

控制与决策

Control and Decision

非结构化环境中基于拓扑约束的地面无人驾驶路径规划算法

刘东升, 王俊生

引用本文:

刘东升, 王俊生. 非结构化环境中基于拓扑约束的地面无人驾驶路径规划算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(12): 3103–3114.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0987>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于强化学习的扑翼飞行器路径规划算法](#)

Local planner for flapping wing micro aerial vehicle based on deep reinforcement learning

控制与决策. 2022, 37(4): 851–860 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1574>

[基于改进蚁群和DWA算法的机器人动态路径规划](#)

Robot dynamic path planning based on improved ant colony and DWA algorithm

控制与决策. 2022, 37(9): 2211–2216 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1804>

[基于视觉引导多AGV系统的改进A*路径规划算法](#)

Improved A* path planning algorithm for vision-guided multi-AGV system

控制与决策. 2021, 36(8): 1881–1890 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1670>

[基于平衡鲸鱼优化算法的无人车路径规划](#)

Path planning of unmanned ground vehicle based on balanced whale optimization algorithm

控制与决策. 2021, 36(11): 2647–2655 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0416>

[凸优化与A*算法结合的路径避障算法](#)

Convex optimization and A-star algorithm combined path planning and obstacle avoidance algorithm

控制与决策. 2020, 35(12): 2907–2914 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0351>

非结构化环境中基于拓扑约束的地面 无人驾驶路径规划算法

刘东升, 王俊生[†]

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘要: 针对非结构化环境地面无人驾驶路径规划过程中路径避障以及多车路径冲突的难题, 通过同调以及 de Rham 上同调对环境中的障碍物拓扑信息的精确描述, 提出一种拓扑约束下基于 A* 算法且用时更短的路径规划算法. 该算法可实现非结构化环境中多无人车全局路径的拓扑分类, 从而为多车的协同规划提供一种新的研究思路. 此外, 结合 C-空间动态广义 Voronoi 图 (GVD) 的路径拓扑分离特性, 提出一种拓扑约束下可用于多无人车全局路径规划的高效算法——C-空间-GVD- h_S 增广 A* 算法. 最后, 通过 Gazebo 仿真平台模拟的具有多障碍物以及狭窄区域的非结构化环境, 验证所提出方法的有效性以及与现有方法相比的优越性.

关键词: 路径规划; de Rham 上同调; 拓扑约束; 广义 Voronoi 图; C-空间-GVD- h_S 增广 A* 算法

中图分类号: TP242.6

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0987

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 刘东升, 王俊生. 非结构化环境中基于拓扑约束的地面无人驾驶路径规划算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(12): 3103-3114.

Path planning algorithm for ground unmanned vehicles based on topological constraints in unstructured environments

LIU Dong-sheng, WANG Jun-sheng[†]

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: In allusion to the research problems of path avoidance and multi-vehicles path conflicts during the path planning process of ground unmanned driving in unstructured environments, a shorter time-consuming path planning algorithm based on the A* algorithm under topology constraints is proposed by using homology and de Rham cohomology to accurately describe the topological information of obstacles. The algorithm realizes the topological classification of the global paths of multi-vehicles in unstructured environments, thereby providing a new research idea for the collaborative planning of multiple ground unmanned vehicles. Furthermore, combined with the topological separation characteristics of paths on the C-space dynamic generalized Voronoi diagram (GVD), an efficient algorithm called C-space-GVD- h_S augmented A* algorithm for global path planning of multi-vehicles under topological constraints is proposed. Finally, the unstructured environment with multiple obstacles and narrow areas simulated by the Gazebo simulation platform verifies the effectiveness of the proposed method and its superiority compared with the existing methods.

Keywords: path planning; de Rham cohomology; topological constraints; generalized Voronoi diagram; C-space-GVD- h_S augmented A* algorithm

0 引言

近年来,对于存在障碍物栅格图上任两点间无人驾驶的最短路径规划方法,人们相继提出了一些针对车体运动学约束的改进型图搜索算法.文献[1]利用 Dubins 曲线和 Reeds-Shepp 曲线完成非结构化环

境中非完整约束下的路径规划;文献[2]针对经常出现不确定障碍物的情形给出一种基于 A* 算法的快速响应算法;文献[3]提出一种用于处理复杂环境中机器人导航和移动的新型分层路径规划方法;文献[4]给出一种利用先验信息对障碍物进行预测和估计

收稿日期: 2021-06-06; 录用日期: 2021-08-27.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(N2124002-12); 国家重点研发计划项目(2020YFE0201100); 国家自然科学基金项目(61703429).

责任编辑: 易建强.

[†]通讯作者. E-mail: wangjunsheng@ise.neu.edu.cn.

的规划算法. 另一方面, 文献[5]首次结合A*搜索及优化方法提出了Hybrid A*算法, 并在DARPA挑战赛中表现优异. 此外, 文献[6]基于Rips-复形及Dijkstra算法提出了Basic S*算法, 可生成几何上的最短路径. 关于具有拓扑分离特性的路径规划方法亦有较多研究. 文献[7]给出一种海面无人舰艇在复杂多狭窄水域环境中基于Voronoi图的快速动态路径规划算法, 其在动态避障上有着较好的效果; 文献[8]提出了一种使用基于GVD上并行稀疏算法的路径规划算法, 利用Voronoi图上路径的拓扑稀疏分离特性, 实现了多机器人在交通拥堵时协同规划的目的. 此外, 针对Voronoi图上存在的路径安全隐患问题, 文献[9]提出了一种基于形态扩张Voronoi道路图(MVDRM)的路径规划方法, 该方法在应对复杂环境中移动机器人路径安全性低以及时间和空间计算复杂度高的问题上均有较好的表现. 针对多无人车协同规划问题, 文献[10]提出了一种基于质心Voronoi图(CVT)上机器人集群自组织路径规划的智能控制算法; 文献[11]在事件触发决策与控制体系结构中, 研究了如何通过分布式优化团队代价函数来实现动态编队问题; 文献[12]针对一般线性多智能体系统的一致性问题, 提出了一种减少智能体间不必要的信息交换以及降低执

行器更新频率的新型分布式事件触发通信机制; 文献[13]通过基于自适应事件触发观测器的分布式控制, 解决了多智能体系统实际中的主从问题, 并避免了多智能体之间不必要的信息传输, 减小了通信网络的延迟.

综合图搜索算法的最优性以及基于几何、拓扑约束和优化的规划方法满足车体非完整约束的特点, 本文针对非结构化环境中无人驾驶路径规划的常见问题, 基于de Rham上调调的相关定理及推论, 应用路径拓扑分类不变量和动态GVD上路径的拓扑分离特性, 提出一种拓扑约束下具有先验信息且满足车体非完整约束的高效实时全局最短路径规划算法. 最后, 通过双车在同一或不同拓扑分类约束下的规划以及在栅格图上A*算法的仿真分析对比, 验证所提出的C-空间-GVD- h_S 增广A*算法的有效性及其优越性.

1 算法流程

本文算法流程如图1所示. 其中: 图1(a)用于生成多条隶属于不同拓扑分类的全局规划路径, 图1(b)用于生成隶属于特定拓扑分类的单条路径. 算法根据起始与终止点是否位于广义Voronoi图上决定二值栅格图上和Voronoi图上的A*搜索(虚线区域)以及单纯Voronoi图上的A*搜索(点划线区域).

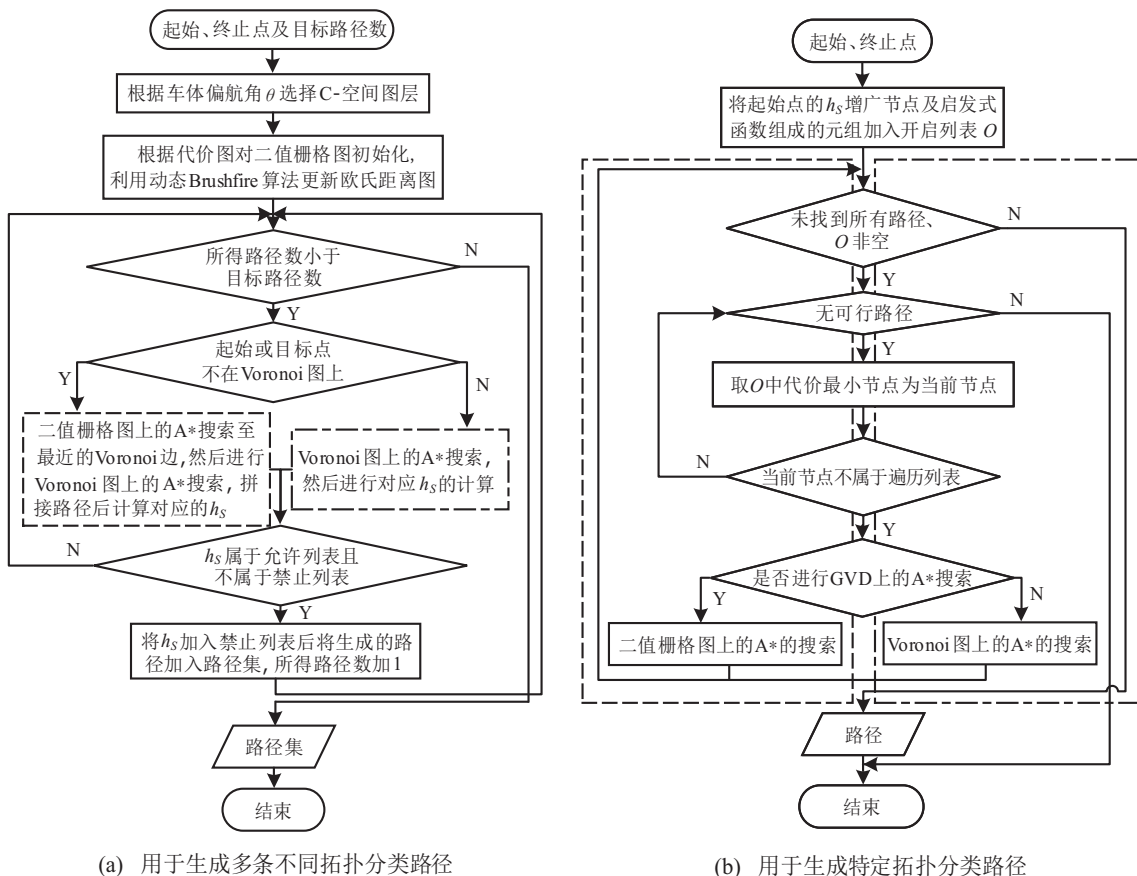


图1 C-空间-GVD- h_S 增广A*算法流程

2 理论推导

2.1 空间中连续与离散的内蕴等价

本节通过奇异同调和单纯同调的同构,建立空间中连续与离散的内蕴等价联系,由此表明无向图上路径拓扑分类不变量计算的合理性.

定义1 对于所有的 $n \geq 0$, 拓扑空间 X 上的 n 阶奇异同调定义为如下关于复形 $C_n(X)$ 和边界算子 ∂ 的商群^[14]:

$$H_n(X) = \frac{\text{Ker}\{\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)\}}{\text{Im}\{\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)\}}. \quad (1)$$

其中: $\text{Ker } \partial_n := \{a \in C_n(X) | \partial_n a = 0\}$, $\text{Im } \partial_{n+1} := \{\partial_{n+1} b = c | b \in C_{n+1}(X), c \in C_n(X)\}$. 可通过类似方式定义单纯同调 $H_n^\Delta(X)$.

同调理论表明, 拓扑空间中由障碍物表示的“洞”可通过非边界的环 z 进行表示. 对应于式(1), 由于 $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, 所有的链 $b \in C_{n+1}(X)$ 必属于 $\text{Ker } \partial_n$, 但并非所有的 $a \in C_n(X)$ 都在 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 内. 依据空间中障碍物的个数, 可将对应拓扑空间划分为单连通及多连通空间, 称障碍物个数小于1的情形为单连通空间, 其余情况称为多连通空间. 当可三角剖分空间上的复形 $C_n(X)$ 无法表示为任两个子复形的非交并 $C_n^i(X) \coprod C_n^j(X)$ 时, 称此空间连通. 多连通拓扑空间上的同调由如下定理所述的同调基本同构给出, 从而可将单连通情形下的路径拓扑分类不变量扩展到多连通情形.

定理1 若多连通复形 $C_n(X)$ 由连通子复形 $C_n^i(X)$ 构成, 则复形 $C_n(X)$ 及其子复形 $C_n^i(X)$ 的同调满足 $H_n\left(\coprod_i C_n^i(X)\right) = \bigoplus_{i=1}^p H_n^i(X)$.

由于无人车路径规划空间必定可三角剖分, 有如下定理所示的单纯同调与奇异同调同构.

定理2 对于所有的 n , 有 $H_n^\Delta(X) \cong H_n(X)$ ^[14].

2.2 路径拓扑分类不变量的积分表示

现引入流形用以表征特定拓扑空间. 流形局部同胚于欧氏空间, 即若 $p \in X$ 为拓扑空间 X 上一点, 则存在该点的邻域 U 使得同胚 $\varphi : U \rightarrow R^m, m \geq 0$ 成立, 称对应于 m 的最小值为流形 X 的维度. 基于形式的线性空间 $\Omega^n(X)$ 以及外微分算子 $d : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^{n+1}(X)$, 有如下 de Rham 上同调定义^[15]:

$$H_{\text{dR}}^n(X) = \frac{\text{Ker}\{d^n : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^{n+1}(X)\}}{\text{Im}\{d^{n-1} : \Omega^{n-1}(X) \rightarrow \Omega^n(X)\}}, \quad (2)$$

其中, 称 $\text{Ker}(d^n)$ 和 $\text{Im}(d^{n-1})$ 中的形式分别为闭形式及恰当形式. 定理7和定理8指出, 非恰当的闭形式将用来等价刻画拓扑空间中的“洞”. 类比于定理1, 便可得到如下定理所述的 de Rham 上同调基本同构.

定理3 若 $\{X_j\}$ 为光滑流形 X 的一个有限集, 则 X 可由非交并 $X = \coprod_j X_j$ 表示. 且含入映射 $i_j : X_j \rightarrow X$ 将诱导由 $H_{\text{dR}}^n(X)$ 到直积 $\prod_j H_{\text{dR}}^n(X_j)$ 的群同态同构 $i_{\text{dR}}^* : H_{\text{dR}}^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_j H_{\text{dR}}^n(X_j)$.

奇异同调与 de Rham 上同调之间存在内蕴等价, 因此在拓扑空间结构的描述上, 具有微分结构的 de Rham 上同调不仅可用于表示拓扑不变量, 还可对空间中的路径拓扑分类进行计算. 为了得到路径拓扑分类不变量的积分表达式, 还需借助 Mayer-Vietoris 正合列^[15] 及带拐角流形上的广义 Stokes 定理. 对于微分同胚 $\varphi : U \rightarrow R^n$, 称 (U, φ) 及 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 分别为 X 上的坐标卡及图册. 对于满足 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 的坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) , 考虑微分同胚 $T = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, 其中 $x_i = x_i \circ T(y_1, \dots, y_n) = T_i(y_1, \dots, y_n)$. 令 $J(T) = \det(\partial x_i / \partial y_j)$ 为 T 的雅可比行列式, 则有 $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dT_1 \wedge \dots \wedge dT_n = J(T) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ 成立. 定义 $T^*(\omega) = (f \circ T) dT_1 \wedge \dots \wedge dT_n$, 则有下式:

$$\int_{R^n} T^*(\omega) = \pm \int_{R^n} \omega. \quad (3)$$

由上式看出形式的积分取决于 $J(T)$. 当 T 为 R^n 上开子集的微分同胚且 $J(T)$ 处处为正时, 称 T 具有保向性. 若所有的变换函数都具有保向性, 则称对应流形 X 可定向. 流形的可定向性与可三角剖分等价, 下面的定理4给出了形式中函数的设计依据.

定理4 n 维流形 X 可定向的充要条件为其上有一个全局且处处非零的 n 形式^[15].

定理5 形式的积分不依赖于图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 及单位划分 $\{\rho_\alpha\}$ 的选取^[15].

引理1 令 $T : HR^n \rightarrow HR^n$ 为正半欧氏空间上 $J(T)$ 处处为正的微分同胚, 则 T 在边界上的诱导映射 $T_b : \partial(HR^n) \rightarrow \partial(HR^n)$ 为欧氏空间 R^{n-1} 上的微分同胚, 且其上 $J(T_b)$ 处处为正^[15].

综合定理4、定理5及引理1可证明下面带拐角流形上的广义 Stokes 定理, 基于该定理并结合光滑奇异单纯形的形式拉回映射便可证明 de Rham 上同调及光滑奇异上同调间的交换性.

定理6 给定带边界的 n 维可定向流形 X , 若 ω 为其上紧支的 $(n-1)$ 形式, 则有下式^[16]:

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega. \quad (4)$$

给定带拐角光滑流形上微分同胚的诱导保向映射 $F_{0,n} : \Delta^{n-1} \rightarrow \partial \Delta^n$, 则链 $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma \in C_n^\infty(X)$

上的积分为

$$\int_c \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\sigma} \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\Delta^n} \sigma^* \omega. \quad (5)$$

上式给出了 de Rham 上同调的上链群 $\Omega^n(X)$ 与光滑链群 $C_n^{\infty}(X)$ 之间的链映射. 为此, 令 $\Psi(\omega)(c) = \int_c \omega$. 可知有映射 $\Psi(\omega) \in \text{Hom}(C_n^{\infty}(X), R) : C_n^{\infty}(X) \rightarrow R$ 及 $\Psi : \Omega^n(X) \rightarrow \text{Hom}(C_n^{\infty}(X), R)$. 给定 R^n 中满足 $e_0 = 0$ 的一组标准基 e_1, e_2, \dots, e_n , 令 $\pi : e_0 \mapsto e_i, e_1 \mapsto e_0, \dots, e_i \mapsto e_{i-1}, e_{i+1} \mapsto e_{i+1}, \dots, e_n \mapsto e_n$ 且 $F_{i,n} = \pi \circ F_{0,n}$, 则 $F_{i,n}$ 的定向性由 $F_{0,n} : \Delta^{n-1} \rightarrow \partial \Delta^n$ 决定. 令 $\omega \in \Omega^{n-1}(X), \sigma \in C_n^{\infty}(X)$, 则可基于定理 6 并结合式 (5) 及下式:

$$\int_{\Delta^{n-1}} F_{i,n}^* \circ \sigma^* \omega = \pm \int_{F_{i,n}(\Delta^{n-1})} \sigma^* \omega, \quad (6)$$

在 $F_{i,n}$ 保向和非保向的情形下证明 $\delta(\Psi(\omega))(\sigma) = \Psi(d\omega)(\sigma)$ 成立, 即存在 $\Psi : \Omega^n(X) \rightarrow \text{Hom}(C_n^{\infty}(X), R)$ 的诱导同态 $\Psi^* : H_{\text{dR}}^n(X) \rightarrow H_{\infty}^n(X)$. 定义 n 维流形 X 的一个开覆盖 $\{U_{\alpha}\}$, 若其上的 U_{α} 及每个非空有限交集 $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ 微分同胚于 R^n , 则称该流形具有良好开覆盖, 相关定理表明紧致流形都具有有限良覆盖. 进一步, 由上述同胚关系知同态 $\Psi^* : H_{\text{dR}}^n(X) \rightarrow H_{\infty}^n(X)$ 同构, 此时称该覆盖为 de Rham 覆盖, 且称每个满足上述同构的子流形为 de Rham 流形.

引理 2 光滑流形上的有限良覆盖与 de Rham 覆盖等价.

证明 因为光滑流形上有限开覆盖的每个 U_{α} 及非空有限交集 $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ 皆微分同胚于 R^n , 故而存在可逆映射 $f : U_{\alpha} \rightarrow R^n$ 及 $g : R^n \rightarrow U_{\alpha}$ 使得其诱导上同调同态同构, 因此, 每个 U_{α} 及非空有限交集 $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ 都为 de Rham 流形, 且开覆盖为 de Rham 覆盖. \square

定理 7 若光滑流形 X 有 de Rham 覆盖, 则 X 为 de Rham 流形.

证明 考虑有限 de Rham 开覆盖 $\{U, V\}$ 上的同构. 关于 de Rham 上同调和光滑奇异上同调的 Mayer-Vietoris 正合列的交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{dR}}^{n-1}(U) \oplus H_{\text{dR}}^{n-1}(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & H_{\text{dR}}^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} \\ \downarrow (\Psi_U^*, \Psi_V^*) & & \downarrow \Psi_{U \cap V}^* \\ H_{\infty}^{n-1}(U) \oplus H_{\infty}^{n-1}(V) & \xrightarrow{i^*-j^*} & H_{\infty}^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial^*} \\ H_{\text{dR}}^n(X) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & H_{\text{dR}}^n(U) \oplus H_{\text{dR}}^n(V) \xrightarrow{i^*-j^*} \\ \downarrow \Psi^* & & \downarrow (\Psi_U^*, \Psi_V^*) \\ H_{\infty}^n(X) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & H_{\infty}^n(U) \oplus H_{\infty}^n(V) \xrightarrow{i^*-j^*} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} H_{\text{dR}}^n(U \cap V) \\ \downarrow \Psi_{U \cap V}^* \\ H_{\infty}^n(U \cap V). \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } ([\omega]_{\text{dR}}[\omega']_{\text{dR}}) \in H_{\text{dR}}^{n-1}(U) \oplus H_{\text{dR}}^{n-1}(V), \text{ 有} \\ & \Psi_{U \cap V}^* \circ (i^* - j^*)([\omega]_{\text{dR}}[\omega']_{\text{dR}}) = \\ & \Psi_{U \cap V}^*([\omega|_{U \cap V}]_{\text{dR}} - [\omega'|_{U \cap V}]_{\text{dR}}) = \\ & \Psi_{U \cap V}^*([\omega|_{U \cap V}]_{\text{dR}}) - \Psi_{U \cap V}^*([\omega'|_{U \cap V}]_{\text{dR}}) = \\ & [\Psi_U \circ \Psi_V(\omega|_{U \cap V})] - [\Psi_U \circ \Psi_V(\omega'|_{U \cap V})] = \\ & (i^* - j^*)([\Psi_U(\omega)][\Psi_V(\omega')]) \circ (i^* - j^*) \circ \\ & (\Psi_U^*, \Psi_V^*)([\omega]_{\text{dR}}[\omega']_{\text{dR}}). \end{aligned}$$

由 $C_{\infty}^n(U \cap V) = \text{Hom}(C_n^{\infty}(U \cap V), R)$ 知 $H_{\infty}^n(U \cap V) \cong \text{Hom}(H_n^{\infty}(U \cap V), R)$. 令 $[\omega]_{\text{dR}} = H_{\text{dR}}^{n-1}(U \cap V)$ 及 $[\mu] \in H_n^{\infty}(X)$, 令 $\partial^* : H_{\infty}^{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_n^{\infty}(X)$ 的对偶映射为光滑奇异同调的连接同态 $\partial_* : H_n^{\infty}(X) \rightarrow H_{n-1}^{\infty}(U \cap V)$, 因此有 $\partial_*([\mu]) = [c] \in H_{n-1}^{\infty}(U \cap V)$ 且存在 $d \in C_n^{\infty}(U), d' \in C_n^{\infty}(V)$ 使得 $[k_*d + l_*d'] = [\mu]$ 且 $(i_*c - j_*c) = (\partial d, \partial d')$. 则

$$\begin{cases} \partial^* \circ \Psi_{U \cap V}^*([\omega]_{\text{dR}})([\mu]) = \int_c \omega, \\ \Psi^* \circ \Lambda([\omega]_{\text{dR}})([\mu]) = \int_{\mu} \sigma. \end{cases} \quad (8)$$

令 $\eta \in \Omega^{n-1}(U), \eta' \in \Omega^{n-1}(V)$, 则有 $\sigma = d\eta$ 使得 $\omega = \eta|_{U \cap V} - \eta'|_{U \cap V}$, 同时 $c = \partial d$ 使得 $d + d'$ 表示与 μ 相同的同调类, 由于 $\partial d + \partial d' = \partial \mu = 0, d\omega = d\eta|_{U \cap V} - d\eta'|_{U \cap V} = 0$, 故而由 Stokes 公式知

$$\int_c \omega = \int_{\partial d} \omega = \int_{\partial d} \eta - \int_{\partial d} \eta' = \int_{\mu} \sigma, \quad (9)$$

所以式 (8) 成立. 令 $[\omega]_{\text{dR}} \in H_{\text{dR}}^n(X)$, 则有

$$\begin{aligned} & (\Psi_U^*, \Psi_V^*) \circ (k^* \oplus l^*)([\omega]_{\text{dR}}) = \\ & (\Psi_U^*, \Psi_V^*)([\omega_U]_{\text{dR}}, [\omega_V]_{\text{dR}}) = \\ & (\Psi_U^*([\omega_U]_{\text{dR}}), \Psi_V^*([\omega_V]_{\text{dR}})) = \\ & (\Psi^*([\omega_U]_{\text{dR}}), \Psi^*([\omega_V]_{\text{dR}})) = ([\Psi_U(\omega_U)], \\ & [\Psi_V(\omega_V)]) = (k^*([\Psi(\omega)]), l^*([\Psi(\omega)])) = \\ & (k^* \oplus l^*) \circ \Psi^*([\omega]_{\text{dR}}). \end{aligned}$$

从而可知式 (7) 所示交换图成立. 由引理 2 可知 $(\Psi_U^*$ 和 $\Psi_V^*)\Psi_{U \cap V}^*$ 均为同构映射, 利用 Five 引理^[14] 可知 Ψ^* 为同态同构. 现考虑有限 de Rham 开覆盖, 令 $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{p-1}, V = U_p$. 因为 U 和 V 都为 de Rham 流形且 $U \cap V = (U_0 \cap U_p) \cup (U_1 \cap U_p) \cup \dots \cup (U_{p-1} \cap U_p)$, 而 $U_0 \cap U_p, U_1 \cap U_p, \dots, U_{p-1} \cap U_p$ 都为 de Rham 流形的开子集, 所以 $U \cap V$ 亦为 de Rham 流形的开子集, 故可知光滑流形为 de Rham 流形. \square

定理8 若多连通光滑流形 X 上的每个连通区域 $X_j \subseteq X$ 都为 de Rham 流形, 则关于 X_j 的任何有限集 $\{X_j\}$ 的非交并 $X = \coprod_j X_j$ 亦为 de Rham 流形.

证明 由定理3知包含映射 $i_j : X_j \rightarrow X$ 的诱导群同态同构为 $i_{\text{dR}}^* : H_{\text{dR}}^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_j H_{\text{dR}}^n(X_j)$, 其中 $i_{\text{dR}}^*([\omega]_{\text{dR}}) = ([\omega_{X_j}]_{\text{dR}})_j$. 类比可知 i_j 诱导光滑奇异上同调群同态同构 $i_\infty^* : H_\infty^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_j H_\infty^n(X_j)$. 同时若 $f_{X_j} : C_n^\infty(X_j) \rightarrow R$ 由定义 $f_{X_j}(\sigma_j) = f(i_j \circ \sigma_j)$, $\sigma_j : \Delta^n \rightarrow X_j$ 给出, 则由映射 $f : C_n^\infty(X) \rightarrow R$ 知 $i_\infty^*([f]_\infty) = ([f_{X_j}]_\infty)_j$. 由题设知对于每个连通流形, 有同态同构 $\Psi_j^* : H_{\text{dR}}^n(X_j) \rightarrow H_\infty^n(X_j)$, 因此, 有群同态非交并同构 $\prod_j \Psi_j^* : \prod_j H_{\text{dR}}^n(X_j) \xrightarrow{\cong} \prod_j H_\infty^n(X_j)$ 成立. 令 $\omega \in \Omega^n(X)$, 则有

$$\prod_j \Psi_j^* \circ i_{\text{dR}}^*([\omega]_{\text{dR}}) = (\Psi_j^*([\omega_{X_j}]_{\text{dR}}))_j, \quad (10)$$

$$i_\infty^* \circ \Psi^*([\omega]_{\text{dR}}) = ((\Psi(\omega))_{X_j}]_\infty)_j. \quad (11)$$

为证明式(10)与(11)相等, 需等价证明 $\Psi_j(\omega_{X_j}) = (\Psi(\omega))_{X_j}$. 令 $\sigma_j : \Delta^n \rightarrow X_j$ 为 X_j 上的奇异单纯形, 则根据 de Rham 上同调的积分定义有

$$\Psi_j(\omega_{X_j})(\sigma_j) = \int_{\sigma_j} \omega_{X_j} = \int_{\Delta^n} \sigma_j^* \omega_{X_j}, \quad (12)$$

$$(\Psi(\omega))_{X_j}(\sigma_j) = \int_{\Delta^n} \sigma_j^* i_j^* \omega = \int_{\Delta^n} \sigma_j^* \omega_{X_j}. \quad (13)$$

因此, 由式(12)、(13)相等可知式(10)、(11)相等, 故

$$\prod_j \Psi_j^* \circ i_{\text{dR}}^*([\omega]_{\text{dR}}) = i_\infty^* \circ \Psi^*([\omega]_{\text{dR}}) \Rightarrow$$

$$\Psi^* = (i_\infty^*)^{-1} \circ \prod_j \Psi_j^* \circ i_{\text{dR}}^*,$$

即 Ψ^* 为同态同构. \square

2.3 路径拓扑分类不变量的计算依据

由于紧致流形具有 de Rham 开覆盖, 其上满足 de Rham 上同调和奇异上同调的同构; 另一方面, 若流形上存在一个处处为正的 1-形式, 则该流形可定向. 可定向流形上的 de Rham 上同调所对应的奇异同调有洞无挠, 进而与单纯同调同构, 从而建立起离散空间路径的拓扑分类理论基础. 由于欧氏空间闭有界与紧致性等价, 下文将针对欧氏空间的紧支 de Rham 上同调 $H_{\text{dR},c}^r(R^n)$ 讨论. 考虑映射 $\pi_* : \Omega_c^{r+1}(R^n \times R^1) \rightarrow \Omega_c^r(R^n)$ 及 $e_* : \Omega_c^r(R^n) \rightarrow \Omega_c^{r+1}(R^n \times R^1)$, 紧支 Poincaré 引理^[15] 通过群同态 $\epsilon : H_{\text{dR},c}^{r+1}(R^n \times R^1) \rightarrow H_{\text{dR},c}^r(R^n)$ 同构以及 $\omega \in \Omega_c^k(R^n)$, $c \in C^k(R^n \times R^1)$, 给出微分同胚层面其与 Stokes 公式的等价关系.

2.4 路径拓扑分类不变量的对偶关系

定义2 给定线性空间 $\Omega^n(X)$, 则称由 $\Omega^n(X)$ 到 R 的线性映射所在的线性空间 $\Omega^n(X)^* = \text{Hom}(\Omega^n(X), R)$ 为 $\Omega^n(X)$ 的对偶空间, 称 $\Omega^n(X)^*$ 中的线性映射为线性形式.

定义3 给定线性形式 $\omega \in \Omega^n(X)$ 和 $\eta^* \in \Omega^n(X)^*$, 令运算 $\eta^*(\omega) = \langle \eta^*, \omega \rangle$ 为 η^* 作用于 ω . 因此, 该定义方法给出了双线性运算 $\langle -, - \rangle : \Omega^n(X)^* \otimes \Omega^n(X) \rightarrow R$, 且满足 $\langle \eta_1^* + \eta_2^*, \omega \rangle = \langle \eta_1^*, \omega \rangle + \langle \eta_2^*, \omega \rangle$, $\langle \eta^*, \omega_1 + \omega_2 \rangle = \langle \eta^*, \omega_1 \rangle + \langle \eta^*, \omega_2 \rangle$, $\langle \lambda \eta^*, \omega \rangle = \lambda \langle \eta^*, \omega \rangle$ 且 $\langle \eta^*, \lambda \omega \rangle = \lambda \langle \eta^*, \omega \rangle$.

定义4 当且仅当线性空间 $\Theta^n(X)$ 和 $\Omega^n(X)$ 的双线性映射 $\langle -, - \rangle : \Theta^n(X) \otimes \Omega^n(X) \rightarrow R$ 满足: 1) 若对于每个 $\theta \in \Theta^n(X)$ 及所有的 $\omega \in \Omega^n(X)$, 当 $\langle \theta, \omega \rangle = 0$ 时, 有 $\theta = 0$; 2) 若对于每个 $\omega \in \Omega^n(X)$ 及所有的 $\theta \in \Theta^n(X)$, 当 $\langle \theta, \omega \rangle = 0$ 时, 有 $\omega = 0$. 则称该双线性映射非退化, 其等价于存在对偶空间的线性单射 $l_{\langle -, - \rangle} : \Theta^n(X) \rightarrow \Omega^n(X)^*$ 及 $r_{\langle -, - \rangle} : \Omega^n(X) \rightarrow \Theta^n(X)^*$.

引理3 对于有限维线性空间 $\Theta^n(X)$ 和 $\Omega^n(X)$, 双线性映射 $\langle -, - \rangle : \Theta^n(X) \otimes \Omega^n(X) \rightarrow R$ 非退化的充要条件为由映射 $\theta \mapsto \langle \theta, \cdot \rangle$ 定义的单射 $l_{\langle -, - \rangle} : \Theta^n(X) \rightarrow \Omega^n(X)^*$ 为同构映射.

定理9 若光滑可定向 n 维流形 X 有有限良覆盖, 则双线性映射 $\int_X : H_{\text{dR}}^q(X) \otimes H_{\text{dR},c}^{n-q}(X) \rightarrow R$ 非退化, 进而可得 de Rham 上同调与紧支 de Rham 上同调的对偶同构 $H_{\text{dR}}^q(X) \cong H_{\text{dR},c}^{n-q}(X)^*$. 此外, 若 X 为紧致流形, 则有 $H_{\text{dR}}^q(X) \cong H_{\text{dR}}^{n-q}(X)^*$.

3 路径拓扑分类不变量的构造及计算

3.1 路径拓扑分类不变量的基本同构

称 n 维欧氏空间 R^n 中代表洞的 $n - m$ 维流形的并集 $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^p S_i$ 为奇异流形, 且闭有界区域表示的 m 维流形 Γ 的 $m - 1$ 维边界 γ 为备选流形. 易知两者满足 $\gamma \cap \tilde{S} = \emptyset$. 本节将基于 n 维障碍物集 $\tilde{O} = \bigcup_{i=1}^p O_i$ 及 $n - m$ 维奇异流形集 $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^p S_i$ 讨论 $m > 1$ 时, 空间 $(R^n - \tilde{O})$ 和 $(R^n - \tilde{S})$ 上 $m - 1$ 阶同调群间的同构关系. 基于定理1, 下面的定理将首先给出 $R^n - \tilde{S}$ 与 $R^n - S_i$ 间的群同调同构, 并在此基础上给出图2所示的 \tilde{O} 及 \tilde{S} 间的同调同构.

定理10 若 \tilde{S} 中 S_i 为道路连通、紧且闭的局部收缩可定向 $n - m$ 维奇异流形, 且对于任意的 $i \neq j$ 满足 $S_i \cap S_j = \emptyset$, 则 $R^n - \tilde{S}$ 与 $R^n - S_i$ 间的同调满足同构 $H_{m-1}(R^n - \tilde{S}) \cong \bigoplus_{i=1}^p H_{m-1}(R^n - S_i) = R^p$.

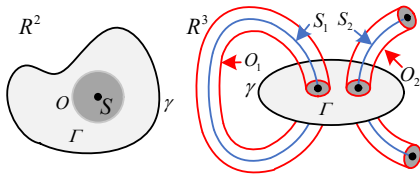


图2 障碍物O及奇异流形S的等价性

证明 对于任意的 $k = 1, \dots, p$, 若空间 R^n , $R^n - S_k$ 与 $R^n - \bigcup_{i=k+1}^p S_i$ 满足 $(R^n - S_k) \cup (R^n - \bigcup_{i=k+1}^p S_i) = R^n$, $(R^n - S_k) \cap (R^n - \bigcup_{i=k+1}^p S_i) = R^n - \bigcup_{i=k}^p S_i$, 则由同调群的 Mayer-Vietoris 正合列可知 $\dots \rightarrow H_m(R^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=k}^p S_i) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_{m-1}(R^n - S_k) \oplus H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=k+1}^p S_i) \xrightarrow{k_* \oplus l_*} H_{m-1}(R^n) \rightarrow \dots$. 综合 $H_m(R^n) = 0$ 及 $H_{m-1}(R^n) = 0$ 易知 $H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=k}^p S_i) \cong H_{m-1}(R^n - S_k) \oplus H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=k+1}^p S_i)$. 令 $k = 1$, 则递推可知 $H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=1}^p S_i) \cong H_{m-1}(R^n - S_1) \oplus H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=2}^p S_i) \cong H_{m-1}(R^n - S_1) \oplus H_{m-1}(R^n - \bigcup_{i=3}^p S_i) \cong H_{m-1}(R^n - S_1) \oplus \dots \oplus H_{m-1}(R^n - S_p) = \bigoplus_{i=1}^p H_{m-1}(R^n - S_i) = R^p$. \square

定理11 对于 n 维欧氏空间 R^n 中紧的局部可收缩 n 维 \tilde{O} , 假设存在与其同伦等价且其中元素两两不相交的 $n - m$ 维可定向闭连通 \tilde{S} , 同时对于 $k = 1, \dots, p$ 满足 $S_k \subseteq O_k$, 使得 $[S_1], \dots, [S_p]$ 构成同调群 $H_{n-m}(\tilde{O})$ 的一组基, 则可得由含入映射 $i : (R^n - \tilde{O}) \rightarrow (R^n - \tilde{S})$ 诱导所得的映射 $i_* : H_{m-1}(R^n - \tilde{O}) \rightarrow H_{m-1}(R^n - \tilde{S})$ 同构.

证明 令 $O_k \subset \tilde{O}$ 和 $S_k \subset \tilde{S}$, 首先证明与单个元素相关的同调的诱导映射 $i_*^3 : H_{m-1}(R^n - O_k) \rightarrow H_{m-1}(R^n - S_k)$ 同构. 由 O_k 与 S_k 间的同伦等价诱导同调同构可知 $H_{n-m}(O_k) \cong H_{n-m}(S_k)$. 为此考虑

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{n-m}(O_k) \xrightarrow{\tau} H_m(R^n, R^n - O_k) \\ \downarrow i_*^1 \qquad \qquad \downarrow i_*^2 \\ H^{n-m}(S_k) \xrightarrow{\tau} H_m(R^n, R^n - S_k) \\ H_m(R^n, R^n - O_k) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(R^n - O_k) \\ \downarrow i_*^2 \qquad \qquad \downarrow i_*^3 \\ H_m(R^n, R^n - S_k) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(R^n - S_k). \end{array} \right. \quad (14)$$

首先证明 $\tau : H^{n-m}(O_k) \rightarrow H_m(R^n, R^n - O_k)$ 为同构映射. 由定理9知, 对于局部可收缩的障碍

物 O_k 有 $H^{n-m}(O_k) \cong H_m(O_k)$ 成立, 且空间对 $(R^n, R^n - O_k)$ 所对应的相对同调长正合列为 $\dots \rightarrow H_m(R^n) \rightarrow H_m(R^n, R^n - O_k) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(R^n - O_k) \rightarrow H_{m-1}(R^n) \rightarrow \dots$. 由 $H_m(R^n) \cong 0 \cong H_{m-1}(R^n)$ 可知 $H_m(R^n, R^n - O_k) \cong H_{m-1}(R^n - O_k)$. 由切除定理可知 $H_m(R^n, R^n - O_k) \cong H_m(O_k)$. 结合式(14)可知 $\tau : H^{n-m}(O_k) \rightarrow H_m(R^n, R^n - O_k)$ 为同构映射. 同理 $H^{n-m}(S_k) \cong H_m(R^n, R^n - S_k)$, 故可知式(14)第1个区域交换. 同理亦可知第2个区域交换, 由递推性易知 $H_{m-1}(R^n - O_k) \cong H_{m-1}(R^n - S_k)$. 由定理10可知 $R^n - \tilde{S}$ 与 $R^n - S_k$ 间的群同调存在同构 $H_{m-1}(R^n - \tilde{S}) \cong \bigoplus_{k=1}^p H_{m-1}(R^n - S_k)$. 同理 $R^n - \tilde{O}$ 与 $R^n - O_k$ 间亦满足 $H_{m-1}(R^n - \tilde{O}) \cong \bigoplus_{k=1}^p H_{m-1}(R^n - O_k) = R^p$. 又 $H_{m-1}(R^n - O_k) \cong H_{m-1}(R^n - S_k)$, 故有 $H_{m-1}(R^n - \tilde{O}) \cong H_{m-1}(R^n - \tilde{S})$. \square

3.2 路径拓扑分类不变量的构造

令 $[\eta] \in H^{m-1}(R^n - \tilde{O})$, $[\omega] \in H_{m-1}(R^n - \tilde{O})$, 则可考虑由积分定义的配对 $\int_{[\omega]} \eta : H^{m-1}(R^n - \tilde{O}) \otimes H_{m-1}(R^n - \tilde{O}) \rightarrow R$, 给定 $R^n - \{0\}$ 中 $n - 1$ 形式 $\vartheta \in \Omega^{n-1}(R^n - \{0\})$, 则由映射 $\Theta : (R^n - \tilde{O}) \times \tilde{O} \rightarrow (R^n - \{0\})$ 诱导的拉回映射最终将关于 ϑ 在 $(R^n - \{0\})$ 上形式的积分分别划分到在 $(R^n - \tilde{O})$ 和 \tilde{O} 上独立的运算, 即

$$\int_{R^n - \{0\}} \vartheta = \int_{R^n - \tilde{O}} \Theta^* \vartheta = \int_{R^n - \tilde{O}} \psi_S, \quad (15)$$

其中 $(m - 1)$ 形式 $\psi_S \in \Omega^{m-1}(R^n - \tilde{O})$ 由形式 $\Theta^* \vartheta$ 在 \tilde{O} 上积分得到. 定理11指出式(15)等价于 $\int_{R^n - \tilde{S}} \psi_S$.

给定 $n - m$ 维奇异流形 \tilde{S} , 当且仅当对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, 当任意两个备选流形 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{Y}_n^N$ 间存在一条使得 $\phi(0) = \gamma_1, \phi(1) = \gamma_2$ 且 $\tilde{S} \cap \phi(\alpha) = \emptyset$ 的连续通路 ϕ 时, 称 γ_1, γ_2 具有相同的拓扑分类不变量. 图2中流形 Γ 可转化为以 $r = \Gamma \cap S$ 为球心且半径为 ε 的定向 m 维球 $B_\varepsilon(r)$, 因此当 ε 足够小时, 可保证每个 S 与球 $B_\varepsilon(r)$ 唯一相交. 假设存在光滑且恰当的 m 形式 $d\psi_S$, 使得对于每个 $B_\varepsilon(r)$, 基于式(15), 利用 Stokes 公式有下述积分:

$$\int_{B_\varepsilon(r)} d\psi_S = \begin{cases} 0, & B_\varepsilon(r) \cap S = \emptyset; \\ \pm 1, & B_\varepsilon(r) \cap S \neq \emptyset. \end{cases} \quad (16)$$

式(16)取决于定向 m 维球 $B_\varepsilon(r)$ 的定向. 基于上式便可给出具有 $m - 1$ 维备选流形的 n 维欧氏空间中路径拓扑分类不变量的定义

$$h_S(\gamma) = \int_\gamma \psi_S. \quad (17)$$

下面推导 ψ_S 的表达式. 令奇异流形 $\gamma \in \mathcal{Y}_n^{m-1}$

和备选流形 S 所嵌入的欧氏空间分别为 E_n 和 E'_n , 其内点的坐标分别用 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 和 $\mathbf{x}' = [x'_1, \dots, x'_n]^T$ 表示. 故可知 $A = \Gamma \times S$ 为维度为 $2n$ 的欧氏空间积空间 $E_n \times E'_n$ 的一个 n 维嵌入流形. 对于流形 A 中的点 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}$, 其切空间 $\text{TA}_{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}}$ 表示 n 维向量空间, 因此, 切空间 $\text{TA}_{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}}$ 的基底由 $\{dx_1, \dots, dx_n, dx'_1, \dots, dx'_n\}_{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}}$ 中 n 个线性独立的元素构成, 其中切空间 $\text{TA}_{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}}$ 的子空间 $\text{TT}_{\mathbf{x}_0}$ 和 $\text{TS}_{\mathbf{x}'_0}$ 维度分别为 m 和 $n - m$, 且其基底分别由 $\{dx_1, \dots, dx_n\}_{\mathbf{x}_0}$ 和 $\{dx'_1, \dots, dx'_n\}_{\mathbf{x}'_0}$ 中 m 和 $n - m$ 个线性独立的元素构成. 考虑 R^n 中关于点 $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^T$ 的函数

$$G_k(\mathbf{s}) = \frac{1}{A_{n-1}} \frac{s_k}{(s_1^2 + \dots + s_n^2)^{n/2}}. \quad (18)$$

其中 A_{n-1} 表示 $n - 1$ 维单位球面的表面积, 其值由 Gamma 函数 Γ 表示为

$$A_{n-1} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)!, \\ \frac{\sqrt{\pi}n!!}{2^{(n+1)/2}}. \end{cases} \quad (19)$$

令 $(n-1)$ 形式 $\vartheta = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} G_k(\mathbf{s}) ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{k-1} \wedge ds_{k+1} \wedge \dots \wedge ds_n$ 且 $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{x}' \in E'_n$. 因此当 $\Gamma_B \cap S \neq \emptyset$ 时, 对 n 形式 $d\vartheta$ 在 $A_B = \Gamma_B \times S \subset E_n \times E'_n$ 上积分有 $\int_{A_B} d\vartheta = \pm 1$. 对于切空间 $\text{TA}_{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\}}$ 中的 p 形式 $\xi = f dx_{\sigma(1)}^{\tau_1} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(p)}^{\tau_p}$, 当 $\tau_i = 1$ 时, 有 $dx_{\sigma(i)}^{\tau_i} = dx'_{\sigma(i)}$; 当 $\tau_i = 0$ 时, 有 $dx_{\sigma(i)}^{\tau_i} = dx_{\sigma(i)}$. 为保证 $dx_{\sigma(1)}^{\tau_1}, \dots, dx_{\sigma(p)}^{\tau_p}$ 线性独立, 应满足 $p - m \leq \sum \tau_i \leq n - m$, 即有下式:

$$\begin{aligned} \vartheta = & \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left[\frac{(-1)^{n-m-1}}{m!(n-m-1)!} \times \right. \\ & \sum_{\sigma \in T(\Pi_{-k}^n)} \text{sgn}(\sigma) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)} \wedge \\ & dx'_{\sigma(m+1)} \wedge \dots \wedge dx'_{\sigma(n-1)} + \frac{(-1)^{n-m}}{(m-1)!(n-m)!} \times \\ & \left. \sum_{\zeta \in T(\Pi_{-k}^n)} \text{sgn}(\zeta) dx_{\zeta(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\zeta(m-1)} \wedge \right. \\ & \left. dx'_{\zeta(m)} \wedge \dots \wedge dx'_{\zeta(n-1)} \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

其中: $\Pi_{-k}^n = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$; $T(\Pi_{-k}^n)$ 表示 Π_{-k}^n 的全排列. 当 σ 为奇排列时, $\text{sgn} \sigma = -1$; 当 σ 为偶排列时, $\text{sgn} \sigma = 1$. $P^{n-m}(\Pi_{-k}^n)$ 表示将集合 Π_{-k}^n 中的元素划分为元素个数分别为 $n - m$ 和 m 两部分后组合而成的集合; 而 $\rho l(1), \dots, \rho l(n - m)$ 和

$\rho r(1), \dots, \rho r(m)$ 分别表示 Π_{-k}^n 内左、右部分中的元素. 因此可设

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} = & (-1)^{k+1+n-m} \sum_{k=1}^n G_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sum_{\rho \in P^{n-m}(\Pi_{-k}^n)} \text{sgn}(\rho) d \times \\ & x'_{\rho l(1)} \wedge \dots \wedge dx'_{\rho l(n-m)} \wedge dx_{\rho r(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\rho r(m-1)}, \end{aligned}$$

且满足 $d\vartheta = d\mathbf{x} \bar{\vartheta}$. 由 $A_B = \Gamma_B \times S$, S 无边界且 Γ_B 边界为 γ_B 知 $\partial A_B = \gamma_B \times S$, 因此由 Stokes 公式知

$$\int_{A_B} d\vartheta = \int_{A_B} d\mathbf{x} \bar{\vartheta} = \int_{\partial A_B} \bar{\vartheta} = \int_{\gamma_B \times S} \bar{\vartheta} = \int_{\gamma_B} \int_S \bar{\vartheta}. \quad (21)$$

结合 $\bar{\vartheta}$, 令

$$\begin{aligned} H_\rho^k(\mathbf{x}; S) = & (-1)^{k+1+n-m} \text{sgn}(\rho) \int_S G_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dx'_{\rho l(1)} \wedge \dots \\ & \wedge dx'_{\rho l(n-m)}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \psi_S = & \sum_{k=1}^n \sum_{\rho \in P^{n-m}(\Pi_{-k}^n)} H_\rho^k(\mathbf{x}; S) \wedge dx_{\rho r(1)} \wedge \dots \\ & \wedge dx_{\rho r(m-1)}, \end{aligned}$$

便可根据式(21)得到(17)的计算方式. 进而可利用定理 10 由单个 S 所对应的 $h_S(\gamma)$ 扩展到下式所示 $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^p S_i$ 所对应的 $h_{\tilde{S}}(\gamma)$:

$$h_{\tilde{S}}(\gamma) = [h_{S_1}(\gamma), h_{S_2}(\gamma), \dots, h_{S_p}(\gamma)]^T. \quad (22)$$

3.3 路径拓扑分类不变量的计算

3.3.1 2维路径拓扑分类不变量

当 $n = 2, m = 2$ 时, 有 $\text{sgn}(\rho) = 1, P^0(\Pi_{-1}^2) = \{\{\}, \{2\}\}, P^0(\Pi_{-2}^2) = \{\{\}, \{1\}\}$. 令 $\mathbf{S} = [S_1, S_2]^T$, $z = x_1 + ix_2, S_c = S_1 + iS_2$, 则有

$$\begin{aligned} \psi_S = & H_\emptyset^1(\mathbf{x}; S) dx_2 + H_\emptyset^2(\mathbf{x}; S) dx_1 = \\ & \frac{1}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\|^2} ((x_1 - S_1) dx_2 - (x_2 - S_2) dx_1) = \\ & \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\frac{1}{z - S_c} dz \right). \end{aligned}$$

代入式(17)可知, 2维平面上的路径拓扑分类不变量 $h_S(\gamma)$ 为

$$h_S(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \text{Im} \left(\frac{1}{z - S_c} dz \right). \quad (23)$$

注意到上式可表示为 Cauchy 积分公式的虚部, 即

$$\lambda_S(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - S_c} dz. \quad (24)$$

因此, 对于起始、终止点分别为 z_0 和 z_q 的路径 $\gamma =$

$\sum_{i=0}^{q-1} e_i, e_i = \{z_i \rightarrow z_{i+1}\}$ 以及 $S_l, l = 1, \dots, p$, 令 \log 为自然对数. 于是, 对于 $\forall z$ 及 $k = 0, \pm 1, \dots$, 取下式虚部最小, 可得 $h_{S_l}(\gamma)$ 的计算结果为

$$i \sum_{i=0}^{q-1} |\text{Arg}(z_{i+1} - S_l) - \text{Arg}(z_i - S_l) + 2k\pi|_{\min}. \quad (25)$$

3.3.2 3维路径拓扑分类不变量

当 $n = 3, m = 2$ 时, 对于 $\text{sgn}(\rho) = 1$ 有 $P^1(\Pi_{-1}^3) = \{\{2\}, \{3\}\}, P^1(\Pi_{-2}^3) = \{\{1\}, \{3\}\}, P^1(\Pi_{-3}^3) = \{\{1\}, \{2\}\}$. 对于 $\text{sgn}(\rho) = -1$ 有 $P^1(\Pi_{-1}^3) = \{\{3\}, \{2\}\}, P^1(\Pi_{-2}^3) = \{\{3\}, \{1\}\}, P^1(\Pi_{-3}^3) = \{\{2\}, \{1\}\}$. 令 $s = x - x'$, 则有

$$\psi_S = \begin{bmatrix} H_{\{3\}}^2 + H_{\{2\}}^3 \\ H_{\{3\}}^1 + H_{\{1\}}^3 \\ H_{\{2\}}^1 + H_{\{1\}}^2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{dl' \times (x - x')}{\|x - x'\|^3} \wedge dl. \quad (26)$$

代入式(17)可知, 3维路径拓扑分类不变量 $h_S(\gamma)$ 为

$$h_S(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \int_S \frac{dl' \times (x - x')}{\|x - x'\|^3} \cdot dl. \quad (27)$$

对于分段光滑的 $S_l = \sum_{i=0}^{u-1} s_i, s_i = \{s_l^i \rightarrow s_l^{i+1}\}, l = 1, 2, \dots, p$, 令 $dl = [dx_1, dx_2, dx_3]^T, dl' = [dx_1', dx_2', dx_3']^T, r_i = s_l^i - x, r_{i+1} = s_l^{i+1} - x; \|t\|$ 为备选流形 γ 上 x 到 s_i 的距离, 故而 $\psi_{S_l} = \sum_{i=0}^{u-1} \Xi_i(s_l^i, s_l^{i+1}, x)$ 中的 $\Xi_i(s_l^i, s_l^{i+1}, x)$ 为

$$\frac{1}{\|t\|^2} \left(\frac{t \times r_{i+1}}{\|r_{i+1}\|} - \frac{t \times r_i}{\|r_i\|} \right) \wedge dl. \quad (28)$$

对于3维欧氏空间 R^3 中的矢量及标量场, 由于其 Mayer-Vietoris 正合列为 $0 \rightarrow \Omega_c^0(R^3) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega_c^1(R^3) \xrightarrow{\text{curl}} \Omega_c^2(R^3) \xrightarrow{\text{div}} \Omega_c^3(R^3) \rightarrow 0$, 易知式(27)与安环定理相对应, 根据无限及有限长的 \tilde{S} 分别对应的两种情形, 易证式(27)均成立.

4 拓扑约束下C-空间GVD上的路径规划

4.1 C-空间分层广义Voronoi图

Voronoi 区域分为退化及非退化两种情形, 当且仅当其共圆基点数为3时非退化. 基于2.4节所述对偶关系及定理9, 有非退化Voronoi区域的对偶(下面的引理4)、空圆特性(下面的引理5)及Voronoi图和Delaunay三角网的对偶(下面的定理12)成立, 因此, 通过Delaunay三角网得到的Voronoi图唯一且其上的路径稀疏分离.

引理4 当且仅当3基点共圆时, 对应的Voronoi区域非退化且与上述基点构成的三角形对偶.

注1 由定义4及引理3知引理4成立.

引理5 3个相邻基点构成的三角形外接圆不包含其余基点.

定理12 对引理4中单个Voronoi区域进行延拓后将得到与其唯一对偶的Delaunay三角网.

证明 引理4指出了单个结构间的对偶性, 引理5指出了各单元间的独立性, 因此, 经过延拓后的Voronoi图与Delaunay三角网唯一对偶. \square

称无人车状态 (x, y, θ) 所处的空间为C-空间. 基于文献[17]给出的用于C-空间欧氏距离地图更新的动态Brushfire算法, 利用栅格地图 $M(x, y)$ 与无人车 $S_\theta(i, j)$ 卷积得到的障碍物栅格地图 $C_\theta(x, y)$, 将得到2维分层C-空间欧氏距离地图, 并用于最终生成分层GVD.

4.2 C-空间-GVD- h_S 增广A*算法

为简化起见, 称拓扑约束增广栅格图为 h_S 增广栅格图. 基于图3左侧所示的栅格图, 2维空间中的 h_S 增广栅格图 $G_h = \{G, h_S\}$ 如图3右侧所示. 现基于A*算法给出 h_S 约束下C-空间动态GVD栅格图上的最短路径算法, 易证规划所得的路径最短有如下引理.

引理6 若 $P_{h_S}^* = \{\{c_1, h_S^1\}, \dots, \{c_q, h_S^q\}\}$ 为 $G_h = \{G, h_S\}$ 上 c_1 和 c_q 间由A*算法规划得到的一条 $h_S = \sum_{i=1}^q h_S^i$ 约束下的最短路径, 则图3左栅格图中 h_S 指示的路径 $P^* = \{c_1, \dots, c_q\}$ 最短.

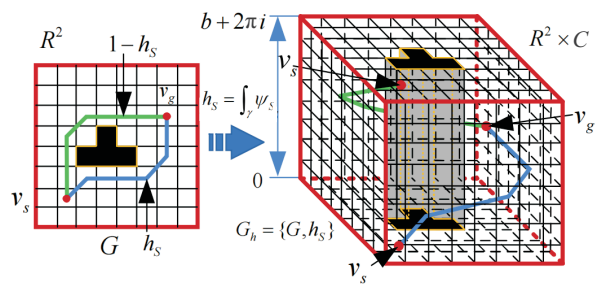


图3 R^2 中拓扑约束增广栅格图的构造

算法1 C-空间-GVD- h_S 增广A*算法.

输入及参数: 起始点 v_s 及终止点 v_g ; 目标路径数 N_{path} ; h_S 的允许、禁止列表 A 和 B ; 开启列表 O ; 闭合列表 C ; 遍历列表 K ; 实际代价列表 F ; isVoronoiCell 用于判断栅格是否在Voronoi图上; stopAtVoronoi 用于决定算法搜索类型; 无可行路径标志符 resign; 路径 path; 车体偏航角 θ .

输出: N_{path} 条路径集 pathSet.

step 1: 根据 θ 选择C-空间Voronoi图层.

step 2: 根据代价图对二值栅格图初始化并利用动态Brushfire算法更新欧氏距离图.

step 3: 当最终所得路径数 N 小于 N_{path} 时开启循环. 若 v_s 、 v_g 不在Voronoi图上, 则进行step 4中的A*搜索, 然后对属于Voronoi图上的部分进行step 4中的GVD- h_S 增广A*搜索, 最终拼接前述两种情形下相应的path, 并根据式(24)计算path的 h_S 值. 若 $h_S^{curr} \notin B$ 且 $h_S^{curr} \in A$, 则将 h_S 加入 B 后将所对应的path加入pathSet, 此时 $N + 1$.

step 4: 将 h_S 增广节点 $\{v_s, 0\}$ 及所对应启发式函数 f_S 组成的元组加入开启列表 O , 创建节点 $\{v_s, 0\}$ 及实际代价值之间的哈希表. 当未找到所有路径、无可行路径且 O 非空时开启循环, 遍历结束但 O 为空时对resign置真且清空path; 否则取 O 中代价最小节点为当前节点 v_{curr} . 若stopAtVoronoi为真且 v_{curr} 在Voronoi图上, 则终止搜索; 否则进行GVD上的搜索过程. 若 $v_{curr} \notin K$, 则将 v_{curr} 加入 K 后根据式(24)求 v_{curr} 每个邻近节点 v_{neigh} 的 h_S^{neigh} , 此时对于 v_{neigh} 位于障碍物上、GVD上的A*算法不在Voronoi图上以及 v_{neigh} 已被遍历的情形, 直接跳转到下一邻近节点;

反之计算 v_{neigh} 的实际代价值 g . 若 g_{neigh} 属于 F 且其值不大于 g , 则忽略 v_{neigh} ; 否则将更新的 g 加入到 F 后将 v_{curr} 作为 v_{neigh} 的前置点. 依此递归并在结束后返回path.

5 仿真验证与分析

5.1 h_S 增广A*算法仿真

1) 2维 h_S 约束下最短路径规划仿真结果如图4所示. 给定大小为 1000×1000 , 分辨率为1 m/Pixel且分布圆形及矩形的2维栅格地图, 其表示20条不同 h_S 值所对应的最短路径, 且最大搜索时间为225 ms, 表1为对应于式(22)及(23)中 h_S 的各分量值.

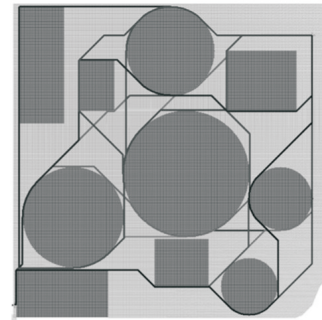


图4 2维平面上不同 h_S 值约束下的最短路径仿真结果

表1 2维平面上不同拓扑分类路径对应的 h_S 值

路径	h_S^1	h_S^2	h_S^3	h_S^4	h_S^5	h_S^6	h_S^7	h_S^8	h_S^9	h_S^{10}
1	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
2	-1.8960i	-2.8090i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
3	-1.8960i	-2.8090i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
4	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
5	-1.8960i	2.8090i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
6	-1.8960i	2.8090i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	3.9435i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
7	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	-4.0523i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
8	-1.8960i	2.8090i	3.3189i	4.1403i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
9	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	-4.0523i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	-4.1260i	-3.1435i
10	-1.8960i	2.8090i	3.3189i	4.1403i	2.2309i	-2.5654i	3.9435i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
11	-1.8960i	2.8090i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
12	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	-4.1260i	-3.1435i
13	-1.8960i	2.8090i	-2.9643i	-2.1429i	-4.0523i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
14	-1.8960i	-3.4742i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
15	-1.8960i	2.8090i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	3.9435i	1.7928i	2.1571i	-3.1435i
16	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	-4.1260i	3.1397i
17	4.3872i	2.8090i	3.3189i	4.1403i	2.2309i	-2.5654i	3.9435i	1.7928i	2.1571i	3.1397i
18	-1.8960i	-3.4742i	-2.9643i	-2.1429i	4.0523i	-2.5654i	-2.3396i	-4.4904i	-4.1260i	-3.1435i
19	-1.8960i	2.8090i	-2.9643i	-2.1429i	-4.0523i	-2.5654i	-2.3396i	1.7928i	-4.1260i	-3.1435i
20	4.3872i	2.8090i	3.3189i	-2.1429i	2.2309i	-2.5654i	3.9435i	1.7928i	2.1571i	3.1397i

2) 3维 h_S 约束下最短路径规划仿真结果如图5所示. 根据3.3.2节中的障碍物类型, 可分为无限长(闭合)及有限长两种情形.

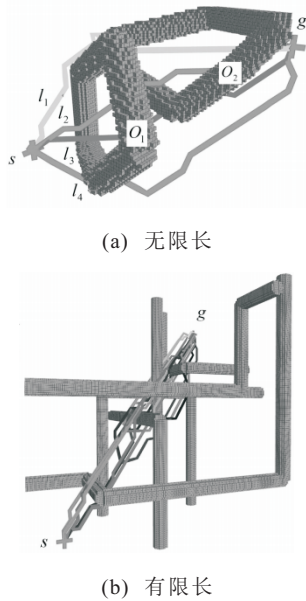


图5 3维空间中不同 h_S 值对应的最短规划路径

5.2 C-空间-GVD- h_S 增广A*算法仿真

5.2.1 h_S 约束下的双车路径规划

基于文献[18]及算法1, 图6给出了C-空间-GVD上双车路径规划的仿真实验. 其中: 无人车 R_1 和 R_2

分别从 s_1 和 s_2 出发到达 g_1 和 g_2 ; 图6(a)、图6(b)中路径 l_1 、 l_2 分别连接两车初始终止位置; 图6(c)中 l_3 及 l_4 分别表示 R_2 和 R_1 在 $h_S(l_3)$ 及 $h_S(l_4)$ 约束下由各自初始点到所对应终止点的最短路径; 图6(d)中 l_5 表示 $h_S(l_4)$ 约束下 R_2 的最短路径, 其满足 $h_S(l_5) = h_S(l_1) + h_S(l_4) + h_S(l_2)$. 由定理11可知 O 上坐标的选取不影响 h_S 的具体取值. 实际中, h_S 约束下的路径规划为解决多车协同规划提供了新的方法. 其中: 图6(c)所示的场景用于解决路径冲突问题; 图6(d)所示的场景用于车辆跟踪.

5.2.2 C-空间-GVD-A*算法与A*算法对比分析

1) 给定初始 $\theta = 0$ 、终止 $\theta = -\pi/2$ 、加加速度 $Jerk(t) = 3\text{ m/s}^3$ 以及 $a(t) = 1\text{ m/s}^2$, 图7(a)、7(b)分别表示由 s_1 到 g_1 行驶用时 66.19 s 和 57.92 s 的A*和C-空间-GVD-A*算法的仿真结果. 由仿真结果可以看出, 对应于区域 C_1 , 图7(a)中 C_1^{A*} 范围内TEB规划的速度曲线 $v(t)$ 的振荡幅度及频率较图7(b)中 C_1^{Vor} 所示同一区域的更大; 同时由转角 $\phi(t)$ 曲线可知该区域内图7(a)所示振荡频率更高, 从而对转轴产生的机械冲击更强. 此外相对于图7(b), 图7(a)中 $v(t)$ 曲线频繁地跨越零值将导致车体高频次地切换前进和后退动作, 故而易增加车体在狭窄区域发生碰撞的风险.

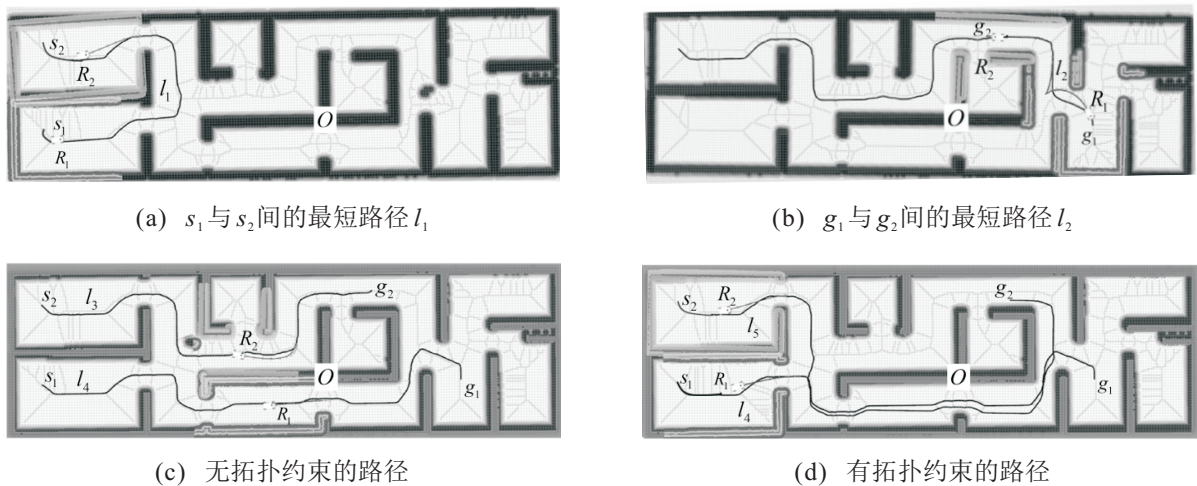


图6 不同情形下的地面无人驾驶双车路径规划

2) 给定初始 $\theta = 0$ 、终止 $\theta = \pi$ 以及与1)相同的 $Jerk(t)$ 和 $a(t)$, 图7(c)、图7(d)分别表示由 s_2 到 g_2 行驶用时 117.24 s 和 94.71 s 的A*和C-空间-GVD-A*算法的仿真结果. 其中区域 C_2 及 C_3 分别对应起始倒车以及穿越狭窄长廊阶段的区域. 首先对应于区域 C_2 的无人车 $v(t)$ 及 $\phi(t)$ 曲线区域分别为 C_2^{A*} 及 C_2^{Vor} , 由图7(c)、图7(d)易看到 C_2^{A*} 标识的区域内 $v(t)$ 及 $\phi(t)$ 较 C_2^{Vor} 区域振荡幅度及频率更高. 其次, 对应于区域

C_3 , 令 T^{A*} 及 T^{Vor} 分别表示无人车在A*算法和C-空间-GVD-A*算法下的穿越时间, 规定当速度偏差 Δv 小于 0.2 m/s 时的穿越时间 T 为平滑穿越时间, 根据图7(a)、图7(b)所对应的穿越时间 $T^{A*} = 38.18\text{ s}$ 和 $T^{Vor} = 37.95\text{ s}$ 以及平滑穿越时间 $T_{smo}^{A*} = 22.42\text{ s}$ 和 $T_{smo}^{Vor} = 36.41\text{ s}$ 可知, 平滑时间对于穿越时间的占比分别为 $\rho_{A*} = 0.587$, $\rho_{Vor} = 0.959$, 因此C-空间-GVD-A*算法有着更好的性能表现.

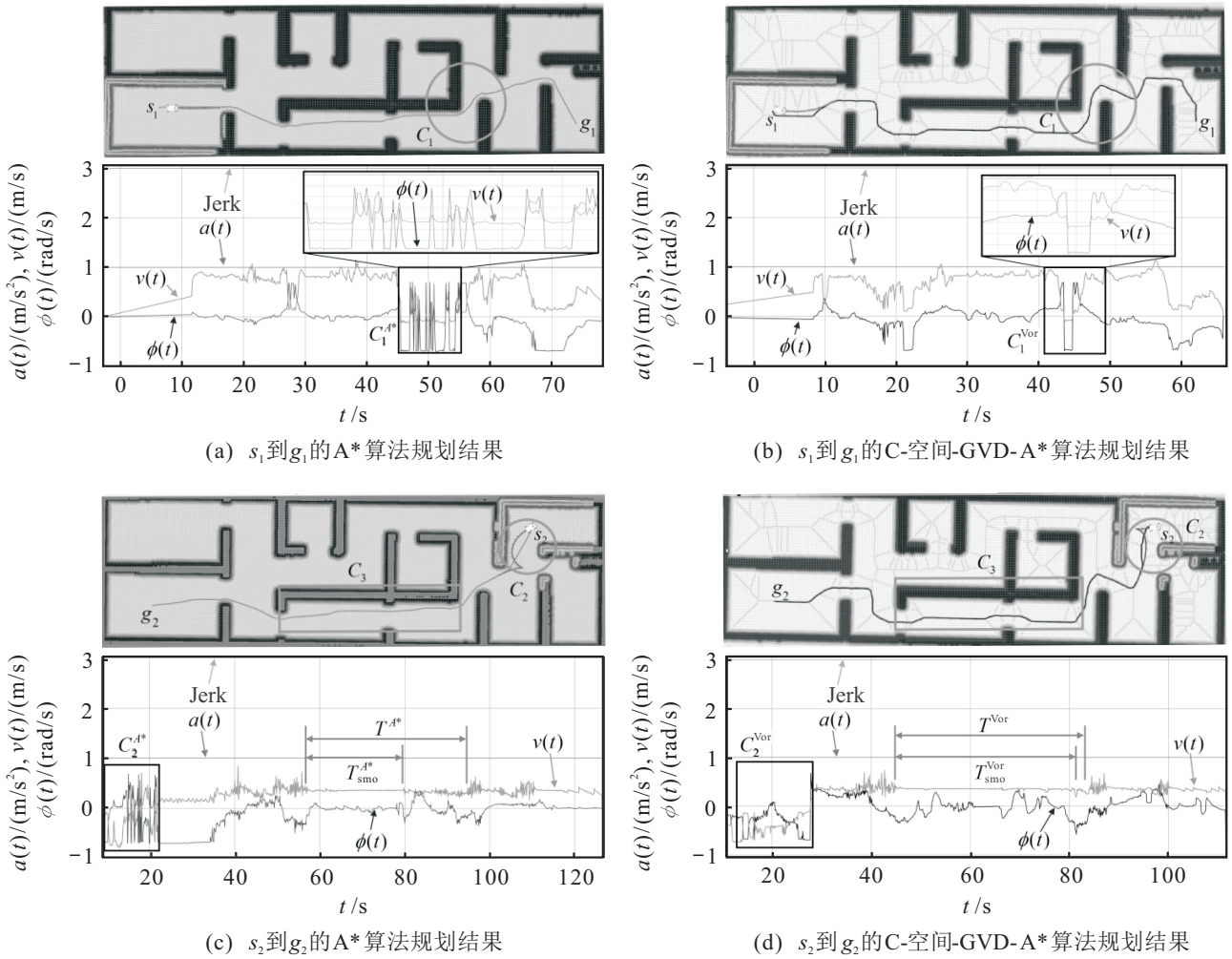


图7 两种情形下C-空间-GVD-A*算法对TEB局部规划的影响

6 结论

本文基于同调及de Rham上同调的相关理论研究了拓扑空间中拓扑分类不变量约束下的路径规划问题. 首先,基于奇异同调和单纯同调说明了离散无向图上路径拓扑分类不变量计算的可行性;其次,利用de Rham上同调和光滑奇异上同调的同构以及紧支Poincaré引理给出了路径拓扑分类不变量积分表示及计算的理论基础;再次,基于拓扑空间的对偶定理及de Rham上同调的Poincaré对偶给出了空间中Delaunay三角网和Voronoi图的对偶及唯一对应关系;最后,通过结合图搜索算法以及 h_S 约束下Voronoi图上的路径拓扑分离特性,给出一种无人驾驶全局路径规划算法——2维C-空间-GVD- h_S 增广A*算法. 通过Gazebo搭建的非结构化环境中地面无人驾驶单车及双车系统,验证了算法的有效性及与现有方法相比的优越性. 多车协同控制问题不仅需解决拓扑约束下的路径冲突问题,还需解决多车编队及跟随中的碰撞问题,本文所提出的算法仅针对空间拓扑信息给出一种解决方案,实际应用时应结合其他可

行方法以得到更好的性能表现^[19-22]. 此外,对于空旷区域亦需进行改进.

参考文献(References)

- [1] Pivtoraiko M, Knepper R A, Kelly A. Differentially constrained mobile robot motion planning in state lattices[J]. Journal of Field Robotics, 2010, 26(3): 308-333.
- [2] Wang Z Y, Zlatanova S, van Oosterom P. Path planning for first responders in the presence of moving obstacles with uncertain boundaries[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2017, 18(8): 2163-2173.
- [3] Zuo L, Guo Q, Xu X, et al. A hierarchical path planning approach based on A and least-squares policy iteration for mobile robots[J]. Neurocomputing, 2015, 170: 257-266.
- [4] Shum A, Morris K, Khajepour A. Direction-dependent optimal path planning for autonomous vehicles[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2015, 70: 202-214.
- [5] Dolgov D, Thrun S, Montemerlo M, et al. Path planning for autonomous vehicles in unknown semi-structured

- environments[J]. The International Journal of Robotics Research, 2010, 29(5): 485-501.
- [6] Bhattacharya S. Towards optimal path computation in a simplicial complex[J]. The International Journal of Robotics Research, 2019, 38(8): 981-1009.
- [7] Candeloro M, Lekkas A M, Sørensen A J. A Voronoi-diagram-based dynamic path-planning system for underactuated marine vessels[J]. Control Engineering Practice, 2017, 61: 41-54.
- [8] Wang Q, Langerwisch M, Wagner B. Wide range global path planning for a large number of networked mobile robots based on generalized voronoi diagrams[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(29): 107-112.
- [9] Ayawli B B K, Appiah A Y, Nti I K, et al. Path planning for mobile robots using Morphological Dilation Voronoi Diagram Roadmap algorithm[J]. Scientific African, 2021, 12: e00745.
- [10] Wei H X, Mao Q, Guan Y, et al. A centroidal Voronoi tessellation based intelligent control algorithm for the self-assembly path planning of swarm robots[J]. Expert Systems With Applications, 2017, 85: 261-269.
- [11] Ma H J, Yang G H, Chen T W. Event-triggered optimal dynamic formation of heterogeneous affine nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(2): 497-512.
- [12] Xu L X, Ma H J, Zhao L N. Distributed event-triggered output-feedback control for sampled-data consensus of multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(6): 3168-3192.
- [13] Zhao L N, Ma H J, Xu L X, et al. Observer-based adaptive sampled-data event-triggered distributed control for multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(1): 97-101.
- [14] Hatcher A. Algebraic topology[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 102-127.
- [15] Bott R, Tu L. Differential forms in algebraic topology[M]. New York: Springer-Verlag, 1982: 13-42.
- [16] Bredon G E. Topology and geometry[M]. Berlin: Springer, 1993: 267-269.
- [17] Lau B, Sprunk C, Burgard W. Efficient grid-based spatial representations for robot navigation in dynamic environments[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2013, 61(10): 1116-1130.
- [18] Albers F, Roesmann C, Hoffmann F, et al. Online trajectory optimization and navigation in dynamic environments in ROS[M]. Cham: Springer, 2019: 241-274.
- [19] Wang X, Yang G H. Fault-tolerant consensus tracking control for linear multiagent systems under switching directed network[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(5): 1921-1930.
- [20] Deng C, Yang G H. Distributed adaptive fault-tolerant control approach to cooperative output regulation for linear multi-agent systems[J]. Automatica, 2019, 103: 62-68.
- [21] Zhu J W, Yang G H, Zhang W A, et al. Cooperative fault tolerant tracking control for multiagent systems: An intermediate estimator-based approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(10): 2972-2980.
- [22] Deng C, Er M J, Yang G H, et al. Event-triggered consensus of linear multiagent systems with time-varying communication delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(7): 2916-2925.

作者简介

刘东升(1995—),男,硕士,从事地面无人驾驶路径规划的研究, E-mail: 17865193659@163.com;

王俊生(1982—),男,副教授,博士生导师,从事无人系统自主控制、数据驱动控制以及故障诊断与容错控制等研究, E-mail: wangjunsheng@ise.neu.edu.cn.

(责任编辑:李君玲)