

# 控制与决策

Control and Decision

## 融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类

张小乾, 王晶, 薛旭倩, 刘知贵

引用本文:

张小乾, 王晶, 薛旭倩, 刘知贵. 融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2977–2983.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0566>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### [L<sub>p</sub>-范数约束下MKL-OC-ELM的装备故障检测](#)

MKL and OC-ELM fault detection based on L<sub>p</sub>-norm constraint

控制与决策. 2021, 36(10): 2379–2388 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0443>

#### [基于低秩矩阵恢复的视觉显著性目标检测与细化](#)

Saliency object detection and refinement based on low rank matrix recovery

控制与决策. 2021, 36(7): 1707–1713 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1795>

#### [基于混合模型驱动的红外与可见光图像融合](#)

Infrared and visible image fusion based on hybrid model driving

控制与决策. 2021, 36(9): 2143–2151 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1749>

#### [非局部低秩正则化视频压缩感知重构](#)

Compressive video sensing reconstruction via nonlocal low-rank regularization

控制与决策. 2021, 36(11): 2743–2750 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0310>

#### [基于联合知识表示学习的多模态实体对齐](#)

Multi-modal entity alignment based on joint knowledge representation learning

控制与决策. 2020, 35(12): 2855–2864 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0331>

# 融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类

张小乾<sup>1</sup>, 王晶<sup>1</sup>, 薛旭倩<sup>2</sup>, 刘知贵<sup>1†</sup>

(1. 西南科技大学 信息工程学院, 四川 绵阳 621010;  
2. 西南科技大学 计算机科学与技术学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** 针对现有的多核学习 (multiple kernel learning, MKL) 子空间聚类方法忽略噪声和特征空间中数据的低秩结构问题, 提出一种新的鲁棒多核子空间聚类方法 (low-rank robust multiple kernel clustering, LRMKC), 该方法结合块对角表示 (block diagonal representation, BDR) 与低秩共识核 (low-rank consensus kernel, LRCK) 学习, 可以更好地挖掘数据的潜在结构. 为了学习最优共识核, 设计一种基于混合相关熵度量 (mixture correntropy induced metric, MCIM) 的自动加权策略, 其不仅为每个核设置最优权重, 而且通过抑制噪声提高模型的鲁棒性; 为了探索特征空间中数据的低秩结构, 提出一种非凸低秩共识核学习方法; 考虑到亲和度矩阵的块对角性质, 对系数矩阵应用块对角约束. LRMKC 将 MKL、LRCK 与 BDR 巧妙融合, 以迭代提高各种方法的效率, 最终形成一个处理非线性结构数据的全局优化方法. 与最先进的 MKL 子空间聚类方法相比, 通过在图像和文本数据集上的大量实验验证了 LRMKC 的优越性.

**关键词:** 多核学习; 混合相关熵度量; 低秩共识核; 块对角表示

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0566

开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):



**引用格式:** 张小乾, 王晶, 薛旭倩, 等. 融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类 [J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2977-2983.

## Low-rank robust multiple kernel clustering with block diagonal constraints

ZHANG Xiao-qian<sup>1</sup>, WANG Jing<sup>1</sup>, XUE Xu-qian<sup>2</sup>, LIU Zhi-gui<sup>1†</sup>

(1. School of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China;  
2. School of Computer Science and Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

**Abstract:** Existing (multiple kernel learning, MKL) subspace clustering algorithms ignore the noise and the low-rank structure of the data in the feature space, therefore, we propose a new low-rank robust multiple kernel clustering algorithm (LRMKC) with block diagonal representation (BDR) and low-rank consensus kernel (LRCK), which is better for mining the underlying structure of the data. In particular, 1) to learn the optimal consensus kernel, we design an automatic weighting strategy using the mixture correntropy induced metric (MCIM), which not only sets the optimal weight for each kernel but also improves the robustness of the LRMKC by suppressing noise; 2) to explore the low-rank structure of input data in feature space, we learn the low-rank consensus kernel by the Schatten  $p$ -norm constraint on the optimal consensus kernel; 3) considering the block diagonal property of the affinity matrix, we apply block diagonal constraint to the coefficient matrix. The LRMKC combines MKL, LRCK, and BDR to solve these problems at the same time. Through the interaction of three technologies, the results of other technologies are used in the overall optimal solution to iteratively improve the efficiency of each technology, and finally form an overall optimal algorithm for processing nonlinear structural data. Compared with the most advanced MKL subspace clustering algorithms, extensive experiments on image and text datasets verify the competitiveness of the LRMKC.

**Keywords:** multiple kernel learning; mixture correntropy induced metric; low-rank consensus kernel; block diagonal representation

收稿日期: 2021-04-05; 录用日期: 2021-08-18.

基金项目: 四川省科技计划项目 (2020YJ0432); 西南科技大学研究生创新基金项目 (20ycx0032); 国家自然科学基金青年项目 (62102331); 西南科技大学博士研究基金项目 (22zx7110).

责任编辑: 赵春晖.

†通讯作者. E-mail: liuzhigui@swust.edu.cn.

## 0 引言

子空间聚类是一种高维数据聚类方法,目的是将来自不同子空间的高维数据分割至其对应的低维子空间.目前,子空间聚类已广泛应用于基因聚类<sup>[1]</sup>、人脸聚类<sup>[2]</sup>、数据分类、文档聚类等其他领域.

基于谱聚类的子空间聚类方法有两种典型方法:稀疏子空间聚类(sparse subspace clustering, SSC)<sup>[3]</sup>和低秩表示(low-rank representation, LRR)<sup>[4]</sup>.除了SSC和LRR外,还有学者提出了其他子空间聚类方法.虽然这些方法使用了不同的正则项,但其亲和度矩阵均具有块对角性质.Liu等<sup>[4]</sup>提出了一个块对角矩阵诱导正则化算子,直接对亲和度矩阵进行块对角约束.上述方法逐渐提高了聚类性能,但不能处理非线性结构化数据.然而,真实数据集通常位于多个非线性子空间中.

单核学习(single-kernel learning, SKL)<sup>[5]</sup>利用核技巧将输入数据映射到线性特征空间处理非线性结构数据.然而,由于不同的数据集可能适用不同的核函数<sup>[6]</sup>,SKL子空间聚类方法的聚类性能受到限制.由此,多核学习(MKL)<sup>[7]</sup>被广泛研究,其使用核加权策略从多个基底核中构建最优共识核.目前已有的MKL子空间聚类方法主要目的是设计核加权策略以获得比其他方法更好的最优共识核,但忽略了数据在特征空间中的低秩结构.此外,没有考虑亲和度矩阵的块对角性质,也没有处理数据中包含的噪声.

将多核学习(MKL)与块对角表示(BDR)相结合,是解决非线性子空间聚类问题和保证亲和度矩阵块对角结构的一种很好的方法.Yang等<sup>[8]</sup>研究了鲁棒多核子空间聚类方法(JMKSC),该方法同时采用核加权策略和块对角约束,然而没有考虑特征空间的低秩结构.Kang等<sup>[9]</sup>提出了低秩核学习方法(LKGr),该方法对最优共识核进行低秩约束;Ren等<sup>[10]</sup>提出了基于低秩共识核学习(LLMKL)的子空间聚类方法,该方法对最优共识核的辅助变量施加低秩约束,以确保特征空间的低秩结构.这两种方法使用不同的正则项学习低秩共识核,但是仍可通过改进模型获得更好的聚类性能或提高方法效率.如LKGr利用核范数对共识核进行低秩约束,但核范数是秩函数的次优解;LLMKL使用最优共识核的辅助变量,降低了模型的效率.

针对上述局限性,本文提出一种新的方法,基于块对角表示和低秩共识核的鲁棒多核子空间聚类(LRMKC).与鲁棒多核子空间聚类方法(JMKSC)<sup>[8]</sup>相比,所提出方法通过引入非凸 Schatten- $p$  范数<sup>[11]</sup>对

特征空间进行低秩约束以确保特征空间的低秩结构.与低秩核学习方法(LKGr)<sup>[9]</sup>相比,所提出方法引用非凸 Schatten- $p$  范数而非LKGr中的核范数对最优共识核进行约束,这是对秩函数更好地逼近.与低秩共识核学习(LLMKL)<sup>[10]</sup>相比,本文省略了最优共识核的辅助变量,直接对最优共识核本身进行约束.另外,对系数矩阵施加块对角约束而非 $l_1$  范数约束,不仅如此,相对于LKGr与LLMKL,还引入混合相关熵度量(MCIM)方法,该方法不仅能够学习共识核,而且能够通过抑制噪声提高共识核的表达能力.

## 1 相关工作

目前,大多数子空间聚类方法均应用了数据的自表达属性,即数据点可表示为来自同一子空间的其他数据点的线性组合.基于自表达的线性子空间聚类方法的关键是建立可靠的系数矩阵,其一般模型为

$$\begin{aligned} \min_C \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{C}\|_F^2 + \alpha \mathfrak{R}(\mathbf{C}); \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C} \geq 0, \\ & \text{diag}(\mathbf{C}) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\alpha > 0$ ,  $\mathfrak{R}(\mathbf{C})$  是关于  $\mathbf{C}$  的正则项.在求解特定模型得到  $\mathbf{C}$  后,用  $(\mathbf{C}^T + \mathbf{C})/2$  构造亲和度矩阵.线性子空间聚类方法的主要研究点是设计一个合适的正则项,如  $\|\mathbf{C}\|_*$ 、 $\|\mathbf{C}\|_1$ 、 $\|\mathbf{C}\|_F^2$ 、 $\|\mathbf{C}\|_1 + \|\mathbf{C}\|_*$ .虽然目的不同,但是当子空间独立时,这些方法均具有块对角性能,因此推断块对角属性可能导致正确地聚类.本文直接对系数矩阵  $\mathbf{C}$  使用块对角约束,使其更有利于正确聚类.然而,式(1)仅适用于处理线性聚类问题.“核技巧”可将非线性结构数据映射到可用于线性模型分析的核希尔伯特空间内<sup>[12]</sup>.核自表达子空间聚类优化模型表示为

$$\begin{aligned} \min_C \quad & \frac{1}{2} \|\phi(\mathbf{X}) - \phi(\mathbf{X})\mathbf{C}\|_F^2 + \alpha \mathfrak{R}(\mathbf{C}) = \\ \min_C \quad & \text{Tr}((\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T\mathbf{C})\mathbf{K}) + \alpha \mathfrak{R}(\mathbf{C}); \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C} \geq 0, \\ & \text{diag}(\mathbf{C}) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $\phi(\mathbf{X})$  为核函数映射,  $\mathbf{K}$  为核矩阵.核矩阵  $\mathbf{K}$  的第  $(i, j)$  个元素为  $\mathbf{K}_{ij} = \langle \phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x}_j) \rangle$ .

上述模型没有考虑特征空间的全局结构.低秩核子空间聚类(low-rank kernel subspace clustering, LRKSC)<sup>[13]</sup>对特征空间的数据施加低秩约束,保证了特征空间具有期望的子空间结构.具体模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{B, C} \quad & \|\mathbf{B}\|_* + \frac{\lambda_2}{2} \text{Tr}(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{C}^T)\mathbf{B}^T\mathbf{B} + \\ & \frac{\lambda_3}{2} \|\mathbf{K}_G - \mathbf{B}^T\mathbf{B}\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{C}\|_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \mathbf{1}^T \mathbf{C} = \mathbf{1}^T, \\ & \text{diag}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\|\cdot\|_*$  为对特征空间数据的低秩约束.

## 2 LRMKC

本节介绍一种融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类方法及其求解过程.

### 2.1 LRMKC 的模型

给定数据集  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{D \times N}$ , 通过核映射将  $X$  映射到特征空间. 为了避免受所选择核函数的限制, 设计一种自动多核加权策略, 如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{K}} & \left\| \mathbf{K} - \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i \right\|_F^2; \\ \text{s.t. } & \mathbf{w}_i \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{K}_i$  为第  $i$  个基底核;  $\mathbf{K}$  为期望的最优共识核;  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_r]^T$  为权重向量. 除了低秩核子空间自表示外, LRMKC 使用非凸 Schatten- $p$  范数约束最优共识核矩阵  $\mathbf{K}$ , 定义如下:

$$\|\mathbf{K}\|_{S_p}^p = \sum_{i=1}^N \sigma_i^p, \quad (5)$$

其中  $\sigma_i$  为  $\mathbf{K}$  的第  $i$  个最大奇异值. 显然, 当  $p = 1$  时,  $\|\mathbf{K}\|_{S_p}^p = \|\mathbf{K}\|_*$ ; 当  $p = 0$  时, Schatten-0 范数即为  $\mathbf{K}$  的秩. 因此, 与核范数相比, Schatten- $p$  范数是对秩函数更好地逼近. 结合块对角表示 (BDR)、低秩核子空间自表示与自动多核加权策略, 提出 LRMKC 模型

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{w}} & \frac{1}{2} \text{Trace}[(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C})\mathbf{K}] + \lambda_1 \|\mathbf{K}\|_{S_p}^p + \\ & \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{C}\|_{[k]} + \frac{\lambda_3}{2} \left\| \mathbf{K} - \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i \right\|_F^2; \\ \text{s.t. } & \mathbf{1}^T \mathbf{C} = \mathbf{1}^T, \\ & \mathbf{C}_{ii} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{C} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \\ & \mathbf{w}_i \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3)$  为可调惩罚参数. 为了分离式 (6) 的  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  变量, 分别引入辅助变量  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}$ . 将式 (6) 转为如下形式:

$$\min_{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{J}, \mathbf{w}} \frac{1}{2} \text{Trace}[(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C})\mathbf{K}] + \lambda_1 \|\mathbf{J}\|_{S_p}^p +$$

$$\frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{B}\|_{[k]} + \frac{\lambda_3}{2} \left\| \mathbf{K} - \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i \right\|_F^2;$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \mathbf{B} = \mathbf{C}, \\ & \mathbf{J} = \mathbf{K}, \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{C} = \mathbf{1}^T, \\ & \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B}^T = \mathbf{B}, \\ & \mathbf{w}_i \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.2 LRMKC 的优化

由于 ADMM 能够有效解决非凸问题<sup>[14]</sup>, LRMKC 使用 ADMM 求解式 (7) 中的变量. 式 (7) 的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{J}, \mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \text{Trace}[(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C})\mathbf{K}] + \\ & \lambda_1 \|\mathbf{J}\|_{S_p}^p + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{B}\|_{[k]} + \frac{\lambda_3}{2} \left\| \mathbf{K} - \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i \right\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left( \left\| \mathbf{B} - \mathbf{C} + \frac{\mathbf{Y}_1}{\mu} \right\|_F^2 + \right. \\ & \left. \left\| \mathbf{J} - \mathbf{K} + \frac{\mathbf{Y}_2}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| \mathbf{1}^T \mathbf{C} - \mathbf{1}^T + \frac{\mathbf{y}_3}{\mu} \right\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $\mu$  为惩罚参数,  $\mathbf{Y}_1$ 、 $\mathbf{Y}_2$ 、 $\mathbf{y}_3$  为拉格朗日乘子.

1) 更新  $\mathbf{B}$ . 有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{B}} & \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{B}\|_{[k]} + \frac{\mu}{2} \left\| \mathbf{B} - \mathbf{C} + \frac{\mathbf{Y}_1}{\mu} \right\|_F^2; \\ \text{s.t. } & \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B}^T = \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (9)$$

最终得到  $\mathbf{B}$  的封闭解为

$$\mathbf{B}^{t+1} = \max \left( \mathbf{0}, \frac{\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}}^T}{2} \right). \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{M} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{Y}_1}{\mu} - \frac{\lambda_2}{2\mu} (\text{diag}(\mathbf{S})\mathbf{1}^T - \mathbf{S})$ ,  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \text{Diag}(\text{diag}(\mathbf{M}))$ . 详细推导过程见文献 [8].

2) 更新  $\mathbf{C}$ . 有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}} & \frac{1}{2} \text{Trace}[(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C})\mathbf{K}] + \\ & \frac{\mu}{2} \left( \left\| \mathbf{B} - \mathbf{C} + \frac{\mathbf{Y}_1}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| \mathbf{1}^T \mathbf{C} - \mathbf{1}^T + \frac{\mathbf{y}_3}{\mu} \right\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{\partial L(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 0, \text{ 可得到 } \mathbf{C} \text{ 的封闭解为} \\ \mathbf{C}^{t+1} = [\mathbf{K} + \mu(\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{C}^T)]^{-1} \times \\ (\mathbf{K} - \mathbf{Y}_1 - \mathbf{1}\mathbf{y}_3 + \mu(\mathbf{B} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)). \quad (12) \end{aligned}$$

3) 更新  $\mathbf{K}$ . 有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{K}} \frac{\lambda_3}{2} \left\| \mathbf{K} - \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i \right\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\| \mathbf{J} - \mathbf{K} + \frac{\mathbf{Y}_2}{\mu} \right\|_F^2 + \\ \frac{1}{2} \text{Trace}[(\mathbf{I} - 2\mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{K}]. \quad (13) \end{aligned}$$

令  $\frac{\partial L(\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} = 0$ , 可得到  $\mathbf{K}$  的封闭解为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{t+1} = \\ \frac{\lambda_3 \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \mathbf{K}_i + \mu \mathbf{J} + \mathbf{Y}_2 - \frac{\mathbf{I}}{2} + \mathbf{C}^T - \frac{\mathbf{C}\mathbf{C}^T}{2}}{\mu + \lambda_3}. \quad (14) \end{aligned}$$

4) 更新  $\mathbf{w}$ .

设计混合相关熵度量(MCIM)求解  $\mathbf{w}$ , MCIM用于量化两个矩阵之间的相似性, 是一种可靠的度量. MCIM定义如下 ( $\mathbf{M}_1 \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{M}_2 \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ):

$$\begin{aligned} \text{MCIM}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \\ \sqrt{1 - \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sum_j^N [\alpha Q_{v_1}(\Delta_{ij}) + (1 - \alpha) Q_{v_2}(\Delta_{ij})]}. \quad (15) \end{aligned}$$

其中:  $\Delta = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ ,  $v_1$  和  $v_2$  为内核带宽,  $0 \leq \alpha \leq 1$  为混合系数,  $Q_v(\Delta_{ij}) = \exp\left(-\frac{\Delta_{ij}^2}{2v^2}\right)$  是核大小为  $v$  的高斯核. 根据以下原则为  $\mathbf{K}_i$  分配权重: 对于相关性高的核, 权重较高(接近1), 反之权重较低(接近0). 因此, 与其他核加权策略相比, 所提出方法不仅从一些预定义数量的核中学习共识性核, 而且通过抑制噪声提高共识性核的表示能力. 在 MCIM, 可通过下式求解  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w}^{t+1} = 1 - \text{MCIM}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}). \quad (16)$$

5) 更新  $\mathbf{J}$ . 有

$$\min_{\mathbf{J}} \lambda_1 \|\mathbf{J}\|_{S_p}^p + \frac{\mu}{2} \left\| \mathbf{J} - \mathbf{K} + \frac{\mathbf{Y}_2}{\mu} \right\|_F^2. \quad (17)$$

设  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \frac{\mathbf{Y}_2}{\mu}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{U}\Phi^* \mathbf{V}$ , 式(17)转化为

$$\min_{\mathbf{J}} \lambda_1 \|\mathbf{J}\|_{S_p}^p + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{K}}\|_F^2. \quad (18)$$

其封闭解为

$$\mathbf{J}^{t+1} = \mathbf{U}\Gamma^* \mathbf{V}^T. \quad (19)$$

其中:  $\Gamma^*$  为  $\mathbf{J}$  的奇异值矩阵,  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  均与  $\tilde{\mathbf{K}}$  的奇异值分解有关. 具体推导过程见文献[15].

当 LRMKC 达到如下收敛条件时便停止迭代:

$$\text{diff}_1 = \|\mathbf{B} - \mathbf{C}\|_F,$$

$$\text{diff}_2 = \|\mathbf{J} - \mathbf{K}\|_F,$$

$$\text{diff}_3 = \|\mathbf{1}^T \mathbf{C} - \mathbf{1}^T\|_F,$$

$$\max(\text{diff}_1, \text{diff}_2, \text{diff}_3) \leq \varepsilon, \quad (20)$$

其中  $\varepsilon$  为停止迭代阈值.

### 2.3 复杂度分析

在更新  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{K}$  时均只用到了简单的矩阵运算, 与其他矩阵运算相比, 其运算复杂度可忽略不计, 这里不考虑它们. 对于一个  $N \times N$  的矩阵, 更新  $\mathbf{C}$  时需要矩阵进行逆运算, 其运算复杂度为  $O(N^3)$ ; 更新  $\mathbf{w}$  时的运算复杂度为  $O(N^2)$ ; 更新  $\mathbf{J}$  时需要进行奇异值分解, 其运算复杂度为  $O(N^3)$ . 由此, 整体的运算复杂度为  $O(t(2N^3 + N^2))$ , 近似为  $O(t(N^3))$ , 其中  $t$  为迭代次数.

## 3 实验分析

本节主要介绍数据集、对比方法、实验结果、鲁棒性实验以及时间实验, 以验证 LRMKC 的有效性和较高的运行效率.

### 3.1 实验设置

使用 3 个图像数据集和 3 个文本数据集测试 LRMKC 方法的有效性, 这些数据集通常用于评估不同子空间聚类方法的聚类性能. 图像数据集包括 3 个人脸数据集: Yale、ORL 和 Jaffe. 文本数据集包括 TR 11、TR 41 和 TR 45, 分别来自 TREC-5、TREC-6 和 TREC-7 系列. 表 1 为数据集的具体信息.

表 1 6 个数据集的信息

dataset	#instances	#features	#classes
Yale	165	1 024	15
Jaffe	213	676	10
ORL	400	1 024	40
TR 11	414	6 429	36
TR 41	878	7 454	10
TR 45	690	8 261	10

将 LRMKC 与 8 种多核方法进行比较, 分别为 SMKL<sup>[6]</sup>、MKKM<sup>[7]</sup>、JMKSC<sup>[8]</sup>、LKG<sup>[9]</sup>、LLMKL<sup>[10]</sup>、RMKKM<sup>[16]</sup>、AASC<sup>[17]</sup>、SCMK<sup>[18]</sup>. 对比方法的详细介绍见第 3.2 节, 关键参数借鉴原论文并进行调整以达到最佳效果.

本次实验构造了 12 个基底核, 包括 7 个高斯核  $\kappa(x_1, x_2) = \exp(-\|x_1 - x_2\|_2^2 / (t\sigma^2))$ . 其中:  $\sigma$  为  $x_1$  与  $x_2$  间的最大距离;  $t \in \{0.01, 0.05, 0.1, 1, 10, 50, 100\}$ ; 4 个多项式核  $\kappa(x_1, x_2) = (x_1^T x_2 + \alpha)^b$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ ,  $b \in$

{2, 4}; 以及 1 个线性核  $(x_1, x_2) = x_1^T x_2$ .

### 3.2 实验结果

#### 3.2.1 聚类测试

本文在 6 个数据集上进行实验, 分别为 Yale 数据集、ORL 数据集、Jaffe 数据集、TR11 数据集、TR41 数

据集和 TR45 数据集. 测试每个数据集类别的最大数量, 实验结果为 20 次实验的平均值. 使用目前广泛使用的指标衡量聚类性能: 聚类精度 (accuracy, ACC)、归一化互信息 (normalized mutual information, NMI) 和纯度 (purity). 实验结果如表 2 所示.

表 2 聚类结果 (ACC, NMI, purity)

数据集	指标	MKMM	AASC	RMKMM	SCMK	LKGr	SMKL	JMKSC	LLMKL	本文方法
Yale	ACC	0.457(0.041)	0.406(0.027)	0.521(0.034)	0.582(0.025)	0.540(0.030)	0.582(0.017)	0.630(0.006)	0.655(0.009)	<b>0.673(0.006)</b>
	NMI	0.501(0.036)	0.468(0.028)	0.556(0.025)	0.576(0.012)	0.566(0.025)	0.614(0.015)	0.631(0.006)	0.646(0.007)	<b>0.660(0.006)</b>
	purity	0.475(0.037)	0.423(0.026)	0.536(0.031)	0.610(0.014)	0.554(0.029)	0.667(0.014)	0.673(0.007)	0.683(0.009)	<b>0.703(0.008)</b>
Jaffe	ACC	0.746(0.069)	0.304(0.008)	0.871(0.053)	0.869(0.022)	0.861(0.052)	0.967(0.000)	0.967(0.007)	1.000(0.000)	<b>1.000(0.000)</b>
	NMI	0.798(0.058)	0.272(0.006)	0.893(0.041)	0.868(0.021)	0.869(0.031)	0.951(0.000)	0.952(0.010)	1.000(0.000)	<b>1.000(0.000)</b>
	purity	0.768(0.062)	0.331(0.008)	0.889(0.045)	0.882(0.023)	0.859(0.038)	0.967(0.000)	0.967(0.007)	1.000(0.000)	<b>1.000(0.000)</b>
ORL	ACC	0.475(0.023)	0.272(0.009)	0.556(0.024)	0.656(0.015)	0.616(0.016)	0.573(0.032)	0.725(0.014)	0.800(0.003)	<b>0.812(0.003)</b>
	NMI	0.689(0.016)	0.438(0.007)	0.748(0.018)	0.808(0.008)	0.794(0.008)	0.733(0.027)	0.852(0.012)	0.891(0.003)	<b>0.901(0.002)</b>
	purity	0.514(0.021)	0.316(0.007)	0.602(0.024)	0.699(0.015)	0.658(0.017)	0.648(0.017)	0.753(0.012)	0.839(0.009)	<b>0.843(0.006)</b>
TR 11	ACC	0.501(0.048)	0.472(0.008)	0.577(0.094)	0.549(0.015)	0.607(0.043)	0.729(0.019)	0.737(0.002)	0.718(0.001)	<b>0.787(0.001)</b>
	NMI	0.446(0.046)	0.394(0.003)	0.561(0.118)	0.371(0.018)	0.597(0.031)	0.622(0.048)	0.673(0.002)	0.633(0.002)	<b>0.718(0.001)</b>
	purity	0.655(0.044)	0.547(0.000)	0.729(0.096)	0.783(0.011)	0.776(0.030)	0.879(0.030)	0.819(0.001)	0.801(0.002)	<b>0.882(0.001)</b>
TR 41	ACC	0.561(0.068)	0.459(0.001)	0.627(0.073)	0.650(0.068)	0.595(0.020)	0.671(0.002)	0.689(0.004)	0.689(0.004)	<b>0.737(0.002)</b>
	NMI	0.578(0.042)	0.431(0.000)	0.635(0.092)	0.492(0.017)	0.604(0.023)	0.625(0.004)	0.660(0.003)	0.666(0.003)	<b>0.681(0.003)</b>
	purity	0.728(0.042)	0.621(0.001)	0.776(0.065)	0.758(0.034)	0.759(0.031)	0.761(0.003)	0.799(0.003)	0.817(0.003)	<b>0.826(0.002)</b>
TR 45	ACC	0.585(0.066)	0.526(0.008)	0.640(0.071)	0.634(0.058)	0.663(0.042)	0.671(0.004)	0.687(0.036)	0.745(0.000)	<b>0.761(0.000)</b>
	NMI	0.562(0.056)	0.420(0.014)	0.627(0.092)	0.584(0.051)	0.671(0.020)	0.622(0.007)	0.690(0.022)	0.726(0.000)	<b>0.746(0.000)</b>
	purity	0.691(0.058)	0.575(0.011)	0.752(0.074)	0.728(0.048)	0.800(0.026)	0.816(0.004)	0.822(0.031)	0.797(0.000)	<b>0.823(0.000)</b>
Avg	ACC	0.554(0.053)	0.407(0.010)	0.632(0.058)	0.657(0.034)	0.647(0.039)	0.699(0.012)	0.739(0.012)	0.768(0.003)	<b>0.795(0.002)</b>
	NMI	0.596(0.025)	0.404(0.010)	0.670(0.064)	0.617(0.021)	0.684(0.023)	0.695(0.017)	0.743(0.009)	0.760(0.003)	<b>0.784(0.002)</b>
	purity	0.639(0.044)	0.469(0.009)	0.714(0.056)	0.743(0.024)	0.734(0.029)	0.790(0.011)	0.806(0.010)	0.823(0.004)	<b>0.846(0.003)</b>

在所有方法中, 所提出方法获得了最好的聚类结果, 验证了所提出方法的有效性. 该方法的 ACC、NMI 和 purity 的平均值分别比第 2 好的方法 LLMKL 高 2.7%、2.4% 和 2.3%.

#### 3.2.2 鲁棒性测试

本节验证 LRMKC 的鲁棒性. 如图 1 所示, 给 Yale 人脸图像添加不同大小的遮挡块 ( $m = 5, 10, 15, 20$ ).



图 1 被遮挡 Yale 图片 (大小:  $5 \times 5$  到  $20 \times 20$ )

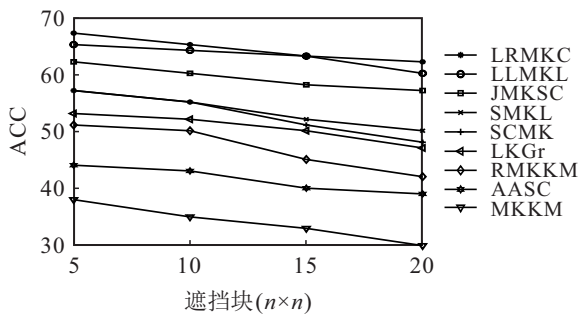


图 2 被遮挡 Yale 数据集的聚类准确率

为了保证公平, 报告每种方法 20 个实验的平均结果, 并使用 ACC 进行评估. 实验结果如图 2 所示. 当每幅图像中加入较大的遮挡块时, 每种方法的聚类精度 ACC 均显著降低. 另外, 在所有情况下, LRMKC 均获得了最好的实验结果.

#### 3.2.3 运行时间测试

本文所有实验均在 1 台带 i7-4790 中央处理器以及 8 GB-RAM 的台式计算机上用 Matlab 2015b 进行. 为保证公平, 所有方法均基于 Yale 数据集, 收敛条件一致. 运行时间测试的结果如图 3 所示. 实验结果表明, LRMKC 比 RMKMM、SCMK、LKGr、SMKL、JMKSC、LLMKL 快得多, 但不如 MKMM 和 AASC 的

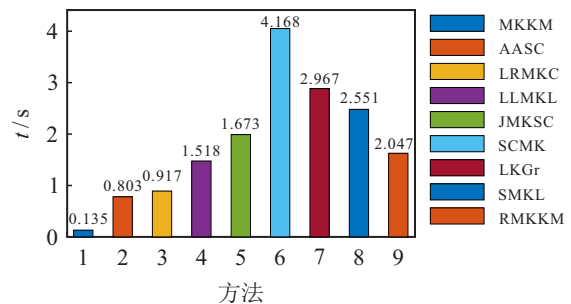


图 3 运行时间

效率高.然而,相对于MKKM与AASC,LRMKC的准确度分别提高了24.1%和38.8%,因为这两种方法使用了相对简单的内核学习策略.与第2好的方法LLMKL相比,该方法的聚类性能好,而且效率高.

### 3.2.4 收敛性测试

本节对LRMKC的收敛性进行测试,图4为ORL数据集的目标函数值和原始残差(两次相邻迭代 $F$ 范数的最大值,即 $\max(\text{diff}_1, \text{diff}_2, \text{diff}_3)$ )随着迭代次数变化的曲线,结果显示LRMKC可在9次内达到收敛.

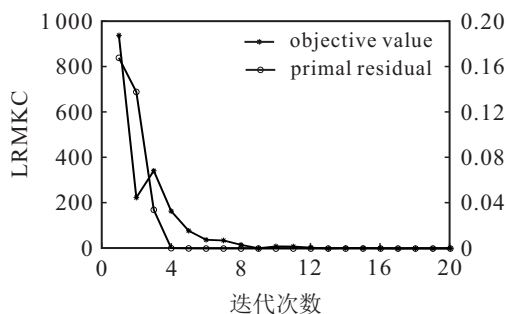


图4 LRMKC在ORL数据集上的收敛曲线

### 3.3 分析与讨论

通过对比分析每种方法的实验结果,可得出以下结论.

1)在所有对比的方法中,LRMKC的权重标准差最小,表明LRMKC不仅聚类性能好,而且稳定.

2)LKGr对核矩阵进行凸约束,但不能保证特征空间的低秩结构.LLMKL对最优共识核的辅助变量施加低秩约束,不过加入的辅助变量降低了模型的效率.而本文的LRMKC直接对最佳共识核施加非凸约束,既保证了特征空间数据的低秩结构,提高了聚类性能,又提高了运行效率.

3)在大多数情况下,基于谱聚类方法的实验结果优于基于 $k$ 均值的实验结果,如AASC、LKGr、SMKL、SCMK的效果均比MKKM与RMKKM好,这表明基于谱聚类的方法通常比基于标准 $k$ 均值的方法具有更好的性能.

4)由于LRMKC良好的实验结果,下面对该模型中各部分的贡献进行分析.LRMKC模型整体包括4项: $\text{Trace}[(I - 2C + C^T C)K]$ 、 $\|J\|_{S_p}^p$ 、 $\|B\|_k$ 以及 $\left\|K - \sum_{i=1}^r w_i K_i\right\|_F^2$ ,这4项共同作用使得模型具有良好的实验结果. $\text{Trace}[(I - 2C + C^T C)K]$ 通过核技巧将非线性结构数据映射到高维核希尔伯特空间<sup>[12]</sup>内,使其能够线性可分; $\|B\|_k$ 通过对系数矩阵施加块对角约束以揭示数据的真实结构,即块对角结构,

因此,块对角约束能够促使生成更优的 $B$ ;在多核加权策略的基础上, $\left\|K - \sum_{i=1}^r w_i K_i\right\|_F^2$ 融合混合相关熵度量(MCIM)更新权重 $w$ ,减少了噪声和离群点的影响; $\|J\|_{S_p}^p$ 对学习到的最优共识核进行Schatten- $p$ 范数约束,以保证特征空间的低秩结构.由表2可见,与使用核范数进行低秩约束的LKGr方法相比,所提出方法的平均准确度提高了14.8%,表明Schatten- $p$ 范数相对于核范数是一个更好的低秩约束选择.在所有数据集上,LRMKC的性能均优于其他方法,这验证了所提出方法的优越性.

5)从实验结果可以推断,更新权重 $w$ 时,相对较大的权重(上限为1)对学习到的最优共识核的贡献更大,否则贡献较小.

6)由图2可见,LRMKC利用MCIM抑制数据中的噪声能够有效提高鲁棒性.

7)由图4可见,LRMKC可以在少量迭代后收敛到全局最优值,并且从主函数的值可以看出,所提出方法的收敛速率较高.

8)LRMKC在核矩阵上使用了非凸低秩约束,省略了一个中间辅助变量提高运算效率,在特征空间数据上实现了低秩结构.

## 4 结论

针对特征空间数据的低秩结构、多核加权策略和噪声问题,本文提出了一种融合块对角约束的鲁棒低秩多核聚类方法.在块对角表示框架下,利用混合相关熵度量(MCIM)设计了一种自动加权策略,既能学习最优共识核,又能抑制噪声.该方法对学习到的最优共识核施加非凸低秩约束,以确保特征空间的低秩结构.在6个数据集上,将所提出方法与8种最先进的方法进行对比,LRMKC获得了更好的聚类结果,并且稳定、运行效率较高.此外,通过相关实验验证了LRMKC的鲁棒性.未来将继续探索多核子空间聚类方法,研究更具鲁棒性的多核加权策略.此外,扩展LRMKC以处理大规模多视图<sup>[9]</sup>子空间聚类问题.

### 参考文献(References)

- [1] 陈晓云, 林莉媛, 叶先宝. 基于光滑近邻表示的基因表达数据子空间聚类[J]. 控制与决策, 2017, 32(7): 1235-1240.  
(Chen X Y, Lin L Y, Ye X B. Gene expression data subspace clustering based on smooth neighbor representation[J]. Control and Decision, 2017, 32(7): 1235-1240.)
- [2] 张桂玲, 杜艳梦. 拉普拉斯正则化双曲正切低秩子空

- 间聚类算法[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 163-168.  
(Zhang G L, Du Y M. Laplacian regularizer hyperbolic tangent function low-rank subspace clustering algorithm[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 163-168.)
- [3] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: Algorithm, theory, and applications[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(11): 2765-2781.
- [4] Liu G, Lin Z, Yu Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C]. Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa: Omnipress, 2010: 1-8.
- [5] Marin D, Tang M, Ayed I B, et al. Kernel clustering: Density biases and solutions[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41(1): 136-147.
- [6] Kang Z, Lu X, Yi J F, et al. Self-weighted multiple kernel learning for graph-based clustering and semi-supervised classification[C]. Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Stockholm: AAAI Press, 2018: 2312-2318.
- [7] Huang H C, Chuang Y Y, Chen C S. Multiple kernel fuzzy clustering[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 120-134.
- [8] Yang C, Ren Z W, Sun Q S, et al. Joint correntropy metric weighting and block diagonal regularizer for robust multiple kernel subspace clustering[J]. Information Sciences, 2019, 500: 48-66.
- [9] Kang Z, Wen L J, Chen W Y, et al. Low-rank kernel learning for graph-based clustering[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 163: 510-517.
- [10] Ren Z W, Li H R, Yang C, et al. Multiple kernel subspace clustering with local structural graph and low-rank consensus kernel learning[J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 188: 105040.
- [11] Zhang X Q, Chen B J, Sun H J, et al. Robust low-rank kernel subspace clustering based on the Schatten p-norm and correntropy[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2020, 32(12): 2426-2437.
- [12] Xie X Y, Guo X L, Liu G C, et al. Implicit block diagonal low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing: A Publication of the IEEE Signal Processing Society, 2018, 27(1): 477-489.
- [13] Ji P, Reid I, Garg R, et al. Low-rank kernel subspace clustering[J/OL]. 2017, arXiv: 1707.04974.
- [14] Hong M Y, Luo Z Q, Razaviyayn M. Convergence analysis of alternating direction method of multipliers for a family of nonconvex problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2016, 26(1): 337-364.
- [15] Nie F, Wang H, Cai X, et al. Robust matrix completion via joint Schatten p-norm and lp-norm minimization[C]. IEEE 12th International Conference on Data Mining. Brussels, 2012: 566-574.
- [16] Du L, Zhou P, Shi L, et al. Robust multiple kernel k-means using l21-norm[C]. The 24th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Palo Alto: AAAI Press, 2015: 3476-3482.
- [17] Huang H C, Chuang Y Y, Chen C S. Affinity aggregation for spectral clustering[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2012: 773-780.
- [18] Kang Z, Peng C, Cheng Q, et al. Unified spectral clustering with optimal graph[C]. Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence and Thirtieth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference and 8th AAAI Symposium on Educational Advances in Artificial Intelligence. New Orleans: AAAI Press, 2018: 3366-3373.
- [19] Xiao Q, Dai J H, Luo J W, et al. Multi-view manifold regularized learning-based method for prioritizing candidate disease miRNAs[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 175: 118-129.

## 作者简介

张小乾(1987—),男,副教授,博士,从事子空间聚类、稀疏表示、深度学习及其在图像上的应用等研究, E-mail: zhxq0528@163.com;

王晶(1997—),女,硕士生,从事多视图子空间聚类及其应用的研究, E-mail: 18222337392@163.com;

薛旭倩(1995—),女,硕士生,从事子空间聚类及其应用的研究, E-mail: braveq313@163.com;

刘知贵(1966—),男,教授,博士生导师,从事控制理论应用及自动化装置、基于机器视觉技术的控制系统应用、计算机技术及应用等研究, E-mail: liuzhigui@swust.edu.cn.

(责任编辑:魏冰)