

控制与决策

Control and Decision

基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型构建

刘晓梅, 周钢

引用本文:

刘晓梅,周钢. 基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型构建[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 3058–3064.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0783>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于低通非奇异终端滑模引导的舰载机抗侧风着舰控制技术

Anti crosswind carrier landing control technology based on low pass nonsingular terminal sliding mode guidance
控制与决策. 2022, 37(9): 2255–2264 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0165>

基于非光滑采样控制算法的二阶有向多智能体系统的一致性

Consensus of second-order directed multi-agent system based on non-smooth sampled-data control algorithm
控制与决策. 2022, 37(11): 2897–2906 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0395>

多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems
控制与决策. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

时滞累积TDAGM($1, N, t$)模型及其在粮食生产中的应用

Time-delayed accumulative TDAGM($1, N, t$) model and its application in grain production
控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input
控制与决策. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型构建

刘晓梅^{1†}, 周 钢²

(1. 上海第二工业大学 文理学部, 上海 201209; 2. 上海交通大学 数学科学学院, 上海 200240)

摘要: 传统无偏灰色预测模型的参数估计和序列模拟都是通过白化方程的离散时间响应函数求取相应的估计值和模拟值. 基于精细积分法, 提出一种无需求离散时间响应函数的无偏非齐次灰色模型. 该模型通过引入新变量, 将白化方程转化为齐次矩阵微分方程, 利用指数矩阵求得递推关系, 进而推导参数无偏估计公式, 并采用精细积分法直接计算灰色模型的模拟(预测)值, 从而减少舍入误差, 提高计算精度. 同时, 还证明该建模方法具有非齐次指数规律重合性和伸缩变换一致性. 严格非齐次指数序列、近似非齐次指数序列、不同类型的单调序列以及汽车保有量预测实例的结果进一步表明, 所构建的模型能严格拟合非齐次指数序列, 验证了该模型的有效性和实用性, 提高了拟合(预测)精度.

关键词: 灰色模型; 无偏模型; 精细积分法; NGM(1, 1, k)模型; 非齐次指数序列; 直接建模法

中图分类号: N941 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyj.2021.0783

引用格式: 刘晓梅, 周钢. 基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型构建[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 3058-3064.

An unbiased non-homogeneous grey model based on high precise direct integration method

LIU Xiao-mei^{1†}, ZHOU Gang²

(1. College of Arts and Sciences, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China; 2. School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: It is a traditional way to establish parameter estimations and simulations of unbiased grey prediction models by the discrete time response function of whiten differential equation. An novel unbiased grey model based on the high precise direct integration method is proposed without using the discrete time response function. The recurrence relation can be deduced by the exponential matrix of the homogeneous matrix differential equation, written by introducing some new variables, and the unbiased parameters can be derived. Then the simulated values are calculated by using the high precise direct integration method, which can reduce rounding errors and improve precision. It is proved that the proposed method possesses nonhomogeneous law coincidence property and linear transformation consistency. Finally, the validity and utility of the proposed model are verified by rigorous non-homogenous exponential sequence, approximate non-homogenous sequence, monotone sequences and the practical example of car ownership, and the proposed model can improve the precision of simulation and prediction.

Keywords: grey model; unbiased grey model; high precise direct integration method; NGM(1, 1, k) model; non-homogeneous exponential sequence; direct modeling

0 引言

自邓聚龙教授 1982 年提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型因其建模过程简单、所需样本少等优点, 已成功地应用于工业、农业、科技、军事等众多领域^[1-2]. GM(1, 1)模型是灰色预测模型的经典形式, 但因其采用离散化方法进行参数估计, 而用连续时间响应式进行预测, 导致即使齐次指数序列也不能够完全

拟合. 吉培荣等^[3]提出了无偏 GM(1, 1)模型的概念, 用参数修正的方式消除了模型的系统误差, 从理论上证明了系统误差产生的原因; 王义闹等^[4]通过优化灰导数实现了无偏 GM(1, 1)模型; 穆勇^[5]建立了无偏 GM(1, 1)模型的直接建模法; 谢乃明等^[6]提出了离散灰色模型, 从形式上统一了参数估计和模型. 这些方法都消除了灰色预测模型从差分到微分的跳跃, 提高

收稿日期: 2021-05-06; 录用日期: 2021-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(50876066); 上海第二工业大学研究生精品课程建设项目(Y2021JXJP01).

责任编辑: 孙宗耀.

[†]通讯作者. E-mail: xmliu@sspu.edu.cn.

了预测精度.

在现实生活中,完全具有齐次指数规律的原始序列数据是比较少见的,更多的是符合近似非齐次指数的规律.对此,崔杰等^[7]构建了一种基于近似非齐次指数函数的NGM(1,1,k)模型,拓展了灰色模型的适用范围;谢乃明等^[8]提出了近似非齐次指数序列的离散灰色模型;曾波等^[9]从优化初始条件出发,改进了近似非齐次指数序列的离散灰色模型;战立青等^[10]通过分析NGM(1,1,k)模型的建模机理,对模型进行了改进;江艺羨等^[11]对传统非齐次建模可能出现参数复数解的问题,提出了无偏灰色NGM(1,1,k)模型的递推解法;陈芳等^[12]通过优化NGM(1,1,k)模型的灰导数,使模型具有非齐次指数重合性;姜爱平等^[13]研究了非等间距近似非齐次指数序列的灰色建模方法;党耀国等^[14]从灰导数和背景值进行优化,提出了无偏NGM(1,1,k)模型的两类基本形式和直接建模法.另外,多变量的非齐次灰色模型近年来也有了进一步发展,Zeng等^[15]针对GM(1,N)模型在模型结构上的不足,提出非齐次多变量OGM(1,N)模型;Wang等^[16-17]引入非线性时间修正项,构建了非齐次多变量的NMGM模型和NHMGM模型.以上研究都极大推动了非齐次灰色模型的发展和无偏灰色模型的研究,提高了模型的预测精度.

直接建模法是构建无偏灰色模型的基本方法,方法中均采用白化方程离散时间响应函数构造其递推关系和模拟值求解.本文跳过求离散时间响应函数这一步,通过引入新变量,从矩阵的角度直接获得白化方程离散时间响应函数的递推关系,建立参数的无偏估计,实现无偏非齐次模型的直接建模;并采用精细积分法直接计算模型的模拟(预测)值,从而构建基于精细积分法的无偏灰色模型;对无偏NGM(1,1,k)模型的非齐次指数序列严格拟合性和伸缩变换一致性进行证明;并通过多个非齐次指数序列及汽车保有量的预测实例验证该模型的有效性和实用性.

1 非齐次灰色模型NGM(1,1,k)

定义1 设原始序列为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\},$$

其1-AGO序列为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}.$$

其中: $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n$. $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}, z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 2, 3, \dots, n$. 称 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk + c$ 为非齐次灰

色模型的基本形式(简记NGM(1,1,k)模型).称

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + c \quad (1)$$

为NGM(1,1,k)模型的白化微分方程.其中: $-a$ 反映了序列的发展态势(本文研究 $a \neq 0$ 的情况), b 为时间修正项, c 为灰作用量.

2 无偏NGM(1,1,k)模型直接建模法

2.1 无偏NGM(1,1,k)模型的参数辨识

令 $y(t) = (x^{(1)}(t), 1, t)^T$, 则NGM(1,1,k)模型的白化方程(1)改写为

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (2)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} -a & c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

定理1 若 $y(t)$ 满足方程(2), 则其离散时间响应函数为 $y(k) = e^{A(k-1)}y(1)$ 的充要条件是

$$y(k) = e^A y(k-1). \quad (3)$$

证明 1) 必要性. $y(k) = e^{A(k-1)}y(1) = e^A(e^{A(k-2)}y(1)) = e^A y(k-1)$.

2) 充分性. $y(k) = e^A y(k-1) = e^A e^A y(k-2) = \dots = e^{A(k-1)}y(1)$. □

定理2 白化方程(1)离散时间响应函数的递推关系为 $x^{(1)}(k) = u_1 x^{(1)}(k-1) + u_2 + u_3(k-1)$. 其中: $u_1 = e^{-a}, u_2 = -\frac{c}{a}(e^{-a} - 1) + \frac{b}{a^2}(e^{-a} - 1 + a), u_3 = -\frac{b}{a}(e^{-a} - 1)$.

证明 记 $A = \begin{bmatrix} -a & \alpha \\ 0 & D \end{bmatrix}, \alpha = (c, b), D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 由矩阵的运算可知

$$A^n = \begin{bmatrix} (-a)^n & \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (-a)^{n-1-i} D^i \\ 0 & D^n \end{bmatrix}, n \geq 2,$$

$D^n = 0 (n \geq 2)$. 将其代入指数矩阵 e^A 并计算, 有

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots = \begin{bmatrix} e^{-a} & -\frac{\alpha}{a}(e^{-a} - 1) + \frac{\alpha D}{a^2}(e^{-a} - 1 + a) \\ 0 & E + D \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

其中: $u_1 = e^{-a}, u_2 = -\frac{c}{a}(e^{-a} - 1) + \frac{b}{a^2}(e^{-a} - 1 + a), u_3 = -\frac{b}{a}(e^{-a} - 1)$. 将 e^A 代入式(3), 可得

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(k) \\ 1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(k-1) \\ 1 \\ k-1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

显然,后面两个等式恒成立,所以式(4)可转化为 $x^{(1)}(k) = u_1x^{(1)}(k-1) + u_2 + u_3(k-1)$. □

下面根据最小二乘法对参数 u_1, u_2, u_3 进行估计:

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix},$$

将其记为 $Bu = Y$.

定理3 $Bu = Y$ 中参数的最小二乘估计为

$$\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (5)$$

根据定理2获得NGM(1, 1, k)模型中参数 a, b, c 的估计.

定理4 无偏NGM(1, 1, k)模型的参数估计为

$$\begin{aligned} \hat{a} &= -\ln(\hat{u}_1), \\ \hat{b} &= \hat{u}_3 \frac{\ln \hat{u}_1}{\hat{u}_1 - 1}, \\ \hat{c} &= \left(\hat{u}_2 - \frac{\hat{u}_3}{\ln \hat{u}_1} + \frac{\hat{u}_3}{\hat{u}_1 - 1} \right) \frac{\ln \hat{u}_1}{\hat{u}_1 - 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

上述方法称为无偏NGM(1, 1, k)模型的参数估计. 此结果与文献[14]无偏估计结果完全一致.

2.2 基于精细积分法的灰色模型的模拟和预测

传统灰色模型的模拟都是直接代入白化方程的离散时间响应函数进行计算,但由于计算机字长限制,求解过程中易引入舍入误差,影响计算精度. 本文引入精细积分法,在不用求出白化方程解析解的前提下,可以获得高精度模拟值. 精细积分法是钟万勰^[18]针对齐次微分方程 $\dot{v} = Av$ 所提出的,其核心是精细计算其微分方程通解中的传递矩阵 $M_\tau = \exp(A \cdot \tau)$, τ 为步长. 若令 $m = 2^N$, N 为正整数(称为精细参数),则 M_τ 可写为

$$M_\tau = \exp(A \cdot \tau) = [\exp(A \cdot \tau/m)]^m = [\exp(A \cdot \tau/2^N)]^{2^N}.$$

当 2^N 很大时,有

$$\exp(A \cdot \tau/2^N) \approx E + A \cdot \tau/2^N,$$

其中 E 为单位矩阵. 记 $S = A \cdot \tau/2^N$, 则 M_τ 可写为

$$\begin{aligned} M_\tau &= (E + S)^{2^N} = \\ &= (E + S)^{2^{N-1}} (E + S)^{2^{N-1}} = \\ &= (E + S) \dots (E + S). \end{aligned}$$

而 $(E + S)(E + S) = E + 2S + S * S$, 因为 S 很小,当它与单位矩阵相加时就成为其尾数,在计算机舍入操作中其精度将丧失殆尽,故先将所有小量相加,然后再跟单位矩阵相加,这样就降低了舍入误差,使 M_τ 的精度基本上可以达到计算机精度. 其 Matlab 计算程序如下式所示:

```

S = A * tau / 2^N,
for i = 1 : N,
    S = 2S + S * S,
end
M = E + S.
    
```

(7)

当 M_τ 生成后,便可根据 $v((k+1)\tau) = M_\tau v(k\tau)$ 获得微分方程的解,并且当 M_τ 生成后,微分方程的计算只需调用 M_τ 的结果即可. 这里,虽然第一步 M_τ 的计算量增加了,但整体计算量并没有增大. 故精细积分法是一种可用于大步长的高精度计算方法.

定理5 序列 $X^{(0)}$ 、 $X^{(1)}$ 及模型中各参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 估计值如式(6)所述,取 $x^{(1)}(1) = X^{(0)}(1)$, $\hat{y}(1) = (x^{(1)}(1), 1, 1)^T$, 则 \hat{y} 的递推公式为

$$\hat{y}(k) = e^A \hat{y}(k-1). \quad (8)$$

进而获得 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 值,还原的模拟值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1),$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n$.

本文利用直接建模法建立参数的无偏估计,根据精细积分法给出模型的预测,称为基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型(简记为HUNGGM(1, 1, k)),其具体计算步骤如下:

step 1: 识别参数,根据式(5)利用最小二乘法识别参数 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$;

step 2: 识别参数,根据式(6)求参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$;

step 3: 模拟预测,根据精细积分法的程序(7),采用 Matlab 软件计算传递矩阵 e^A (即 $M_\tau, \tau = 1$),再根据式(8)求 $\hat{y}(k)$,进而获得 $\hat{x}^{(1)}(k)$;

step 4: 还原序列数值 $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$.

3 HUNGGM(1, 1, k)模型的性质

引理1 NGM(1, 1, k)白化方程的离散时间响应函数为

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) &= \left[x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b}{a^2} \right] e^{-a(k-1)} + \\ &= \frac{b}{a} k + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

的充要条件是

$$x^{(1)}(k) = e^{-a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})k + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2}\right)(1 - e^{-a}) + \frac{b}{a}e^{-a}.$$

证明 根据定理 2, 可将 $x^{(1)}(k)$ 的离散时间响应函数化简为

$$x^{(1)}(k) = e^{-a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})k + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2}\right)(1 - e^{-a}) + \frac{b}{a}e^{-a}.$$

1) 必要性.

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) &= e^{-a} \left[\left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-2)} + \frac{b}{a}(k-1) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) \right] - e^{-a} \left[\frac{b}{a}(k-1) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) \right] + \frac{b}{a}k + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) = \\ &= e^{-a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})k + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) + \frac{b}{a}e^{-a}. \end{aligned}$$

2) 充分性. 当 $k = 2$ 时, 结论显然成立. 假设当

$k \leq s$ 时, 式(9)也成立, 则当 $k = s + 1$ 时

$$\begin{aligned} x^{(1)}(s+1) &= e^{-a}x^{(1)}(s) + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})(s+1) + \left[\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) + \frac{b}{a}e^{-a} \right] = \\ &= e^{-a} \left\{ \left[x^{(1)}(1) - \frac{b+c}{a} + \frac{b}{a^2} \right] e^{-a(s-1)} + \frac{b}{a}s + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) \right\} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a})(s+1) + \left[\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) + \frac{b}{a}e^{-a} \right] = \\ &= \left[x^{(1)}(1) - \frac{b+c}{a} + \frac{b}{a^2} \right] e^{-as} + \frac{b}{a}(s+1) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} \right). \end{aligned}$$

从而结论成立. \square

定理 6 若原始数据序列严格服从非齐次指数规律 $x^{(0)}(k) = c_1q^k + c_2, k = 1, 2, \dots, n$, 则无偏 NGM(1, 1, k) 能够完全拟合非齐次指数规律.

证明 设原始序列 $x^{(0)}(k) = c_1q^k + c_2, k = 1, 2, \dots, n$, 则 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k (c_1q^i + c_2) = qx^{(1)}(k-1) + c_1q + c_2 + [c_2(1-q)](k-1), k = 2, 3, \dots, n$. 代入式(9), 并利用克莱姆法则求解, 可得

$$\hat{u}_1 = q, \hat{u}_2 = c_1q + c_2, \hat{u}_3 = c_2(1 - q).$$

再根据式(6)可知

$$\hat{a} = -\ln q, \hat{b} = -c_2 \ln q, \hat{c} = c_2 + c_1q \ln q / (q - 1).$$

利用式(9)可得

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k) &= [x^{(1)}(1) - c_2 + c_1q / (q - 1)] e^{-a(k-1)} + c_2k - \frac{c_1q}{q-1} = \\ &= \frac{c_1q - c_1q^{k+1}}{1-q} + kc_2. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k) &= \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = kc_2 - (k-1)c_2 + \frac{c_1q - c_1q^{k+1} - (c_1q - c_1q^k)}{1-q} = \\ &= c_1q^k + c_2. \end{aligned}$$

与 $x^{(0)}(k)$ 相同, 故此模型具有非齐次指数规律. \square

定理 7 设非负序列 $\mathbf{G}^{(0)}$ 为 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $g^{(0)}(k) = \rho x^{(0)}(k), \rho$ 为非负常数. 对非负序列 $\mathbf{X}^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 和 $\mathbf{G}^{(0)} = \{\rho x^{(0)}(1), \rho x^{(0)}(2), \dots, \rho x^{(0)}(n)\}$ 分别建立无偏 NGM(1, 1, k) 模型, 记 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 和 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 分别为序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 和 $\mathbf{G}^{(0)}$ 的模型参数估计值, 则

$$\hat{b} = \rho \bar{b}, \hat{c} = \rho \bar{c}, \hat{a} = \bar{a}.$$

证明 记 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的各参数如定理 3 所述, $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}$. 不妨设 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ 的伴随矩阵为

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^* = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

记 $\mathbf{G}^{(0)}$ 的各参数为 $\hat{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \rho \mathbf{Y}$, 则

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \frac{1}{\rho |\mathbf{B}^T \mathbf{B}|} \begin{bmatrix} D_{11} & \rho D_{12} & \rho D_{13} \\ \rho D_{21} & \rho^2 D_{22} & \rho^2 D_{23} \\ \rho D_{31} & \rho^2 D_{32} & \rho^2 D_{33} \end{bmatrix} \times \\ &= \begin{bmatrix} \rho x^{(1)}(1) & \rho x^{(1)}(2) & \dots & \rho x^{(1)}(n-1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

因此, $\hat{u}_1 = \bar{u}_1, \hat{u}_2 = \rho \bar{u}_2, \hat{u}_3 = \rho \bar{u}_3$. 根据式(6)可知 $\hat{a} = \bar{a}, \hat{b} = \rho \bar{b}, \hat{c} = \rho \bar{c}$. \square

定理 8 设非负序列 $\mathbf{G}^{(0)}$ 为 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $g^{(0)}(k) = \rho x^{(0)}(k), \rho$ 为非负常数. 记 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 和 $\hat{g}^{(0)}(k)$ 分别为序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 和 $\mathbf{G}^{(0)}$ 的无偏 NGM(1, 1, k) 模型的模拟值(预测值), 则

$$\hat{g}^{(1)}(k) = \rho \hat{x}^{(1)}(k), \hat{g}^{(0)}(k) = \rho \hat{x}^{(0)}(k).$$

证明 根据引理 1 和定理 7 可知

$$\hat{g}^{(1)}(k) = \rho \hat{x}^{(1)}(k-1),$$

故还原的模拟值为

$$\hat{g}^{(0)}(k) = \hat{g}^{(1)}(k) - \hat{g}^{(1)}(k-1) = \rho \hat{x}^{(0)}(k),$$

其中 $k = 2, \dots, n-1$. \square

定理7和定理8被称为无偏NGM(1, 1, k)模型伸缩变换一致性定理,对原始序列进行数乘变换时不影响模型模拟和预测值的相对误差.因此,在原始序列数量级较大时可以预先进行必要的数乘变换,以有效解决模型的病态问题.

4 实例分析

例1 严格非齐次指数序列.取 $X^{(0)} = 3^k + 2 = [5, 11, 29, 83, 245]$.图1展示了不同精细参数 N 下本文模型对序列的模拟结果,纵坐标为 $\log_{10} RE = \log_{10} \left(\sum_{i=1}^5 \left| \frac{x(i) - \hat{x}(i)}{x(i)} \right| / 5 \right)$.从图1中可以看出,当精细参数达到45后,平均相对误差趋于平稳,达到 $O(-13)$,接近于计算机的精度,从而验证了本文算法具有非齐次指数重合律.表1列举了本文模型(精细参数 $N = 50$)和传统无偏NGM(1, 1, k)模型在各数据点模拟的平均绝对百分比误差MAPE(%),可以看出,本文模型比传统无偏NGM(1, 1, k)模型提高了一个精度,从数值上说明了本文模型的有效性.

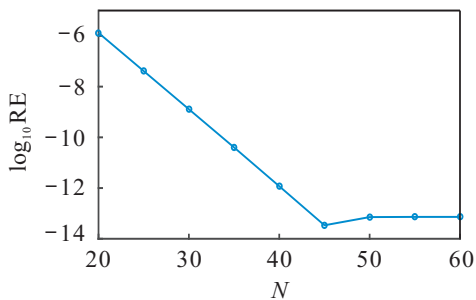


图1 不同精细参数 N 下的平均拟合误差比较

表1 严格非齐次指数序列模拟MAPE %

原始数据	5	11	29	83	245
本文模型	0	9.0433e-13	1.1271e-12	1.2327e-12	1.2181e-12
无偏NGM(1, 1, k)	0	6.8632e-12	8.9775e-12	9.9920e-12	1.0622e-11

例2 严格非齐次指数序列.取 $X^{(0)} = 1.4^k + 0.1 \approx [1.4, 2.0, 2.8, 3.9, 5.4]$ (通过四舍五入保留1位小数),采用HUNGM(1, 1, k) ($N = 20$)进行拟合,计算结果见表2.可以看出,本文模型的MAPE为0.0235%,明显低于GM(1, 1)模型、无偏GM(1, 1)模型、DGM(1, 1)模型和NGM(1, 1, k)模型的MAPE,再次验证了本文模型的有效性.

例3 近似非齐次指数序列.取 $X^{(0)} = [e^{(0.6*1)} + 1, e^{(0.6*2)} + 1.5, e^{(0.6*3)} + 1, e^{(0.6*4)} + 1.5, e^{(0.6*5)} + 1, e^{(0.6*6)} + 1.5, e^{(0.6*7)} + 1]$.将前6个数据作为建模数据,第7个为预测数据进行建模,计算结果如图2

表2 严格非齐次指数序列模拟精度

原始数据	GM(1, 1)	无偏GM(1, 1)	DGM(1, 1)	NGM(1, 1, k)	本文模型
1.4	1.4000	1.4000	1.4000	1.4000	1.4000
2.0	1.9906	2.0117	2.0117	1.3939	1.9994
2.8	2.7598	2.7974	2.7974	2.3827	2.8014
3.9	3.8262	3.8898	3.8898	3.4885	3.8988
5.4	5.3048	5.4088	5.4088	4.7251	5.4003
MAPE/%	1.1120	0.2213	0.1691	13.6515	0.0235

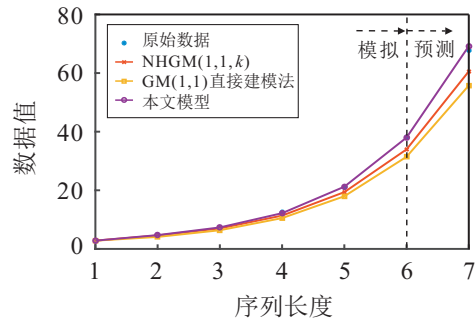


图2 各种算法模拟值和预测值比较

所示.可以看出,本文模型(精细参数 $N = 20$)的模拟值基本与原始数据重合,无论在拟合能力和预测能力上都明显优于NHGM(1, 1, k)模型^[10]和GM(1, 1)直接建模方法^[5].

例4 单调序列.选取不同类型数据(上升凸、上升凹、下降凸、下降凹),利用无偏GM(1, 1)、DDGM(1, 1)、NGM(1, 1, k)和本文模型进行模拟,计算结果如表3所示.作为对比组的3类模型均具有较大误差,尤其是NGM(1, 1, k)模型在 X_3 下降凸和 X_4 下降凹两组数据中,表现出完全相反的趋势.本文所构建的模型在4组数据中表现出最高的精度,并且与文献[14]的结果基本一致,从而显示出所构建模型的有效性.

例5 实例.为了进一步验证模型在处理实际问题中的效果,对我国交通系统中全国私人汽车拥有量进行建模.采用2006~2010年的数据作为原始序列建立HUNGM(1, 1, k)模型,参数估计为 $\hat{a} = -0.3535, \hat{b} = 2186.6972, \hat{c} = -429.7769$,并将其与GM(1, 1)模型、基于离散指数优化方法GM(1, 1)模型和基于背景值误差最小化GM(1, 1)模型的结果^[19]进行对比.从表4中可以看出,本文模型的最大APE为1.3563%,均低于GM(1, 1)模型、基于离散指数优化方法GM(1, 1)模型和基于背景值误差最小化GM(1, 1)模型的3.6107%、3.2808%、4.3080%,且本文模型的MAPE也最低,仅为0.6122%,比其他模型提高了一个精度.说明本文模型能很好地拟合私人汽车拥有量的发展趋势,提高了拟合效果,验证了所建模型的有效性和实用性.

表 3 各种算法模拟值和模拟精度比较

序列	建模数据	模型	模拟数据	MAPE/%
X_1	1.2, 2.9, 4.2, 5.1, 5.8 (上升凸)	无偏 GM(1, 1)	1.200 0, 3.234 9, 3.972 3, 4.877 7, 5.989 6	4.919 4
		DDGM(1, 1)	1.200 0, 2.911 8, 4.176 3, 5.110 4, 5.800 4	0.295 8
		NGM(1, 1, k)	1.200 0, 2.215 1, 3.454 1, 4.498 2, 5.377 9	12.090 7
		HUNGM(1, 1, k)	1.200 0, 2.903 7, 4.186 3, 5.117 1, 5.792 7	0.183 1
X_2	8.5, 16.4, 32.3, 64.2, 128.1 (上升凹)	无偏 GM(1, 1)	8.500 0, 16.178 0, 32.200 4, 64.091 1, 127.565 8	0.449 7
		DDGM(1, 1)	8.500 0, 16.440 2, 32.360 6, 64.281 4, 128.283 2	0.175 4
		NGM(1, 1, k)	8.500 0, 12.026 3, 25.696 7, 51.281 2, 299.163 2	17.964 9
		HUNGM(1, 1, k)	8.500 0, 16.395 6, 32.306 5, 64.193 4, 128.097 6	0.011 8
X_3	5.8, 5.1, 4.2, 2.9, 1.2 (下降凸)	无偏 GM(1, 1)	5.800 0, 5.403 7, 3.734 9, 2.581 5, 1.784 3	15.340 0
		DDGM(1, 1)	5.800 0, 5.109 1, 4.174 3, 2.909 3, 1.197 4	0.332 1
		NGM(1, 1, k)	5.800 0, 6.103 3, 22.050 0, 139.803 2, 1009, 313 5	17 834.985 2
		HUNGM(1, 1, k)	5.800 0, 5.108 5, 4.180 1, 2.916 3, 1.195 9	0.309 4
X_4	128.1, 64.2, 32.3, 16.4, 8.5 (下降凹)	无偏 GM(1, 1)	128.100 0, 64.136 1, 32.456 2, 16.424 5, 8.311 6	0.589 7
		DDGM(1, 1)	128.100 0, 64.190 0, 32.315 1, 16.417 5, 8.488 7	0.075 6
		NGM(1, 1, k)	128.100 0, 62.219 1, 76.471 4, 106.145 9, 167.931 0	512.545 8
		HUNGM(1, 1, k)	128.100 0, 64.201 1, 32.295 1, 16.407 4, 8.496 0	0.021 7

表 4 各种建模方法拟合精度对比表

原始数据 (万辆)	GM(1, 1) 建模		GM(1, 1) 离散指数优化建模		GM(1,1) 误差最小化建模		HUNGM(1, 1, k)	
	模拟值	APE/%	模拟值	APE/%	模拟值	APE/%	模拟值	APE/%
2 333.32	2 333.3200	0.0000	2 333.3200	0.0000	2 333.3200	0.0000	2 333.3200	0.0000
2 876.22	2 772.367 2	3.610 7	2 781.857 5	3.280 8	2 868.914 2	0.254 0	2 854.216 3	0.765 0
3 501.39	3 554.847 4	1.526 7	3 608.180 0	3.049 9	3 652.230 8	4.308 0	3 548.880 5	1.356 3
4 574.91	4 558.176 9	0.365 8	4 679.953 3	2.296 1	4 649.421 0	1.628 7	4 538.084 8	0.804 9
5 938.71	5 844.688 8	1.583 2	6 070.086 0	2.212 2	5 918.879 9	0.333 9	5 946.715 3	0.134 8
MAPE/%		1.417 3		2.167 8		1.304 9		0.612 2

5 结 论

本文针对非齐次序列,提出了基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型 HUNGM(1, 1, k), 并对该模型的建模机理进行了研究,探讨了模型的性质和应用. 具体结论如下:

1) 在白化方程离散时间响应函数未知的条件下,构建了 HUNGM(1, 1, k) 模型参数无偏估计的公式,采用精细积分法高精度计算模型的模拟值(预测值).

2) 证明了无偏 NGM(1, 1, k) 模型满足非齐次指数规律的重合性以及伸缩变换一致性,具有较好的模拟和预测能力.

3) 从严格非齐次指数序列可以看出,所构建模型能严格模拟非齐次指数序列,验证了本文模型的无偏性;从近似非齐次指数序列、单调序列和私家车

拥有量实例中可以看出,本文模型在模拟和预测精度方面优于传统的 GM(1, 1) 模型,也优于许多灰色预测模型(如 DGM(1, 1) 模型、无偏 GM(1, 1) 模型、NGM(1, 1, k) 模型等),其模拟和预测结果都得到了明显提高.

参考文献(References)

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The Journal of Grey System, 1989, 1(1): 1-24.
 [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2004: 1-8.
 (Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. The 3rd edition. Beijing: Science Press, 2004: 1-8.)
 [3] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 无偏灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(6): 6-7.
 (Ji P R, Huang W S, Hu X Y. An unbiased grey forecasting

- model[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2000, 22(6): 6-7.)
- [4] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的GM(1,1)建模法[J]. *系统工程理论与实践*, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1,1) modeling method of optimum the whiting values of grey derivative[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2001, 21(5): 124-128.)
- [5] 穆勇. 无偏灰色GM(1,1)模型的直接建模法[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(9): 1094-1095.
(Mu Y. A direct modeling method of the unbiased GM(1,1)[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(9): 1094-1095.)
- [6] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2005, 25(1): 93-99.)
- [7] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. *控制与决策*, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [8] 谢乃明, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的离散灰色模型特性研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(5): 863-867.
(Xie N M, Liu S F. Research on the non-homogenous discrete grey model and its parameter's properties[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(5): 863-867.)
- [9] 曾波, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的DGM(1,1)直接建模法[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(2): 297-301.
(Zeng B, Liu S F. Direct modeling approach of DGM(1,1) with approximate non-homogeneous exponential sequence[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2011, 31(2): 297-301.)
- [10] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2013, 33(3): 689-694.)
- [11] 江艺羨, 张岐山. 近似非齐次无偏GM(1,1)模型的递推解法及应用[J]. *控制与决策*, 2015, 30(12): 2199-2204.
(Jiang Y X, Zhang Q S. Recursive solution to approximate non-homogeneous unbiased GM(1,1) model and its application[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(12): 2199-2204.)
- [12] 陈芳, 魏勇. 近非齐次指数序列GM(1,1)模型灰导数的优化[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(11): 2874-2878.
(Chen F, Wei Y. Approximate non-homogeneous index sequence GM(1,1) model of grey derivative optimization[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2013, 33(11): 2874-2878.)
- [13] 姜爱平, 张启敏. 非等间距近似非齐次指数序列的灰色建模方法及其优化[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(12): 3199-3203.
(Jiang A P, Zhang Q M. Methods and optimum of grey modeling for approximation non-homogenous and non-equidistant series[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2014, 34(12): 3199-3203.)
- [14] 党耀国, 刘震, 叶璟. 无偏非齐次灰色预测模型的直接建模法[J]. *控制与决策*, 2017, 32(5): 823-828.
(Dang Y G, Liu Z, Ye J. Direct modeling method of unbiased non-homogeneous grey prediction model[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(5): 823-828.)
- [15] Zeng B, Luo C M, Liu S F, et al. Development of an optimization method for the GM(1, N) model[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2016, 55: 353-362.
- [16] Wang H X, Zhao L D. A nonhomogeneous multivariable grey prediction NMGGM modeling mechanism and its application[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018(12): 6879492.
- [17] Wang H X, Wang P G, Şenel M T, et al. On novel nonhomogeneous multivariable grey forecasting model NHMGGM[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019(9): 9049815.
- [18] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. *大连理工大学学报*, 1994, 34(2): 131-136.
(Zhong W X. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, 34(2): 131-136.)
- [19] 徐宁, 党耀国, 丁松. 基于误差最小化的GM(1,1)模型背景值优化方法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(2): 283-288.
(Xu N, Dang Y G, Ding S. Optimization method of background value in GM(1,1) model based on least error[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(2): 283-288.)

作者简介

刘晓梅(1982—),女,讲师,博士,从事灰色预测模型、动力系统数值算法等研究, E-mail: xmliu@sspu.edu.cn;
周钢(1960—),男,副教授,博士,从事动力系统数值算法、小波分析等研究, E-mail: zhougang@sjtu.edu.cn.

(责任编辑:李君玲)