1+2\tau)n}{2+2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+2\tau}}. \quad (23)$$

另一方面, 由引理 2 和引理 7 可知

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2+\tau} |q_i|^{2+\tau} + \frac{1}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \int_{v_i^*}^{v_i} (s^{\frac{1}{1+\tau}} - v_i^{*\frac{1}{1+\tau}}) ds = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2+\tau} |q_i|^{2+\tau} + \frac{1}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} |v_i - v_i^*| |\xi_i| \leq \\ & \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2+\tau} |q_i|^{2+\tau} + \frac{|\xi_i|^{2+\tau}}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \leq \\ & \gamma_6 \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\tau} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\gamma_6 = \max_{i \in \Gamma} \left\{ \frac{w_i}{2+\tau}, \frac{1}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \right\}$.

根据不等式(24), 由引理 5 得到

$$\left(\frac{V}{\gamma_6} \right)^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\tau} \right)^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} \leq \sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau}. \quad (25)$$

将不等式(25)代入(23)后, 有

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{2} \left(\frac{V}{\gamma_6} \right)^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} + \frac{k_3}{2} \frac{(1+2\tau)n}{2+2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+2\tau}}. \quad (26)$$

根据不等式(26), 当 $d_i(t) = 0, \forall i \in \Gamma$ 时, $h = 0$, 则 V 会在有限的时间内收敛到 0, 这意味着所有智能体的状态将在有限的时间内达成一致. 而当 $d_i(t) \neq 0, \exists i \in \Gamma$ 时, 所有智能体的状态误差将在有限时间内收敛到区域

$$\Omega_2 = \{(x^T, v^T) | V \leq \gamma_7 h^{\frac{2+\tau}{1+2\tau}}\}, \quad (27)$$

其中 $\gamma_7 = \gamma_6 \left(\frac{1+2\tau}{1+\tau} n \right)^{\frac{2+\tau}{2+2\tau}}$.

假设系统初始状态误差在 Ω_2 外, 即 $V(0) > \gamma_7 h^{\frac{2+\tau}{1+2\tau}}$, 则当系统状态误差在 Ω_2 外时, 结合式(26)可知

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{4} \left(\frac{V}{\gamma_6} \right)^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} = -\frac{k_3}{4} \gamma_6^{-\frac{2+2\tau}{2+\tau}} V^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}}. \quad (28)$$

由引理 1 可知, 所有智能体的状态误差将在有限时间内收敛到 Ω_2 , 且有限收敛时间为

$$T_1 = \frac{\gamma_6^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} V(0)^{\frac{-2\tau}{2+\tau}}}{\frac{k_3}{4} \frac{-2\tau}{2+\tau}}.$$

基于式(27), 接下来将估计任意两个智能体状态之间的误差. 令 $|q_{i,m}| = \max_{i \in \Gamma} \{ |q_i| \}$, q_i 见式(8), 那么由式(7)和(27)可知

$$\begin{aligned} |q_{i,m}| & \leq \left(\frac{2+\tau}{w_{i,m}} \right)^{\frac{1}{2+\tau}} V_0^{\frac{1}{2+\tau}} \leq \\ & \left(\frac{2+\tau}{w_{i,m}} \right)^{\frac{1}{2+\tau}} V^{\frac{1}{2+\tau}} \leq \gamma_8 h^{\frac{1}{1+2\tau}}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\gamma_8 = \left(\frac{2+\tau}{w_{i,m}} \gamma_7 \right)^{\frac{1}{2+\tau}}$.

注意到 $\mathbf{q} = L(A)\mathbf{x}$, 对该式进行初等行变换, 由引理 8 可知, 最终形式有

$$x_{n-1} - x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{n-1,j} q_j, \quad (30)$$

其中 $\beta_{n-1,j}$ 是常数. 进一步, 结合式(29), 有

$$\begin{aligned} |x_{n-1} - x_n| & \leq \sum_{j=1}^{n-1} |\beta_{n-1,j}| |q_{i,m}| \leq \\ & \sum_{j=1}^{n-1} |\beta_{n-1,j}| \gamma_8 h^{\frac{1}{1+2\tau}}. \end{aligned} \quad (31)$$

考虑在任意 $i, j \in \Gamma$ 情况下, 对 $|x_i - x_j|$ 进行估计. 由于智能体彼此地位相同, 只需要重新编号, 便可以得到类似的结论, 因此有

$$|x_i - x_j| \leq c_1 h^{\frac{1}{1+2\tau}}, \quad (32)$$

其中 c_1 是一个正的常数. 另一方面, 由引理 3 得到

$$|s^{\frac{1}{1+\tau}} - v_i^{*\frac{1}{1+\tau}}| \geq 2^{1-\frac{1}{1+\tau}} |s - v_i^*|^{\frac{1}{1+\tau}}. \quad (33)$$

因此, 当 $v_i \geq v_i^*$ 时, 有

$$\begin{aligned} V_i & = \frac{1}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \int_{v_i^*}^{v_i} (s^{\frac{1}{1+\tau}} - v_i^{*\frac{1}{1+\tau}}) ds \geq \\ & \frac{2^{1-\frac{1}{1+\tau}}}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \int_{v_i^*}^{v_i} (s - v_i^*)^{\frac{1}{1+\tau}} ds = \\ & \frac{2^{1-\frac{1}{1+\tau}} (2+\tau)}{2^{1-\tau} (1+\tau) k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} (v_i - v_i^*)^{\frac{2+\tau}{1+\tau}}. \end{aligned} \quad (34)$$

当 $v_i \leq v_i^*$ 时, 类似地, 可以得到式(34), 故省略. 基于式(34), 得到

$$\begin{aligned} |v_i - v_i^*| & \leq \left(\frac{2^{1-\frac{1}{1+\tau}} (2+\tau)}{2^{1-\tau} (1+\tau) k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} \right)^{-\frac{1+\tau}{2+\tau}} V_i^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} = \\ & \gamma_9 V_i^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} \leq \gamma_9 V^{\frac{1+\tau}{2+\tau}}. \end{aligned} \quad (35)$$

结合不等式(35)以及(29), 有

$$\begin{aligned} |v_i| & \leq |v_i - v_i^*| + |v_i^*| \leq \\ & \gamma_9 V^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} + k_2 |q_i|^{1+\tau} \leq \\ & \gamma_9 V^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} + k_2 \left(\frac{2+\tau}{w_{i,m}} \right)^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} V^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} \leq \end{aligned}$$

$$\gamma_{10} V^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} \leq \gamma_{10} \gamma_7^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} h^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}}. \quad (36)$$

所以

$$|v_i - v_j| \leq |v_i| + |v_j| \leq 2\gamma_{10} \gamma_7^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} h^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}} = c_2 h^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}}. \quad (37)$$

最后,将 $h = 2^{1+\tau} l / [k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3]$ 代入式(32)和(37),式(5)得证. \square

2.2 离散时间非光滑一致性协议

如果连续时间一致性协议以采样控制的形式实现,则可以得到如下离散时间一致性协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u_i(t_k) = \\ &-k_1 \left\{ v_i^{\frac{1}{1+\tau}}(t_k) + \right. \\ &\left. k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t_k) - x_j(t_k)) \right) \right\}^{1+2\tau}, \\ &\forall t \in [t_k, t_{k+1}), i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

其中 k_1, k_2 与定理1中相同.

定理2 对于有向多智能体系统(1),在假设1前提下,如果有向图 G 是强连通的,并且控制输入 u_i 设计如式(38),则所有系统的状态误差都将最终收敛到区域

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \\ &\left\{ (x^T, v^T) \mid |x_i - x_j| \leq m_3, |v_i - v_j| \leq m_4, \right. \\ m_3 &= \max \left\{ c_3 T^{-\frac{1}{\tau}}, c_4 \left(\frac{2^{1+\tau} l}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3} \right)^{\frac{1}{1+2\tau}} \right\}, \\ m_4 &= \max \left\{ c_5 T^{-\frac{1+\tau}{\tau}}, c_6 \left(\frac{2^{1+\tau} l}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3} \right)^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中 c_3, c_4, c_5, c_6 是一些常数.

证明 使用与式(7)相同的Lyapunov函数,结合式(23),有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\frac{k_3}{2} \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} \right) + \\ &\frac{k_3}{2} \frac{(1+2\tau)n}{2+2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+2\tau}} + \sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i| |u_i - u_i(t_k)|}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}}. \end{aligned} \quad (40)$$

首先,基于引理2,有

$$\begin{aligned} |u_i - u_i(t_k)| &= k_1 |\xi_i^{1+2\tau} - \xi_i^{1+2\tau}(t_k)| \leq \\ &k_1 2^{-2\tau} |\xi_i - \xi_i(t_k)|^{1+2\tau}. \end{aligned} \quad (41)$$

注意到

$$|\xi_i - \xi_i(t_k)| = \left| \int_{t_k}^t \dot{\xi}_i(t) dt \right| \leq \int_{t_k}^t |\dot{\xi}_i(t)| dt. \quad (42)$$

因此,对 $|\dot{\xi}_i(t)|$ 的估计将是证明的关键所在.

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}_i(t)| &= \\ &\left| \frac{1}{1+\tau} v_i^{\frac{1}{1+\tau}-1} \dot{v}_i + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \dot{q}_i \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{1+\tau} v_i^{\frac{1}{1+\tau}-1} (-k_1 \xi_i^{1+2\tau}(t_k) + d_i) \right| + \\ &k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) \right| \leq \\ &\frac{k_1}{1+\tau} |v_i|^{\frac{-\tau}{1+\tau}} |\xi_i(t_k)|^{1+2\tau} + \frac{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3}{(1+\tau) 2^{1+2\tau}} |v_i|^{\frac{-\tau}{1+\tau}} h + \\ &k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \left(\gamma_4 |v_i| + \gamma_5 \sum_{m=1}^n |v_m| \right). \end{aligned} \quad (43)$$

由式(29)和(36)可知

$$\begin{aligned} |\xi_i| &= |v_i^{\frac{1}{1+\tau}} + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} q_i| \leq |v_i|^{\frac{1}{1+\tau}} + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} |q_i| \leq \\ &\gamma_{10}^{\frac{1}{1+\tau}} V^{\frac{1}{2+\tau}} + k_2^{\frac{1}{1+\tau}} \left(\frac{2+\tau}{w_{i,m}} \right)^{\frac{1}{2+\tau}} V^{\frac{1}{2+\tau}} = \gamma_{11} V^{\frac{1}{2+\tau}}. \end{aligned} \quad (44)$$

令 $V_{\max}(t) = \max_{u \in [t_k, t]} V(u)$. 基于引理4,式(36)和(44),必然存在常数 γ_{12} 和 γ_{13} 使得

$$|\dot{\xi}_i| \leq \gamma_{12} V_{\max}^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} + \gamma_{13} h^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}}. \quad (45)$$

进一步,结合式(42)可得

$$|\xi_i - \xi_i(t_k)| \leq \gamma_{12} T V_{\max}^{\frac{1+\tau}{2+\tau}} + \gamma_{13} T h^{\frac{1+\tau}{1+2\tau}}. \quad (46)$$

根据不等式(46)、(42)和引理4,必存在一个正的常数 γ_{14} 使得

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_i| |u_i - u_i(t_k)|}{2^{-\tau} k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} &\leq \\ &\frac{2^{-\tau} k_1}{k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}} |\xi_i| |\xi_i - \xi_i(t_k)|^{1+2\tau} \leq \\ &\frac{k_3}{4} |\xi_i|^{2+2\tau} + \gamma_{14} |\xi_i - \xi_i(t_k)|^{2+2\tau} \leq \\ &\frac{k_3}{4} |\xi_i|^{2+2\tau} + \gamma_{14} \gamma_{12}^{2+2\tau} T^{2+2\tau} V_{\max}^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2+\tau}} + \\ &\gamma_{14} \gamma_{13}^{2+2\tau} T^{2+2\tau} h^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{1+2\tau}}. \end{aligned} \quad (47)$$

将式(47)代入(40),有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\frac{k_3}{4} \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^{2+2\tau} + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+2\tau} \right) + \\ &\frac{k_3}{2} \frac{(1+2\tau)n}{2+2\tau} h^{\frac{2+2\tau}{1+2\tau}} + \gamma_{15} T^{2+2\tau} V_{\max}^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2+\tau}} + \\ &\gamma_{16} T^{2+2\tau} h^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{1+2\tau}}. \end{aligned} \quad (48)$$

其中: $\gamma_{15} = n\gamma_{14}\gamma_{12}^{2+2\tau}$, $\gamma_{16} = n\gamma_{14}\gamma_{13}^{2+2\tau}$. 进一步, 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{k_3}{4} \left(\frac{V}{\gamma_6}\right)^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} + \frac{k_3(1+2\tau)n}{2(2+2\tau)} h^{\frac{2+2\tau}{1+2\tau}} + \\ & \gamma_{15} T^{2+2\tau} V_{\max}^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2+\tau}} + \gamma_{16} T^{2+2\tau} h^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{1+2\tau}}. \end{aligned} \quad (49)$$

定义集合

$$\Omega_4 = \{(x^T, v^T) | V \leq \max\{\gamma_{17} T^{-\frac{2+\tau}{\tau}}, \gamma_{18} h^{\frac{2+\tau}{1+2\tau}}\}\}, \quad (50)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{17} = & \max\left\{\left(\gamma_6^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} \frac{16\gamma_{15}}{k_3}\right)^{-\frac{2+\tau}{\tau(2+2\tau)}}, \left(\gamma_6^{\frac{2+2\tau}{2+\tau}} \frac{16\gamma_{16}}{k_3}\right)^{-\frac{2+\tau}{\tau(2+2\tau)}}\right\}, \\ \gamma_{18} = & \max\left\{\gamma_6 \left(\frac{8n(1+2\tau)}{2+2\tau}\right)^{\frac{2+\tau}{2+2\tau}}, 1\right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

如果系统的状态不在区域内, 则

$$V > \gamma_{17} T^{-\frac{2}{\tau}}, \quad V > \gamma_{18} \left(\frac{2h}{k_3}\right)^{\frac{2}{1+2\tau}},$$

这意味着

$$\dot{V} \leq -2\gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}} + \gamma_{15} T^{2+\tau} V_{\max}^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t). \quad (52)$$

通过这个关系, 可以通过反证法证明

$$\max_{\forall \tau \in [t_k, t_{k+1}]} V(\tau) = V(t_k). \quad (53)$$

假设在时间间隔 $[t_k, t_{k+1}]$ 中有一个时刻点 t^* 使得 $V(t^*) > V(t_k)$. 注意到

$$\dot{V}(t_k) \leq -\gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t_k) < 0,$$

那么 $V(t)$ 将在 t_k 开始一段时间内减小. 因此存在时刻点 $t^{**} \in [t_k, t^*]$ 使得:

- 1) $V(t^{**}) = V(t_k)$;
- 2) $\dot{V}(t^{**}) > 0$;
- 3) $V(t) \leq V(t_k), \forall t \in [t_k, t^{**}]$.

考虑 1) 和 3), 结合式(52)可知

$$\dot{V}(t^{**}) \leq -\gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t^{**}) < 0,$$

这与 2) 矛盾. 所以, 式(53)得证. 进一步, 将式(53)代入(52)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -2\gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t) + \gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t_k). \end{aligned} \quad (54)$$

显然, $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $V(t)$ 总存在两种情况: 1) $V(t) > 0.5V(t_k)$; 2) $V(t) \leq 0.5V(t_k)$. 第 1 种情况总是存在并

首先出现, 也就是说, 在 $V(t) \leq 0.5V(t_k)$ 之前, 有

$$\dot{V} \leq -(2 - 2^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}) \gamma_{15} T^{2+\tau} V^{\frac{(1+\tau)(2+2\tau)}{2}}(t). \quad (55)$$

不管第 2 种情况是否发生, 如下不等式总是成立的:

$$V(t_{k+1}) \leq \gamma_{19} V(t_k), \quad (56)$$

其中 $0 < \gamma_{19} < 1$. 因此, $V(t_k)$ 将收敛到 Ω_4 .

在此基础上, 后面的分析类似于连续时间情况, 系统状态误差最终将收敛到区域 Ω_3 . \square

注 1 当 $\tau = 0$ 时, 非光滑一致性协议(38)将转变为光滑一致性协议

$$\begin{aligned} u_i(t) = u_i(t_k) = & -r_1 v_i(t_k) - r_1 r_2 \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t_k) - x_j(t_k)) \right], \\ & \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad i \in \Gamma, \end{aligned} \quad (57)$$

其中

$$\begin{aligned} r_2 \geq & \frac{(\gamma_2 + n\gamma_3) + \gamma_4 + n\gamma_5 + r_3}{2\gamma_1}, \quad r_3 > 0; \\ r_1 \geq & r_2 \left[(\gamma_4 + n\gamma_5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\gamma_2 + n\gamma_3}{2} + r_3 \right]. \end{aligned}$$

通过类似的证明, 很容易知道所有智能体的状态误差都收敛到区域

$$\begin{aligned} \Omega_5 = \left\{ (x^T, v^T) \mid |x_i - x_j| \leq \bar{m}_3, \quad |v_i - v_j| \leq \bar{m}_4, \right. \\ \left. \bar{m}_3 = \bar{c}_4 \left(\frac{2l}{r_2^2 r_3} \right), \quad \bar{m}_4 = \bar{c}_6 \left(\frac{2l}{r_2^2 r_3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

其中 \bar{c}_4, \bar{c}_6 是一些常数.

注 2 当 $\tau = 0$ 时, 即在光滑一致性协议下, 考虑一种特殊情况, $\sum_{i=1}^n q_i = 0$, 则

$$\mathbf{1}^T \mathbf{q} = \mathbf{1}^T L \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in R^n.$$

由于 \mathbf{x} 的任意性, 有 $\mathbf{1}^T L = 0$, 此时 \mathbf{w} 可以取 $\mathbf{1}$. 进一步, 结合引理 6, 式(13)变为

$$\mathbf{q}^T B \mathbf{q} \geq \lambda_2(B) \mathbf{q}^T \mathbf{q},$$

其中 $B = (L^T + L)/2$. 也就是说, 注 1 中的 γ_1 可用 $\lambda_2(B)$ 代替.

注 3 定理 2 和注 1 通过严格的数学证明, 给出了系统稳态误差与控制参数之间的显式关系. 为了提高系统的抗干扰性能, 在光滑一致协议(57)的作用下, 控制参数需要非常大, 以确保稳定误差足够小. 然而, 在实际中, k_2, r_2 和 k_3, r_3 不能过大. 此时, 由于附加参数 τ , 在 k_2 和 k_3 无法无限增加的情况下, 调节 τ 便能显著提高系统鲁棒性. 具体地, 可以选择 k_2 和 k_3 使得 $0 < 2^{1+\tau} l / k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}} k_3 < 1$, 并且选择 τ 接近于 $-1/2$, 则 Ω_1 和 Ω_3 中的 $1/(1+2\tau)$ 将远大于 1, 进一步

有 $(2^{1+\tau}l/k_2^{1+\frac{1}{1+\tau}}k_3)^{\frac{1}{1+2\tau}} \ll 2l/r_2^2r_3$. 此外,在实际中,采样周期 T 一般非常小(连续的情况可以看作 $T = 0$),这意味着 $m_3 \ll \bar{m}_3$ 和 $m_4 \ll \bar{m}_4$. 也就是说, Ω_3 的范围远远小于 Ω_5 的范围,这表明非光滑一致性协议比一般光滑一致性协议具有更好的抗干扰能力.

3 仿真实例

考虑含有4个智能体的多智能体系统(1),智能体之间的信息交换如图1所示. 采样周期选择 $T =$

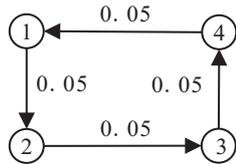
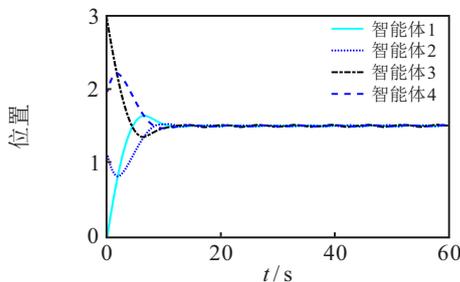
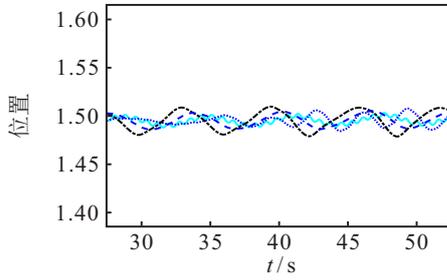


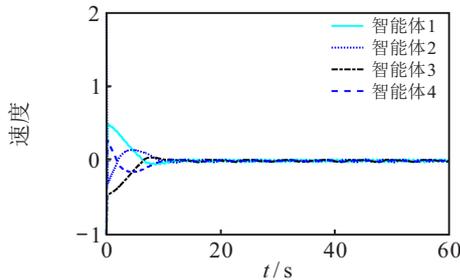
图1 有向多智能体系统通讯拓扑图



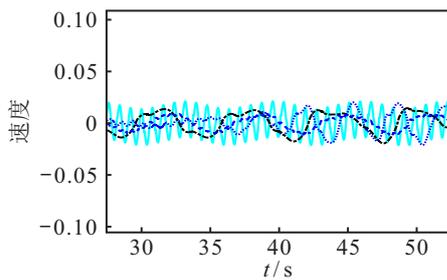
(a) 智能体位置



(b) 图(a)的局部示意图



(c) 智能体速度

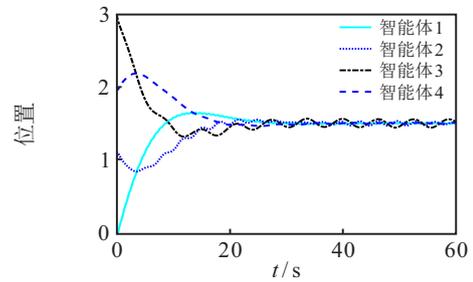


(d) 图(c)的局部示意图

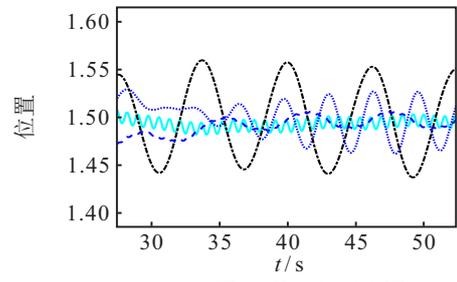
图2 非光滑协议下的系统响应

0.01 s. 初始条件: $x(0) = [0, 1, 3, 2]^T, v(0) = [-1, 2, -1, -1]^T$. 外部扰动: $d_1(t) = 0.9 \sin(8t - 1), d_2(t) = -0.5 \cos(2t) + 0.5 \cos(1.8t), d_3(t) = 0.6 \sin t + 0.7 \cos t, d_4(t) = 0.2 \cos(11t - 4)$, 所以 $l = 1$.

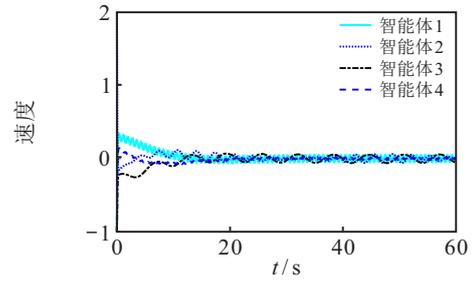
为了对比的公平性,非光滑控制器增益与光滑控制器增益取值相同,具体地,取 $k_1 = r_1 = 16, k_2 = r_2 = 3$. 此外,非光滑协议的附加参数取 $\tau = -2/9$. 两种协议下的闭环系统的响应曲线分别如图2和图3所示,其中,(a)和(c)分别是4个智能体的位置和速度,(b)和(d)分别是(a)和(c)的局部放大后的示意图. 为了对比明显,图2和图3对应的子图坐标范围大致相同. 显然,由图2和图3可以看出,非光滑协议(38)比光滑协议(57)具有更快的收敛速度和更好的抗干扰性能.



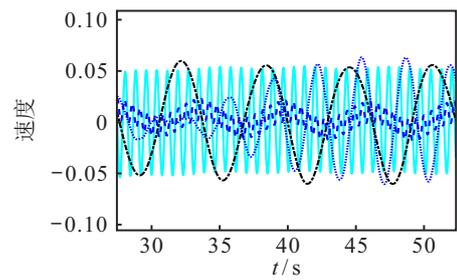
(a) 智能体位置



(b) 图(a)的局部示意图



(c) 智能体速度



(d) 图(c)的局部示意图

图3 光滑协议下的系统响应

4 结论

针对二阶有向多智能体系统的一致性问题, 本文设计了连续非光滑控制协议和离散非光滑控制协议, 后者在前者的基础上并结合采样控制得到. 通过严格的理论证明, 在连续且无外部扰动时, 可以实现系统状态的有限时间一致. 而在外部扰动存在或是采样控制下, 系统任意两个智能体状态的误差将收敛到一个区域, 该区域的范围受控制参数、外部扰动和采样周期影响. 本文给出了这种关系的显性表达式, 说明非光滑一致性协议相比光滑一致性协议具有更强的鲁棒性. 此外, 仿真实例进一步验证了所提理论的正确性.

参考文献(References)

- [1] Li Z J, Li J X, Kang Y. Adaptive robust coordinated control of multiple mobile manipulators interacting with rigid environments[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2028-2034.
- [2] Li Z J, Yang C G, Tang Y. Decentralised adaptive fuzzy control of coordinated multiple mobile manipulators interacting with non-rigid environments[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(3): 397-410.
- [3] Ren C G, Du T, Li G L, et al. Disturbance observer-based consensus control for multiple robotic manipulators[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 51348-51354.
- [4] Fu J T, Li Y K, Yin S Y, et al. Robust anti-disturbance coordinated control for multiple manipulators[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 95897-95905.
- [5] Du H B, Li S H. Attitude synchronization for flexible spacecraft with communication delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(11): 3625-3630.
- [6] Du H B, He Y G, Li S H, et al. Attitude synchronization for multiple flexible spacecraft based on non-smooth control[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, 47(3): 9968-9972.
- [7] Liu X P, Zou Y, Meng Z Y, et al. Coordinated attitude synchronization and tracking control of multiple spacecraft over a communication network with a switching topology[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 1148-1162.
- [8] Li S H, Du H B, Shi P. Distributed attitude control for multiple spacecraft with communication delays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(3): 1765-1773.
- [9] Jiang J H, Jiang Y Y. Leader-following consensus of linear time-varying multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Automatica*, 2020, 113: 108804.
- [10] Jin Q C, Zhu W W, Du H B, et al. Distributed formation control of multiple quadrotor aircraft based on quaternion[C]. *The 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Beijing, 2017: 5755-5761.
- [11] Du H B, Zhu W W, Wen G H, et al. Finite-time formation control for a group of quadrotor aircraft[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 69: 609-616.
- [12] Du H B, Zhu W W, Wen G H, et al. Distributed formation control of multiple quadrotor aircraft based on nonsmooth consensus algorithms[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(1): 342-353.
- [13] Fu J J, Wen G H, Yu X H, et al. Distributed formation navigation of constrained second-order multiagent systems with collision avoidance and connectivity maintenance[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3000264.
- [14] Zhao Y, Duan Q X, Wen G H, et al. Time-varying formation for general linear multiagent systems over directed topologies: A fully distributed adaptive technique[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(1): 532-541.
- [15] Guo W L, Lü J H, Chen S H, et al. Second-order tracking control for leader-follower multi-agent flocking in directed graphs with switching topology[J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(12): 1051-1058.
- [16] Zhu J D, Lu J H, Yu X H. Flocking of multi-agent non-holonomic systems with proximity graphs[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, 60(1): 199-210.
- [17] Zhang H T, Cheng Z M, Chen G R, et al. Model predictive flocking control for second-order multi-agent systems with input constraints[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2015, 62(6): 1599-1606.
- [18] Xu Z H, Liu H L, Liu Y. Fixed-time leader-following flocking for nonlinear second-order multi-agent systems[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 86262-86271.
- [19] Sánchez-Sánchez P, Arteaga-Pérez M A. Simplified methodology for obtaining the dynamic model of robot manipulators[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2012, 9(5): 170.
- [20] Zhai J Y, Xu G. A novel non-singular terminal sliding mode trajectory tracking control for robotic manipulators[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(1): 391-395.
- [21] Cheng Y Y, Wen G H, Du H B. Design of robust discretized sliding mode controller: Analysis and application to buck converters[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(12): 10672-10681.
- [22] Wang Z, Li S H, Li Q. Discrete-time fast terminal sliding mode control design for DC-DC buck converters with mismatched disturbances[J]. *IEEE Transactions on*

- Industrial Informatics, 2020, 16(2): 1204-1213.
- [23] Wang X L, Hong Y G. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 15185-15190.
- [24] Khoo S, Xie L H, Man Z H. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2009, 14(2): 219-228.
- [25] Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1706-1712.
- [26] 王攀, 柴琳, 费树岷, 等. 一类非线性状态时滞系统的基于采样控制器的渐近稳定问题[J]. 控制与决策, 2020, 35(5): 1143-1150.
(Wang P, Chai L, Fei S M, et al. Asymptotic stability for a class of nonlinear systems with state time-delay based on sampled-data controller[J]. Control and Decision, 2020, 35(5): 1143-1150.)
- [27] Sun J K, Yang J, Li S H, et al. Sampled-data-based event-triggered active disturbance rejection control for disturbed systems in networked environment[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(2): 556-566.
- [28] Du H B, Cheng Y Y, Li C J. Second-order consensus for nonlinear leader-following multi-agent systems with sampled-data information[C]. The 34th Chinese Control Conference (CCC). Hangzhou, 2015: 7178-7183.
- [29] Yu Z Y, Jiang H J, Hu C. Second-order consensus for multiagent systems via intermittent sampled data control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(11): 1986-2002.
- [30] Fu J J, Wen G H, Yu W W, et al. Consensus of second-order multiagent systems with both velocity and input constraints[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(10): 7946-7955.
- [31] Liu Y F, Su H S, Zeng Z G. Second-order consensus for multiagent systems with switched dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3015977.
- [32] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [33] Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1061-1079.
- [34] Hardy G, Littlewood J, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [35] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [36] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.
- [37] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2605-2611.

作者简介

都海波(1982—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制理论、机器人控制技术等研究, E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn;

陈维乐(1997—), 男, 硕士生, 从事非线性控制理论的研究, E-mail: chenweile1997@mail.hfut.edu.cn.

(责任编辑: 孙艺红)