

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于轨迹集的衍生扩展目标多伯努利滤波算法

杨英壮, 蔡如华, 吴孙勇, 刘锦新

引用本文:

杨英壮, 蔡如华, 吴孙勇, 等. 基于轨迹集的衍生扩展目标多伯努利滤波算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 1024–1034.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1647>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### [基于转换量测容积卡尔曼滤波器带多普勒量测的目标跟踪算法](#)

Converted measurement cubature Kalman filter for Doppler-assisted target tracking  
*控制与决策*. 2021, 36(6): 1425–1434 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1070>

#### [基于Frenet坐标系的自动驾驶轨迹规划与优化算法](#)

Trajectory planning and optimization algorithm for automated driving based on Frenet coordinate system  
*控制与决策*. 2021, 36(4): 815–824 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0748>

#### [有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制](#)

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 599–608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

#### [尺度自适应的多特征融合相关滤波目标跟踪算法](#)

Scale adaptation and multi-feature fusion correlation filtering object tracking algorithm  
*控制与决策*. 2021, 36(2): 429–435 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0445>

#### [具有动态弹性稀疏表示的鲁棒目标跟踪算法](#)

Dynamic elastic net sparse representation robust visual tracking  
*控制与决策*. 2021, 36(11): 2674–2682 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0865>

# 基于轨迹集的衍生扩展目标多伯努利滤波算法

杨英壮<sup>1</sup>, 蔡如华<sup>1</sup>, 吴孙勇<sup>1,2†</sup>, 刘锦新<sup>1</sup>

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004;  
2. 桂林电子科技大学 广西精密导航技术与应用实验室, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 针对扩展目标多伯努利滤波器 (ECBMeMBeR) 在复杂环境下对衍生扩展目标跟踪性能严重下降以及无法提取目标轨迹的问题, 提出一种基于轨迹随机有限集 (Trajectory RFS) 的衍生扩展目标多伯努利滤波算法 (S-TCBMeMBeR)。首先, 利用轨迹多伯努利 RFS (Trajectory MBeR-RFS) 描述多扩展目标的轨迹序列, 从而为扩展目标提供连续的轨迹信息; 其次, 提出一种多伯努利衍生模型, 通过原始扩展目标的航向角与衍生扩展目标的偏转角之间的三角函数关系式建立不同衍生扩展目标的运动方程与动力学转移模型, 从而实现衍生扩展目标质心状态与外形状状态的联合估计; 随后, 基于轨迹 MBeR-RFS 和所提出的多伯努利衍生模型推导并提出 S-TCBMeMBeR 滤波器, 并在线性高斯条件下给出伽玛高斯逆威沙特 (GGIW) 混合实现。仿真结果表明, 所提出算法在杂波、漏检和噪声共存的环境下能够对衍生扩展目标进行有效跟踪, 并提取扩展目标完整的轨迹信息。

**关键词:** 轨迹随机有限集; 衍生扩展目标; 多伯努利; 航向角; 偏转角; 伽玛高斯逆威沙特

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1647

引用格式: 杨英壮, 蔡如华, 吴孙勇, 等. 基于轨迹集的衍生扩展目标多伯努利滤波算法 [J]. 控制与决策, 2025, 40(3): 1024-1034.

## Spawning extended target multi-Bernoulli filtering algorithm based on sets of trajectories

YANG Ying-zhuang<sup>1</sup>, CAI Ru-hua<sup>1</sup>, WU Sun-yong<sup>1,2†</sup>, LIU Jin-xin<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 2. Guangxi Key Laboratory of Precision Navigation Technology and Application, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** In addressing the challenge of degraded tracking performance, particularly when dealing with spawning extended targets and the extraction of target trajectories in complex environments, this paper introduces a spawning extended target cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filtering algorithm based on trajectory random finite set (S-TCBMeMBeR). To enhance the representation of trajectory sequences for multiple extended targets and ensure continuous trajectory information, a trajectory multi-Bernoulli random finite set (Trajectory MBeR-RFS) is first employed. Following this, a multi-Bernoulli spawning model is developed, which establishes the equations of motion and dynamic transition models for different spawning extended targets by leveraging trigonometric equations linking the orientation angle of the original extended target and the deflection angle of the spawning extended target, thus enables joint estimation of the kinematic state and shape state of the spawning extended target. With the integration of the Trajectory MBeR-RFS and the developed multi-Bernoulli spawning model, the S-TCBMeMBeR filter is derived and presented. Additionally, implementations under linear Gaussian conditions, specifically the Gamma Gaussian inverse Wishart (GGIW) mixture, are provided. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm in tracking spawning extended targets and extracting comprehensive trajectory information even in the presence of clutter, missed detection, and noise.

**Keywords:** trajectory random finite set; spawning extended target; multi-Bernoulli; orientation angle; deflection angle; Gamma Gaussian inverse Wishart

收稿日期: 2023-11-27; 录用日期: 2024-07-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62263007, 62161007, 62071389); 广西省科技厅计划项目 (桂科 AA19254029, 桂科 AA19182007); 广西省自然科学基金项目 (2019GXNSFBA245072).

责任编辑: 吴立刚.

†通信作者. E-mail: wusunyong121991@163.com.

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

## 0 引言

扩展目标跟踪 (extended target tracking, ETT)<sup>[1-3]</sup> 是一种处理高分辨率传感器数据的目标跟踪方法, 旨在从点云等数据集中消除一系列噪声干扰, 并提取出目标的运动学参数和外形参数. ETT 面临的一个挑战是如何在复杂环境下 (如高杂波率、低检测概率、密集目标等) 联合估计多个扩展目标的数量和状态, 由于扩展目标通常在单次采样周期内生成多个测量, 如果继续采用传统的联合概率数据关联 (joint probability data association, JPDA)<sup>[4]</sup> 和多假设跟踪 (multi-hypothesis tracking, MHT)<sup>[5]</sup> 等量测关联技术对多扩展目标进行跟踪, 则将大幅增加计算复杂度.

Mahler 等<sup>[6-8]</sup> 继承和发展了随机有限集 (random finite set, RFS) 滤波理论, 有效避免了复杂的数据关联过程, 并提出一系列 RFS 多目标跟踪滤波器, 包括以概率假设密度 (probability hypothesis density, PHD) 滤波器<sup>[9]</sup> 和势概率假设密度 (cardinality PHD, CPHD) 滤波器<sup>[10-11]</sup> 为代表的矩递推滤波和多伯努利 (multi-target multi-Bernoulli, MeMber) 滤波<sup>[6]</sup>. Vo 等<sup>[12]</sup> 在多伯努利滤波的基础上提出解决目标数估计偏差的势平衡多伯努利 (cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli, CBMeMber) 滤波器. 上述 3 种经典滤波器均可以推广至多扩展目标跟踪场景. Granström 等利用随机矩阵 (random matrix, RM)<sup>[13]</sup> 描述扩展目标的外形和量测分布, 并将外形矩阵与量测率结合到 PHD 估计中, 提出了扩展目标 PHD (extended PHD, EPHD) 滤波器<sup>[14]</sup> 和扩展目标 CPHD (extended CPHD, ECPHD) 滤波器<sup>[15]</sup>, 这两种滤波器采用了伽玛高斯逆威沙特 (Gamma Gaussian inverse Wishart, GGIW)<sup>[16]</sup> 分布混合实现. 另外, 连峰等<sup>[17]</sup> 通过引入扩展目标多量测似然函数改进原始 CBMeMber 滤波器的更新步, 提出了扩展目标 CBMeMber (ECBMeMber) 滤波器, 并提供高斯混合 (Gaussian mixture, GM)<sup>[18]</sup> 实现方法. 与 EPHD 和 ECPHD 传递一阶矩不同, ECBMeMber 滤波器直接递推多伯努利参数作为多扩展目标后验密度的近似, 其预测步与原始 CBMeMber 滤波器一致, 更新步在标准扩展目标量测模型的基础上, 采用概率生成泛函推导多伯努利相关参数, 并对目标的势偏差进行修正. 因此, ECBMeMber 滤波过程更加高效, 对扩展目标的状态和数目估计也更为可靠.

然而, 在实际的应用场景中, ECBMeMber 滤波器也存在明显的不足. 由于未对 CBMeMber 滤波器的预测步进行改进, ECBMeMber 滤波器的多目标动力学转移模型只考虑存活扩展目标与新生扩展目

标的递推演化, 从而忽略了扩展目标的衍生事件. 在实际场景中, 扩展目标由于衍生事件会产生各种运动模型与形状尺寸的子目标, 如细胞的无规则有丝分裂<sup>[19]</sup>, 大规模的鱼群跃迁为多个规模不等的鱼群<sup>[20]</sup>, 以及飞机从航母上起飞<sup>[21]</sup> 等, 这类子目标被称为衍生扩展目标 (spawning extended target, SET)<sup>[16,22-23]</sup>. 通常, 衍生扩展目标与原始扩展目标之间的状态存在严格的数学关系. ECBMeMber 滤波器由于未建立相应的衍生扩展目标数学模型, 无法对衍生扩展目标进行有效跟踪.

在目前已有的文献中, 有关衍生扩展目标建模的研究还比较少. 其中, 文献 [16] 提出一种多假设结构, 该结构利用外形矩阵的特征值和特征向量生成多组衍生对假设, 每组衍生对假设包含两种不同运动模式与形状尺寸的衍生扩展目标. 因此, 多假设结构能较为准确地预测衍生扩展目标的种类与数目. 文献 [22-23] 分别引入多假设结构来预测 ECPHD 滤波器和泊松多伯努利 (Poisson multi-Bernoulli, PMB) 滤波器<sup>[24]</sup> 的衍生扩展目标, 并取得良好的跟踪效果. 然而, 多假设结构只有在衍生扩展目标与原扩展目标之间具有足够的距离并且所得量测结果能清晰地反映衍生扩展目标的位置和大小时才能有效发挥作用<sup>[25]</sup>. 为适应更一般的衍生场景, 本文利用原始扩展目标的航向角与衍生扩展目标的偏转角之间的三角函数关系式生成衍生对假设, 并且每个假设采用伯努利进行描述, 从而得到关于衍生扩展目标的多伯努利模型.

此外, ECBMeMber 滤波将多扩展目标的状态参数作为初始化信息, 随后在每个时刻迭代更新状态参数, 并提取出更新后的状态作为目标真实状态的估计值, 这导致过去时刻的状态无法在当前时刻保存, 因此, ECBMeMber 滤波器无法输出任意两个时刻之间的状态序列 (轨迹), 这类多目标跟踪方法也被称为目标 RFS 方法. 为了直接输出轨迹估计值, 文献 [26] 提出了轨迹 RFS 方法, 它是目标 RFS 方法向轨迹集的推广. 受轨迹 RFS 方法的启发, 本文将任意两个时刻之间的多扩展目标状态序列建模为轨迹 RFS, 作为原始 CBMeMber 滤波器的初始化信息并进行迭代更新, 从而可以直接从滤波后验密度中提取多扩展目标的轨迹.

本文首先针对 ECBMeMber 滤波器的衍生扩展目标建模问题, 提出一种基于航向角和偏转角的多伯努利衍生模型. 该模型采用多伯努利 RFS 描述多衍生扩展目标的状态演化, 并利用原始扩展目标的航向角和衍生扩展目标的偏转角两个参数推导了各

衍生扩展目标的质心运动方程和动力学转移模型. 随后, 在系统运动方程与量测方程都满足线性高斯条件下, 基于轨迹 RFS 和多伯努利衍生模型提出了 GGIW 分布混合实现的衍生扩展目标轨迹多伯努利 (spawning extended target trajectory CBMeMber, S-TCBMeMber) 滤波算法. 最后, 通过构造复杂环境下的多衍生扩展目标仿真场景, 验证了 S-TCBMeMber 算法能有效克服 ECBMeMber 算法的不足, 对衍生扩展目标的数目和状态都能进行准确估计, 并输出扩展目标完整的轨迹信息.

## 1 背景模型

### 1.1 扩展目标系统模型

单扩展目标的状态表示为  $\xi = (\gamma, x, E)$ . 其中:  $\gamma > 0$  为量测率, 表示目标在每个时间步长生成量测数的均值;  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  为扩展目标的质心状态向量 (包括速度、加速度、转弯率等),  $n_x$  表示状态向量的维数,  $\mathbb{R}^{n_x}$  表示  $n_x \times 1$  维实向量空间;  $E \in \mathbb{S}_{++}^d$  为扩展目标的外形矩阵,  $d$  表示外形矩阵维数,  $\mathbb{S}_{++}^d$  表示  $d$  维实对称正定矩阵空间. 在  $k$  时刻, 扩展目标的运动系统<sup>[13-16]</sup>建模为如下线性高斯方程:

$$x_{k+1} = F_{k+1|k}x_k + w_{k+1}, \quad (1a)$$

$$w_{k+1} \sim \mathcal{N}(\cdot; 0, Q_{k+1|k} \otimes E_{k+1}). \quad (1b)$$

其中:  $\mathcal{N}(\cdot; m, P)$  表示均值为  $m$ 、协方差为  $P$  的高斯分布,  $F_{k+1|k}$  表示质心状态转移矩阵,  $w_{k+1}$  为过程噪声,  $Q_{k+1|k} \otimes E_{k+1}$  表示与外形相关的过程噪声协方差矩阵. 假设扩展目标  $\xi$  以概率  $p_{k+1}^s(\cdot)$  和密度  $\pi^\xi(\cdot|\xi)$  存活至  $k+1$  时刻, 其中  $p_{k+1}^s(\cdot)$  称为存活概率,  $\pi^\xi(\cdot|\xi)$  称为状态转移密度.

同样地, 扩展目标的观测系统<sup>[14]</sup>也满足线性高斯条件:

$$z_{k+1} = (H_{k+1})x_k + v_{k+1}, \quad (2a)$$

$$v_{k+1} \sim \mathcal{N}(\cdot; 0, R_{k+1} \otimes E_{k+1}). \quad (2b)$$

其中:  $z_{k+1}$  为扩展目标在  $k+1$  时刻产生的单个量测,  $H_{k+1}$  为量测转移矩阵,  $v_{k+1}$  为量测噪声,  $R_{k+1} \otimes E_{k+1}$  为量测噪声协方差矩阵. 假设扩展目标以概率  $p_{D,k+1}(\cdot)$  和密度  $\phi(z|\cdot)$  产生单个量测. 其中:  $p_{D,k+1}(\cdot)$  为传感器检测概率,  $\phi(z|\cdot)$  为单量测似然函数.

### 1.2 轨迹 RFS

假设扩展目标  $\xi$  的出生时间为  $\varepsilon$ , 从出生时刻到当前时刻  $k$  运动所得状态序列长度为  $\ell$ , 根据轨迹状态模型<sup>[27]</sup>, 扩展目标在时刻  $\varepsilon$  到时刻  $k$  之间的轨迹状态可定义为变量  $X = (\varepsilon, \xi^{1:\ell})$ , 其中  $\xi^{1:\ell} = (\xi^1, \dots, \xi^\ell)$  为扩展目标状态序列. 扩展目标的状态序列长度

$\ell$  与时刻  $\varepsilon$  和  $k$  之间存在如下关系:

$$\ell = \begin{cases} k' - \varepsilon + 1, & \varepsilon \leq k' < k; \\ k - \varepsilon + 1, & k' \geq k. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $k'$  为扩展目标的死亡时间.

利用 RFS 可将  $k$  时刻所有存活扩展目标的轨迹状态表示为

$$\mathbf{X}_k = \{X_{k,1}, \dots, X_{k,M_k}\}, \quad (4)$$

$\mathbf{X}_k$  即为轨迹 RFS, 其中  $M_k$  表示  $k$  时刻扩展目标轨迹数. 根据集合  $\mathbf{X}_k$  中所含元素数, 可将轨迹 RFS 分为以下两类:

1) 轨迹伯努利 RFS. 集合  $\mathbf{X}_k$  中至多含有一个扩展目标轨迹, 其联合概率密度表示为

$$f(\mathbf{X}_k) = \begin{cases} 1 - r, & \mathbf{X}_k = \emptyset; \\ rp(X), & \mathbf{X}_k = \{X\}. \end{cases} \quad (5)$$

其中  $r$  为单扩展目标的存在概率,  $p(X)$  为  $f(\mathbf{X}_k)$  的边缘概率密度, 因此  $f(\mathbf{X}_k)$  可参数化表示为  $f(\mathbf{X}) = (r, p(X))$ .

2) 轨迹多伯努利 RFS. 集合  $\mathbf{X}_k$  中含有多个扩展目标轨迹, 轨迹多伯努利 RFS 可视为一组数量恒定并且相互独立的轨迹伯努利 RFS 的并集. 因此, 集合  $\mathbf{X}_k$  可另表示为  $\mathbf{X}_k = \biguplus_{i=1}^{M_k} \mathbf{X}_k^i$ . 其中:  $\mathbf{X}_k^i$  表示第  $i$  个轨迹伯努利 RFS 并由参数  $(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(X_i))$  描述,  $\biguplus$  表示多个不相交集合并集. 进一步地,  $\mathbf{X}_k$  的联合概率密度可参数化表示为  $f(\mathbf{X}_k) = \{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(X_i))\}_{i=1}^{M_k}$ .

## 2 多伯努利衍生模型

本文以图 1 示例说明所提出多伯努利衍生模型. 在图 1 中, 原始扩展目标 (橙色椭圆) 在公共直角坐标系  $Oxy$  下的质心状态为  $x_k = [p_k, v_k]^T$ . 其中: 位置矢量  $p_k = [p_{x,k}, p_{y,k}]$ , 速度矢量  $v_k = [v_{x,k}, v_{y,k}]$ , 航向角为  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . 局部直角坐标系  $x_k v_k \omega_k$  将原始扩展目标的衍生区域划分为象限 I、II、III、IV 四个部分. 理论上, 这 4 个部分都可能出现衍生扩展目标. 然而, 在实际场景下, 衍生扩展目标与原始扩展目标

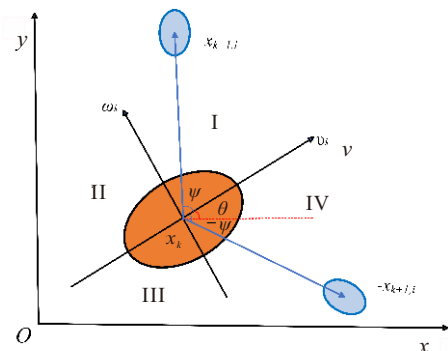


图1 多伯努利衍生模型示例

在新生初始阶段的轨迹相近<sup>[16]</sup>, 两者速度方向的夹角(偏转角)的绝对值不超过 $\pi/2$  rad.

本文只考虑象限 I 和象限 IV 区域中的衍生扩展目标. 在 $k+1$ 时刻, 原始扩展目标在象限 I 区域产生的第 $i$ 个衍生扩展目标(图 1 右上方蓝色椭圆)在直角坐标系  $Oxy$  下的质心状态为 $x_{k+1,i} = [p_{k+1,i}, v_{k+1,i}]^T$ , 位置矢量 $p_{k+1,i} = [p_{x,k+1,i}, p_{y,k+1,i}]$ , 速度矢量 $v_{k+1,i} = [v_{x,k+1,i}, v_{y,k+1,i}]$ , 偏转角为 $0 \leq \psi \leq \pi/2$ , 因此, 该衍生扩展目标的航向角为 $\theta + \psi$ .

### 2.1 衍生扩展目标运动方程

在直角坐标系  $Oxy$  下, 原始扩展目标的航向角与它的速度矢量之间满足三角函数关系式:

$$v_{x,k} = |v_k| \cos \theta, \quad v_{y,k} = |v_k| \sin \theta, \quad (6)$$

其中 $|v_k|$ 表示原始扩展目标速度矢量的大小. 同样地, 衍生扩展目标的航向角与它的速度矢量之间也存在如下三角函数关系式:

$$\begin{aligned} v_{x,k+1,i} &= |v_{k+1,i}| \cos(\theta + \psi), \\ v_{y,k+1,i} &= |v_{k+1,i}| \sin(\theta + \psi). \end{aligned} \quad (7)$$

假设衍生扩展目标与原始扩展目标在新生初始时刻的速度矢量大小相等, 即 $|v_{k+1,i}| = |v_k|$ . 根据这一假设以及式 (6) 和 (7), 可得到衍生扩展目标与原始扩展目标质心状态之间的数学关系式.

**定理 1** 在考虑系统过程噪声干扰的前提下, 单次采样周期内衍生扩展目标与原始扩展目标之间的质心状态满足如下数学关系式:

$$x_{k+1,i} = (F_{k+1|k,i})x_k^T + w_{k+1,i}. \quad (8)$$

其中: $w_{k+1,i}$ 表示象限 I 区域第 $i$ 个衍生扩展目标质心状态的过程噪声, 假设 $w_{k+1,i}$ 为零均值高斯白噪声, 并且协方差矩阵为 $Q_{k+1|k,i} \otimes E_{k+1,i}$ ;  $F_{k+1|k,i}$ 为象限 I 区域第 $i$ 个衍生扩展目标的质心状态转移矩阵.

1) 当 $\theta \neq n\pi$ 且 $\theta \neq m\pi/2$ 时,有

$$F_{k+1|k,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\cos(\theta+\psi)}{\sin \theta} T_s \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\theta+\psi)}{\cos \theta} T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(\theta+\psi)}{\sin \theta} \\ 0 & 0 & \frac{\sin(\theta+\psi)}{\cos \theta} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

其中:  $T_s$ 表示单次采样的时间间隔,  $n \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $m \in \{-1, 1\}$ .

2) 当 $\theta = n\pi$ 时,有

$$F_{k+1|k,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_s \cos \psi & 0 \\ 0 & 1 & T_s \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \psi & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

3) 当 $\theta = m\pi/2$ 时,有

$$F_{k+1|k,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -T_s \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 & T_s \cos \psi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (11)$$

式 (8) 即为象限 I 区域中衍生扩展目标的质心运动方程. 由于象限 IV 与象限 I 关于局部直角坐标系 $x_k v_k \omega_k$ 的横坐标对称, 象限 IV 区域中的衍生扩展目标(图 1 右下方蓝色椭圆)等价于象限 I 区域中的衍生扩展目标偏转角取负数的情况. 因此, 该区域中衍生扩展目标的质心运动方程仍然满足式 (8).

### 2.2 衍生扩展目标动力学转移模型

根据式 (9) ~ (11), 衍生扩展目标的质心运动方程由航向角 $\theta$ 和偏转角 $\psi$ 两个参数共同确定. 原始扩展目标的航向角 $\theta$ 与速度矢量 $v_k$ 之间满足数学关系式 $\theta = \text{atan2}(v_{x,k}, v_{y,k})$ , 因此, 在滤波过程中原始目标的航向角可通过速度矢量进行估计. 然而, 衍生扩展目标的偏转角为未知变量, 只能预设. 因此, 偏转角的预设值将直接影响到衍生扩展目标状态的估计. 本文通过设置多组不同的预设值来生成衍生扩展目标的多个轨迹伯努利 RFS, 并在滤波后选取权重最大的轨迹伯努利 RFS 作为衍生扩展目标状态的估计结果.

先将象限 I 的角度均分为 $O$ 份, 得到象限 I 中衍生扩展目标偏转角的预设值集合 $\psi = \left\{ \frac{\pi}{2O} m, m = 1, 2, \dots, O \right\}$ . 然后将集合 $\psi$ 中的预设值取负号, 得到象限 IV 中衍生扩展目标偏转角的预设值集合 $\lambda = \left\{ -\frac{\pi}{2O} m, m = 1, 2, \dots, O \right\}$ . 集合 $\psi$ 和 $\lambda$ 中的每个预设值对应一个衍生扩展目标轨迹伯努利 RFS. 因此, 一共可得 $2O$ 个衍生扩展目标轨迹伯努利 RFS, 表示为轨迹多伯努利集合 $\mathbf{X}_{k+1}^S = \bigcup_{m=1}^{2O} \mathbf{X}_{k+1,m}^S$ . 其中: 假设每个轨迹伯努利 RFS 的衍生概率为 $p_{k+1,m}^S(\cdot)$ , 状态转移密度为 $\pi_m^S(\cdot|\xi)$ . 记 $k$ 时刻的原始扩展目标为伯努利 RFS  $\mathbf{X}_k$ , 则 $k+1$ 时刻, 衍生扩展目标的动力学转移模型可表示为

$$\pi_{k+1|k}^S(\mathbf{X}_{k+1}^S | \mathbf{X}_k) = \prod_{m=1}^{2O} \pi_{k+1,m}^S(\mathbf{X}_{k+1,m}^S | \mathbf{X}_k). \quad (12a)$$

$$\pi_{k+1,m}^S(\mathbf{X}_{k+1,m}^S | \mathbf{X}_k) =$$

$$\begin{cases} 1, \mathbf{X}_{k+1,m}^S = \emptyset, \mathbf{X}_k = \emptyset; \\ 1 - P_{k+1,m}^S(\xi^{\ell_{X'}}), \mathbf{X}_{k+1,m}^S = \emptyset, \mathbf{X}_k = \{X'\}; \\ P_{k+1,m}^S(\xi^{\ell_{X'}})\pi_{k+1,m}^S(X|X'), \\ \quad \mathbf{X}_{k+1,m}^S = \{X\}, \mathbf{X}_k = \{X'\}; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases} \quad (12b)$$

其中:  $\pi_{k+1,m}^S(X|X')$ 表示轨迹 $X$ 到衍生轨迹 $X'$ 的转移密度,有

$$\pi_{k+1,m}^S(X|X') = \pi_m^\xi(\xi^{\ell_X} | \xi^{\ell_{X'}}) \delta_{X'}(\varepsilon_X, \xi^{1:\ell_X-1}), \quad (13)$$

$\delta(\cdot)$ 表示狄拉克函数.

### 3 衍生扩展目标轨迹多伯努利滤波器

#### 3.1 S-TCBMeMber 预测

采用轨迹多伯努利RFS描述多扩展目标轨迹的递推演化.假设 $k$ 时刻的多扩展目标轨迹后验密度参数化表示为

$$f_k(\mathbf{X}_k) = \{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(X_i'))\}_{i=1}^{M_k}, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{X}_k = \bigcup_{i=1}^{M_k} \mathbf{X}_k^i$ ,且 $\mathbf{X}_k^i$ 表示第 $i$ 个扩展目标轨迹伯努利RFS.

$k+1$ 时刻的多扩展目标轨迹包括新生、存活与衍生3个部分,即 $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_{\Gamma,k+1} \cup \mathbf{X}_{P,k+1} \cup \mathbf{X}_{S,k+1}$ .通过引入衍生扩展目标动力学转移模型(12a),可得 $k+1$ 时刻多扩展目标轨迹动力学转移密度

$$\begin{aligned} f_{k+1|k}(\mathbf{X}_{\Gamma,k+1} \cup \mathbf{X}_{P,k+1} \cup \mathbf{X}_{S,k+1} | \mathbf{X}_k) = \\ f_{k+1}(\mathbf{X}_{\Gamma,k+1}) f_{k+1|k}(\mathbf{X}_{P+1,k} | \mathbf{X}_k) f_{k+1|k}(\mathbf{X}_{S+1,k} | \mathbf{X}_k) = \\ f_{k+1}(\mathbf{X}_{\Gamma,k+1}) \prod_{i=1}^{M_k} \pi_{k+1|k}(\mathbf{X}_{k+1}^i | \mathbf{X}_k^i) \pi_{k+1|k}^S(\mathbf{X}_{k+1}^{i,S} | \mathbf{X}_k^i). \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $\pi_{k+1|k}(\mathbf{X}_{k+1}^i | \mathbf{X}_k^i)$ 表示第 $i$ 个存活扩展目标轨迹转移密度,具体表达式与(12b)一致,只需将 $p_{k+1,m}^S(\cdot)$ 、 $\pi_m^\xi(\cdot|\xi)$ 替换为 $p_{k+1}^S(\cdot)$ 、 $\pi^\xi(\cdot|\xi)$ .

**定理2**  $k+1$ 时刻预测所得的多扩展目标轨迹多伯努利后验密度等于 $k$ 时刻多扩展目标轨迹多伯努利后验密度(14)和多扩展目标轨迹动力学转移密度(15)之间的内积,所得结果参数化表示为

$$\begin{aligned} f_{k+1|k} = \{(r_{P,k+1|k}^{(i)}, p_{P,k+1|k}^{(i)}(X_i))\}_{i=1}^{M_k} \cup \\ \{(r_{S,k+1|k}^{(im)}, p_{S,k+1|k}^{(im)}(X_{i_m}))\}_{m=1}^{2O} \}_{i=1}^{M_k} \cup \\ \{(r_{\Gamma,k+1}^{(i)}, p_{\Gamma,k+1}^{(i)}(X_{\Gamma,i}))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k+1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$r_{P,k+1|k}^{(i)} = r_k^{(i)} \langle p_k^{(i)}(X_i'), p_{k+1}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle, \quad (17a)$$

$$p_{P,k+1|k}^{(i)}(X_i) =$$

$$\frac{\langle \pi_{k+1|k}(X_i | X_i'), p_k^{(i)}(X_i') p_{k+1}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle}{\langle p_k^{(i)}(X_i'), p_{k+1}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle}, \quad (17b)$$

$$r_{S,k+1|k}^{(im)} = r_k^{(i)} \langle p_k^{(i)}(X_i'), p_{k+1,m}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} p_{P,k+1|k}^{(i)}(X_i) = \\ \frac{\langle \pi_{k+1|k,m}(X_{i_m} | X_i'), p_k^{(i)}(X_i') p_{k+1,m}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle}{\langle p_k^{(i)}(X_i'), p_{k+1,m}^S(\xi^{\ell_{X'}}) \rangle}, \end{aligned} \quad (18b)$$

$i_m = m + M_k + 2(i-1)$   $O$ 代表第 $i$ 个扩展目标产生的第 $m$ 个衍生扩展目标轨迹索引.

#### 3.2 S-TCBMeMber 更新

由于单个扩展目标在更新阶段会生成多个量测,需要对 $k+1$ 时刻传感器接收到的所有量测进行划分.本文采用距离划分(distance partitioning, DP)<sup>[14]</sup>方法,通过设置不同的距离阈值对扩展目标量测进行距离聚类,从而得到不同的量测分区.假设所有量测分区构成集合 $\varphi$ ,其中 $P \in \varphi$ 为集合 $\varphi$ 中的一个量测分区; $W \subseteq Z_{k+1}$ 为量测分区 $P$ 中的一个量测元胞,其中包含多个量测数据.

其次,引入扩展目标多量测似然函数<sup>[14-16]</sup>,具体表达式为

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_W(\xi) = \\ \begin{cases} 1 - p_{D,k+1}(\xi) + p_{D,k+1}(\xi) e^{-\gamma(\xi)}, & W = \emptyset; \\ p_{D,k+1}(\xi) e^{-\gamma(\xi)} \prod_{z \in W} \gamma(\xi) \frac{\phi(z|\xi)}{\lambda c_{k+1}(z)}, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

其中: $\gamma(\xi)$ 为扩展目标量测率, $\phi(z|\xi)$ 为单量测似然函数, $\lambda$ 为杂波率, $c_{k+1}(z)$ 为杂波密度.

**定理3** 给定 $k+1$ 时刻单传感器接收到的量测集 $Z_{k+1}$ 以及多量测似然函数(19),并假设预测所得的多扩展目标轨迹多伯努利后验密度为

$$f_{k+1|k} = \{(r_{k+1|k}^{(i)}, p_{k+1|k}^{(i)}(X_i))\}_{i=1}^{M_{k+1|k}}, \quad (20)$$

则 $k+1$ 时刻更新所得的多扩展目标轨迹后验密度可估计为如下多伯努利形式:

$$\begin{aligned} f_{k+1} = \\ \{(r_{L,k+1}^{(i)}, p_{L,k+1}^{(i)}(X_i))\}_{i=1}^{M_{k+1|k}} \cup \\ \{\bigcup_{P \in \varphi} \{(r_{U,k+1}(W), p_{U,k+1}(X;W))\}_{W \in P}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

第1部分表示漏检扩展目标的轨迹多伯努利参数,有

$$\begin{aligned} r_{L,k+1}^{(i)} = r_{k+1|k}^{(i)} \frac{1 - \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle} = \\ r_{k+1|k}^{(i)} \frac{1 - \bar{p}_{D,k+1}}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \bar{p}_{D,k+1}}, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$p_{L,k+1}^{(i)}(X_i) = \frac{p_{k+1|k}^{(i)}(X_i)(1 - \bar{p}_{D,k+1})}{1 - \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle} = \frac{p_{k+1|k}^{(i)}(X_i)(1 - \bar{p}_{D,k+1})}{1 - \bar{p}_{D,k+1}} = p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \quad (22b)$$

其中  $\bar{p}_{D,k+1} = p_{D,k+1}(\xi)(1 - e^{-\gamma})$  为扩展目标有效检测概率。

第 2 部分表示量测校正更新的扩展目标轨迹多伯努利 RFS 参数, 有

$$r_{U,k+1}(W) = \frac{w_P}{d_W} \sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)}(1 - r_{k+1|k}^{(i)}) \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \mathfrak{S}_W(\xi^{\ell_{X_i}}) \rangle}{(1 - r_{k+1|k}^{(i)}) \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle}, \quad (23a)$$

$$p_{U,k+1}(X; W) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)} p_{k+1|k}^{(i)}(X_i) \mathfrak{S}_W(\xi^{\ell_{X_i}})}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle}}{\sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \mathfrak{S}_W(\xi^{\ell_{X_i}}) \rangle}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle}}. \quad (23b)$$

其中:  $w_P$  为每个量测分区对应的权重,  $d_W$  为每个量测元胞对应的权重, 它们的具体表达式分别为

$$w_P = \frac{\prod_{W \in P} d_W}{\sum_{P \in \wp} \prod_{W \in P} d_W}, \quad (24a)$$

$$d_W = \delta_{|W|}(1) + \sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \mathfrak{S}_W(\xi^{\ell_{X_i}}) \rangle}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \langle p_{k+1|k}^{(i)}(X_i), \bar{p}_{D,k+1} \rangle}. \quad (24b)$$

### 3.3 GGIW 分布混合实现

为推导出 S-TCBMeMber 滤波的闭式解, 本文在系统状态方程和量测方程均满足线性高斯条件下, 采用 GGIW 分布混合<sup>[13]</sup> 进行实现. GGIW 分布采用伽玛分布<sup>[27]</sup>、高斯分布<sup>[18]</sup> 和逆威沙特分布<sup>[28]</sup> 分别描述扩展目标的量测率、质心运动状态和外形矩阵, 通过多个带权重的 GGIW 分布求和近似扩展目标的概率密度, 可提高扩展目标状态的估计精度. 然而, GGIW 分布仅限于扩展目标的状态, 无法对扩展目标轨迹进行描述.

本文进一步推导并提出扩展目标轨迹概率密度的 GGIW 分布混合. 由第 1.2 节易知, 扩展目标的轨迹  $X$  由出生时间  $\varepsilon$ 、状态序列长度  $\ell$  以及状态序列  $\xi^{1:\ell}$  共同表征. 在状态序列的各状态之间相互独立的前提下, 第  $i$  个扩展目标的轨迹  $X$  的概率密度可近似为如下 GGIW 分布混合:

$$p^{(i)}(X) \approx \sum_{j=1}^{J^i} \omega^{i,j} \text{GGIW}(X; \bar{\varepsilon}^{i,j}, \bar{\ell}^{i,j}, \Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}). \quad (25a)$$

$$\text{GGIW}(X; \bar{\varepsilon}^{i,j}, \bar{\ell}^{i,j}, \Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}) = \begin{cases} \prod_{\vartheta=1}^{\bar{\ell}^{i,j}} \text{GGIW}(\xi^{\vartheta}; \Theta_{i,j}^{\vartheta}), & \delta_{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}^{i,j}) = 1, \delta_{\ell}(\bar{\ell}^{i,j}); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (25b)$$

其中:  $\omega^{i,j}$ 、 $\bar{\varepsilon}^{i,j}$ 、 $\bar{\ell}^{i,j}$  分别表示第  $i$  个扩展目标第  $j$  个 GGIW 分量对应的权重、出生时刻和状态序列长度. 为方便递归估计, 采用变量  $\Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}} = \{\alpha_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}, \beta_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}, m_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}, P_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}, v_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}, V_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}\}$  对轨迹序列的 GGIW 参数进行存储. 其中:  $\Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}^{i,j}}$  表示长度为  $\bar{\ell}^{i,j}$  的轨迹序列,  $\alpha_{i,j}$ 、 $\beta_{i,j}$  为伽玛分布的形状参数和逆尺度参数,  $m_{i,j}$ 、 $P_{i,j}$  为高斯分布的均值和协方差矩阵,  $v_{i,j}$ 、 $V_{i,j}$  为逆威沙特分布的自由度和逆尺度矩阵.

此外, 为保持滤波器递推过程中多伯努利密度对 GGIW 分布混合的封闭性, 假设系统中的存活概率、衍生概率以及检测概率与扩展目标状态相互独立. 算法实现流程如图 2 所示, 具体步骤如下.

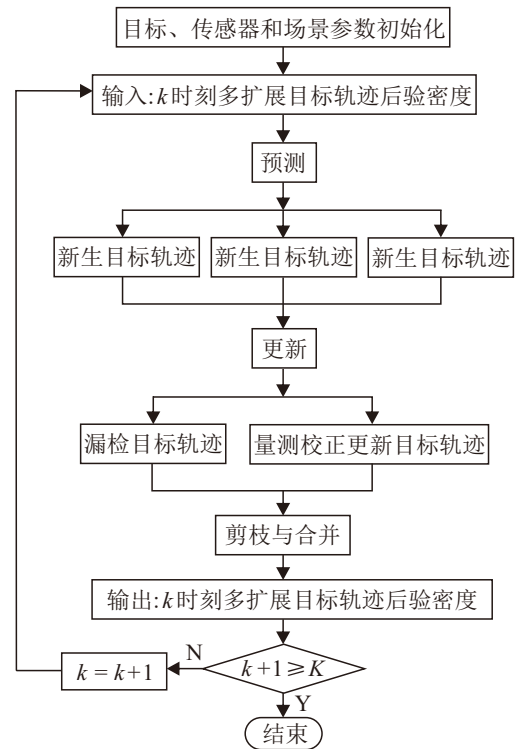


图2 算法流程

step 1: 输入正整数  $O$  以及  $k$  时刻多扩展目标轨迹后验密度  $f_k = \{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(X_i'))\}_{i=1}^{M_k}$ , 其中第  $i$  个扩展目标的轨迹概率密度采用 GGIW 分布混合近似

$$p_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{J^i} \omega_k^{i,j} \text{GGIW}(X_i'; \bar{\varepsilon}_k^{i,j}, \bar{\ell}_k^{i,j}, \Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}_k^{i,j}}). \quad (26)$$

step 2: 对  $k$  时刻多扩展目标轨迹后验密度进行预测, 得到  $k+1$  时刻多扩展目标轨迹后验密度 (17)、(18), 其中:

1) 新生扩展目标轨迹概率密度

$$p_{\Gamma,k+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{J_{\Gamma,k+1}^i} \omega_{\Gamma,k+1}^{i,j} \text{GGIW}(X_{\Gamma,i}; \bar{\varepsilon}_{\Gamma,k+1}^{i,j}, \bar{\ell}_{\Gamma,k+1}^{i,j}, \Theta_{\Gamma,i,j}^{1:\bar{\ell}_{\Gamma,k+1}^{i,j}}), \quad (27a)$$

$$\omega_{\Gamma,k+1}^{i,j} = 1, \quad \bar{\varepsilon}_{\Gamma,k+1}^{i,j} = k+1, \quad \bar{\ell}_{\Gamma,k+1}^{i,j} = 1, \quad (27b)$$

$$\Theta_{\Gamma,i,j}^{1:\bar{\ell}_{\Gamma,k+1}^{i,j}} = \{\alpha_{\Gamma,i,j}^1, \beta_{\Gamma,i,j}^1, m_{\Gamma,i,j}^1, P_{\Gamma,i,j}^1, v_{\Gamma,i,j}^1, V_{\Gamma,i,j}^1\}. \quad (27c)$$

2) 存活扩展目标轨迹存在概率与概率密度

$$r_{P,k+1|k}^{(i)} = r_k^{(i)} p_{k+1}^S, \quad (28a)$$

$$p_{P,k+1|k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{J_k^i} \omega_{P,k+1|k}^{i,j} \text{GGIW}(X_i; \bar{\varepsilon}_{P,k+1|k}^{i,j}, \bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}, \Theta_{P,i,j}^{1:\bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}}), \quad (28b)$$

$$\omega_{P,k+1|k}^{i,j} = \omega_k^{i,j}, \quad \bar{\varepsilon}_{P,k+1|k}^{i,j} = \bar{\varepsilon}_k^{i,j}, \quad \bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j} = \bar{\ell}_k^{i,j} + 1, \quad (28c)$$

$$\Theta_{P,i,j}^{1:\bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}} = \delta_{\Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}_k^{i,j}}} (\Theta_{P,i,j}^{1:\bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}})^{-1} \times \Theta_{P,i,j}^{\bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}}, \quad (28d)$$

$$\Theta_{P,i,j}^{\bar{\ell}_{P,k+1|k}^{i,j}} = u_p(\Theta_{i,j}^{\bar{\ell}_k^{i,j}}, F_{k+1|k}, Q_{k+1|k}). \quad (28e)$$

3) 衍生扩展目标轨迹存在概率与概率密度

$$r_{S,k+1|k}^{(i_m)} = r_k^{(i)} p_{k+1,m}^S, \quad (29a)$$

$$p_{S,k+1|k}^{(i_m)} = \sum_{j=1}^{J_k^i} \omega_{S,k+1|k}^{i_m,j} \text{GGIW}(X_{i_m}; \bar{\varepsilon}_{S,k+1|k}^{i_m,j}, \bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}, \Theta_{S,i_m,j}^{1:\bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}}), \quad (29b)$$

$$\omega_{S,k+1|k}^{i_m,j} = \omega_k^{i,j}, \quad \bar{\varepsilon}_{S,k+1|k}^{i_m,j} = k+1, \quad \bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j} = \bar{\ell}_k^{i,j}, \quad (29c)$$

$$\Theta_{S,i_m,j}^{1:\bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}} = \delta_{\Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}_k^{i,j}}} (\Theta_{S,i_m,j}^{1:\bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}})^{-1} \times \Theta_{S,i_m,j}^{\bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}}, \quad (29d)$$

$$\Theta_{S,i_m,j}^{\bar{\ell}_{S,k+1|k}^{i_m,j}} = u_p(\Theta_{i,j}^{\bar{\ell}_k^{i,j}}, F_{k+1|k,m}, Q_{k+1|k,m}). \quad (29e)$$

经过 step 2 预测后, 总计可得  $M_{k+1|k} = M_k + M_{S,k+1} + M_{\Gamma,k+1}$  个扩展目标轨迹, 其中衍生扩展目标的轨迹数为  $M_{S,k+1} = 2M_k O$ .

step 3: 更新.

经 step 2 预测后的多扩展目标轨迹后验密度, 其形式统一为  $f_{k+1|k} = \{(r_{k+1|k}^{(i)}, p_{k+1|k}^{(i)}(X_i))\}_{i=1}^{M_{k+1|k}}$ ,

其中

$$p_{k+1|k}^{(i)}(X_i) = \sum_{j=1}^{J_{k+1|k}^i} \omega_{k+1|k}^{i,j} \text{GGIW}(X_i; \bar{\varepsilon}_{k+1|k}^{i,j}, \bar{\ell}_{k+1|k}^{i,j}, \Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}_{k+1|k}^{i,j}}). \quad (30)$$

利用  $k+1$  时刻接收到的量测集  $Z_{k+1}$  对预测密度进行校正, 得到  $k+1$  时刻更新所得的多扩展目标轨迹后验密度 (21), 其中:

1) 漏检扩展目标轨迹存在概率与概率密度

$$r_{L,k+1}^{(i)} = r_{k+1|k}^{(i)} \frac{1 - \bar{p}_{D,k+1}}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \bar{p}_{D,k+1}} = r_{k+1|k}^{(i)} \frac{1 - p_{D,k+1}(1 - e^{-\gamma})}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} p_{D,k+1}(1 - e^{-\gamma})}, \quad (31)$$

$$p_{L,k+1}^{(i)}(X_i) = p_{k+1|k}^{(i)}(X_i). \quad (32)$$

2) 量测校正更新的扩展目标轨迹存在概率与概率密度

$$r_{U,k+1}(W) = \frac{w_P}{d_W} \sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)} (1 - r_{k+1|k}^{(i)}) \rho_{U,k+1}^{(i)}(W)}{(1 - r_{k+1|k}^{(i)} \bar{p}_{D,k+1})^2}, \quad (33)$$

$$p_{U,k+1}(X; W) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \sum_{j=1}^{J_{k+1|k}^i} \omega_{U,k+1}^{(i,j)}(W) \text{GGIW}(X; \bar{\varepsilon}_{U,k+1}^{i,j}, \bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}, \Theta_{U,i,j}^{1:\bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}})}{\sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \sum_{j=1}^{J_k^i} \omega_{U,k+1}^{(i,j)}(W)}. \quad (34)$$

其中

$$d_W = \delta_{|W|}(1) + \sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \frac{r_{k+1|k}^{(i)} \rho_{U,k+1}^{(i)}(W)}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} \bar{p}_{D,k+1}}, \quad (35a)$$

$$\rho_{U,k+1}^{i,j}(W) = p_{D,k+1} e^{-\gamma} \sum_{j=1}^{J_{k+1|k}^i} \omega_{k+1|k}^{i,j} \times \prod_{z \in W} \frac{\gamma \mathcal{N}(z; \mathcal{H}_{\|\infty\|}, \hat{\bar{\ell}}_{i,j}^{\|\infty\|})}{\lambda c_{k+1}(z) + \mathcal{R}_{\|\infty\|}}, \quad (35b)$$

$$\omega_{U,k+1}^{i,j}(W) = \frac{r_{k+1|k}^{(i)} \omega_{k+1|k}^{i,j} \mathfrak{S}_W(\xi^{\ell X_i})}{1 - r_{k+1|k}^{(i)} p_{D,k+1}(1 - e^{-\gamma})}, \quad (35c)$$

$$\bar{\varepsilon}_{U,k+1}^{i,j} = \bar{\varepsilon}_{k+1|k}^{i,j}, \quad \bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j} = \bar{\ell}_{k+1|k}^{i,j}, \quad (35d)$$

$$\Theta_{U,i,j}^{1:\bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}} = \delta_{\Theta_{i,j}^{1:\bar{\ell}_{k+1|k}^{i,j}}} (\Theta_{U,i,j}^{1:\bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}})^{-1} \times \Theta_{U,i,j}^{\bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}}, \quad (35e)$$

$$\Theta_{U,i,j}^{\bar{\ell}_{U,k+1}^{i,j}} = u_q(\Theta_{i,j}^{\bar{\ell}_{k+1|k}^{i,j}}, H_{k+1}, R_{k+1}). \quad (35f)$$

对权重 $\omega_{U,k+1}(W)$ 归一化, 可得

$$\omega_{U,k+1}(W) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M_{k+1|k}} \sum_{j=1}^{J_{k+1|k}^i} \omega_{U,k+1}^{i,j}}. \quad (36)$$

经更新步后, 一共可得 $M_{k+1}^+ = M_{k+1|k} + \sum_{P \in \varphi} |P|$ 个扩展目标的假设轨迹.

step 4: 利用剪枝与合并<sup>[11-14]</sup>方法对更新所得到的扩展目标轨迹和 GGIW 分量进行处理, 从而达到减小计算复杂度、消除虚假目标的目的. 经过剪枝与合并后, 共保留 $M_{k+1}$ 个扩展目标轨迹, 其中 $M_{k+1} \leq M_{k+1}^+$ .

step 5: 输出 $k+1$ 时刻更新所得多扩展目标轨迹后验密度 $f_{k+1} = \{(r_{k+1}^{(i)}, p_{k+1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k+1}}$ .

当 $k+1 \geq K$ 时, 算法停止迭代, 否则, 令 $k = k+1$ 并返回 step 1, 再重复执行 step 1 ~ step 5, 其中 $K$ 为迭代总时长.

注 1 式 (28e) 和 (29e) 中的函数 $u_p$ 、式 (35f) 中的函数 $u_q$ 分别表示扩展目标状态的 GGIW 参数预测与更新, 分别参见文献 [29] 中的 Table III、Table II.

## 4 数值仿真

### 4.1 仿真设置

场景 1 单扩展目标衍生.

设置如图 3 所示的场景范围大小为 $[-300, 300] \times [-300, 300]$  m 的二维扩展目标仿真场景, 其中包含 1 个原始目标和 4 个衍生目标, 该场景模拟实际应用中单目标同时产生多个目标的情景. 仿真设置传感器扫描时长为 100 s, 采样周期为 $T_s = 1$  s, 传感器检测概率为 $p_{D,k+1} = 0.95$ . 在场景 1 中, 原始目标在第 1 s 出生, 初始位置为 $[-300, 0]$  m; 随后, 原始目标在第 50 s 产生 4 个衍生目标, 它们的初始位置分别为 $[-22, 0]$  m,  $[-23, 2]$  m,  $[-23, -7]$  m 和  $[-22, -5]$  m. 单扩展目标的外形建模为椭圆, 长轴为 1 m, 短轴为 0.5 m, 并且每个扩展目标产生量测的数目服从均值为 $\gamma = 10$ 的泊松分布. 场景中的杂波随机出现并且

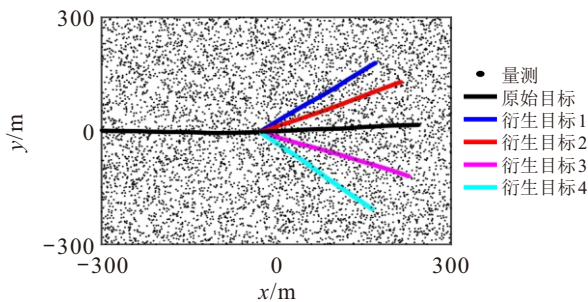


图3 场景 1: 单扩展目标衍生

数量上服从均值为 $\lambda = 60$ 的泊松分布, 空间上服从均匀分布, 杂波密度为 $c_k(z) = 1.11 \times 10^{-4}$ . 其他参数设置如下.

1) 运动模型: 存活扩展目标的质心运动满足式

(1) 所示的线性高斯方程, 其中扩展目标的存活概率设置为 $p_{k+1}^S = 0.99$ , 存活扩展目标的状态转移矩阵和过程噪声协方差矩阵分别为

$$F_{k+1|k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$Q_{k+1|k} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{(T_s)^4}{4} & 0 & \frac{(T_s)^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(T_s)^4}{4} & 0 & \frac{(T_s)^3}{2} \\ \frac{(T_s)^3}{2} & 0 & (T_s)^2 & 0 \\ 0 & \frac{(T_s)^3}{2} & 0 & (T_s)^2 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

其中 $\sigma_w = 0.1$  m/s 表示过程噪声标准差.

2) 量测模型: 系统量测方程如式 (2) 所示, 其中量测转移矩阵为 $H_{k+1} = [1, 0, 0; 0, 1, 0]$ , 量测噪声协方差为 $R_{k+1} = \sigma_v^2 \text{diag}([1, 1])$ , 其中 $\sigma_v = 0.1$  m/s 为量测噪声标准差.

3) 衍生模型: 每个采样时间步为存在概率大于阈值 $r_1 = 0.5$ 的存活扩展目标添加 $2O$ 个衍生扩展目标轨迹伯努利分量, 每个衍生扩展目标的质心运动方程满足式 (8), 衍生扩展目标的状态转移矩阵如式 (9) ~ (11) 所示, 过程噪声协方差矩阵满足 $Q_{k+1|k,m} = Q_{k+1|k}$ , 衍生概率设置为 $p_{k+1,m}^S = 0.01$ , 其中 $m = 1, 2, \dots, 2O$ .

场景 2 多扩展目标衍生.

设置如图 4 所示的衍生扩展目标仿真场景, 其中包括 2 个原始目标和 4 个衍生目标, 以模拟实际场景中多个目标同时衍生出子目标的情景. 该场景设置初始航向角分别为 $\pi/4$  rad 和 $-\pi/4$  rad 的 2 个原始扩展目标, 它们的出生时刻均为 1 s, 初始位置分别为

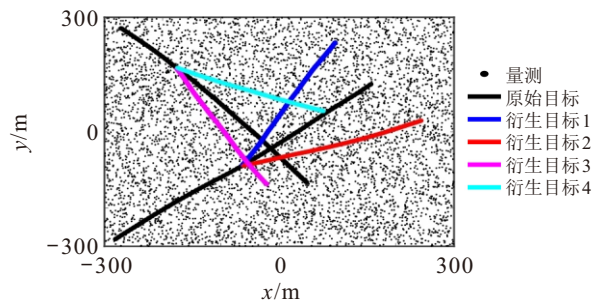


图4 场景 2: 多扩展目标衍生

$[-280, -280]$  m和 $[-270, 270]$  m. 其中: 第1个原始扩展目标在40 s产生2个衍生扩展目标, 初始位置分别为 $[-62, -85]$  m和 $[-59, -88]$  m; 第2个原始扩展目标在20 s产生2个衍生扩展目标, 初始位置分别为 $[-174, 163]$  m和 $[-172, 166]$  m. 在该场景中, 除目标初始运动参数不同外, 其他滤波参数与场景1一致.

4.2 仿真结果

为验证本文算法的有效性, 将正整数 $O$ 依次取4个递增值, 得衍生分量数不同的4种S-TCBMeMBer滤波, 并与轨迹GGIW分布混合实现的ECBMeMBer算法<sup>[17]</sup>(TCBMeMBer)对比. 取100次仿真的平均势估计、平均OSPA<sup>[30]</sup>估计和平均轨迹度量(Trajectory Metric, TM)<sup>[31]</sup>估计作为评估指标.

图5为上述5种算法对场景1扩展目标的平均

势估计、平均OSPA估计和平均轨迹度量估计, 图6为5种算法对场景2扩展目标的平均势估计、平均OSPA估计和平均轨迹度量估计. 从两次仿真结果分析, TCBMeMBer算法对扩展目标势估计表现最差, 并具有最大的OSPA误差和轨迹度量误差, 表明其无法对衍生扩展目标轨迹进行有效估计. S-TCBMeMBer算法对衍生扩展目标估计的效果取决于 $O$ 值, 即预测步生成的衍生分量数, 随着 $O$ 值的依次增大, S-TCBMeMBer算法对扩展目标的势估计越来越好, OSPA误差和轨迹度量误差也越来越小, 同时, 当 $O$ 增大到一定程度时, S-TCBMeMBer滤波效果趋于稳定. 这与粒子滤波原理类似, 即通过对衍生扩展目标的偏转角进行随机采样来模拟真实值, 理论上预设值越多所得结果越精确, 同时所需时间成本也随之增加(详见表1).

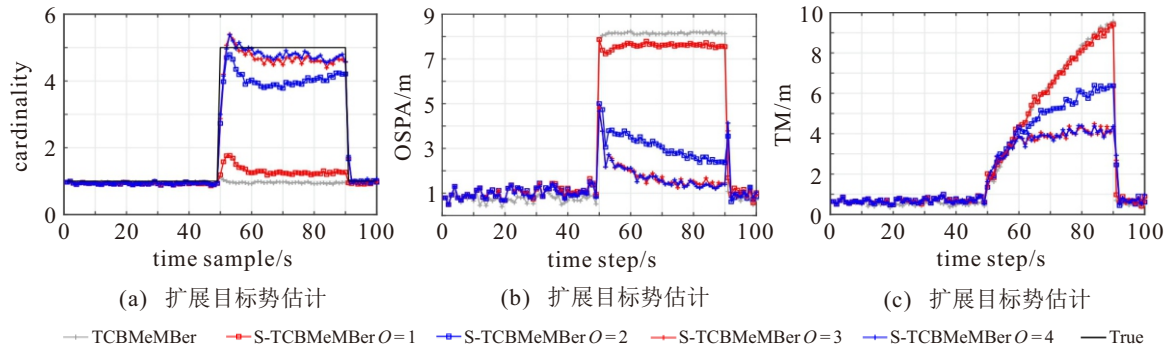


图5 场景1

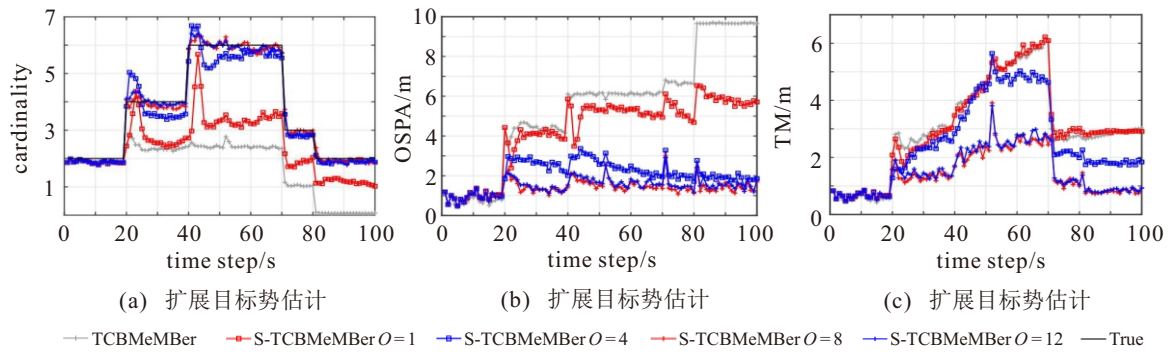


图6 场景2

表1 不同滤波平均OSPA、轨迹度量和时间复杂度统计

场景	指标	TCBMeMBer	S-TCBMeMBer			
			$O = 1$	$O = 2$	$O = 3$	$O = 4$
场景1	OSPA/m	379.60	362.81	198.03	136.78	131.85
	轨迹度量/m	286.26	285.96	239.22	185.88	183.68
	时间复杂度/s	3.87	8.60	54.58	83.73	109.27
场景	指标	TCBMeMBer	S-TCBMeMBer			
			$O = 1$	$O = 4$	$O = 8$	$O = 12$
场景2	OSPA/m	551.07	428.49	207.85	138.94	148.55
	轨迹度量/m	609.27	611.19	507.81	286.76	300.42
	时间复杂度/s	8.22	23.03	146.69	181.15	191.34

## 5 结论

本文针对复杂环境下的衍生扩展目标跟踪问题, 基于轨迹集理论提出了一种用于衍生扩展目标跟踪的多伯努利滤波器。首先, 利用轨迹随机有限集建模多扩展目标的轨迹序列, 并在此基础上推导了扩展目标的轨迹伯努利 RFS 和轨迹多伯努利 RFS。其次, 利用原始扩展目标的航向角与衍生扩展目标的偏转角之间的三角函数关系式推导并提出一种多伯努利衍生模型, 解决了衍生扩展目标质心状态与外形矩阵的联合跟踪问题。随后, 在系统满足线性高斯的条件下, 基于 GGIW 分布混合推导了衍生扩展目标轨迹多伯努利滤波算法在预测步和更新步的递推表达式。最后, 通过构造单扩展目标与多扩展目标的衍生扩展目标跟踪场景, 验证了本文所提出算法的有效性。在今后的研究中, 可进一步将所提出算法拓展到多群目标跟踪场景与多传感器跟踪场景。

### 参考文献 (References)

- [1] Granström K, Baum M, Reuter S. Extended object tracking: Introduction, overview, and applications[J]. *Journal of Advances in Information Fusion*, 2017, 12(2): 139-174.
- [2] 单博炜, 杨小军. 基于随机有限集的多扩展目标跟踪研究进展[J]. *控制与决策*, 2017, 32(6): 961-966. (Shan B W, Yang X J. Development of multiple extended object tracking based on random finite set[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(6): 961-966.)
- [3] 姬红兵, 张永权, 刘龙. 扩展目标跟踪理论与方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2022. (Ji H B, Zhang Y Q, Liu L. Extended target tracking theory and methods[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2022.)
- [4] Chang K C, Bar-Shalom Y. Joint probabilistic data association for multitarget tracking with possibly unresolved measurements and maneuvers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29(7): 585-594.
- [5] Blackman S S. Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking[J]. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 2004, 19(1): 5-18.
- [6] Mahler R P S. *Statistical multisource-multitarget information fusion*[M]. Boston: Artech House, 2007.
- [7] Da K, Li T C, Zhu Y F, et al. Recent advances in multisensor multitarget tracking using random finite set[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2021, 22(1): 5-24.
- [8] Yi W, Chai L. Heterogeneous multi-sensor fusion with random finite set multi-object densities[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 3399-3414.
- [9] Mahler R P S. Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152-1178.
- [10] Mahler R. PHD filters of higher order in target number[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(99): 1523-1543.
- [11] 蔡如华, 樊向婷, 吴孙勇, 等. 基于交互式 CPHD 的多传感器多机动目标跟踪[J]. *控制与决策*, 2022, 37(1): 47-57. (Cai R H, Fan X T, Wu S Y, et al. Multi-sensor and multi-maneuver target tracking based on interactive CPHD[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(1): 47-57.)
- [12] Vo B T, Vo B N, Cantoni A. The cardinality balanced multi-target multi-bernoulli filter and its implementations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 409-423.
- [13] Koch J W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1042-1059.
- [14] Granstrom K, Orguner U. A PHD filter for tracking multiple extended targets using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 5657-5671.
- [15] Lundquist C, Granstrom K, Orguner U. An extended target CPHD filter and a gamma Gaussian inverse wishart implementation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2013, 7(3): 472-483.
- [16] Granstrom K, Orguner U. On spawning and combination of extended/group targets modeled with random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(3): 678-692.
- [17] 连峰, 马冬冬, 元向辉, 等. 扩展目标 CBMeMber 滤波器及其高斯混合实现[J]. *控制与决策*, 2015, 30(4): 611-616. (Lian F, Ma D D, Yuan X H, et al. CBMeMber filter for extended targets and its Gaussian mixture implementations[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(4): 611-616.)
- [18] Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4091-4104.
- [19] Nguyen T T D, Vo B N, Vo B T, et al. Tracking cells and their lineages via labeled random finite sets[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 5611-5626.
- [20] Děchtěrenko F, Jakubková D, Lukavský J, et al. Tracking multiple fish[J]. *PeerJ*, 2022, 10: e13031.
- [21] Wang X W, Peng H J, Liu J, et al. Optimal control based coordinated taxiing path planning and tracking for multiple carrier aircraft on flight deck[J]. *Defence Technology*, 2022, 18(2): 238-248.
- [22] 苗露, 冯新喜, 迟珞珈. 基于 GGIW-CPHD 的衍生扩展目标跟踪算法[J]. *计算机工程与应用*, 2019, 55(9): 118-123. (Miao L, Feng X X, Chi L J. Spawning expansion target tracking algorithm based on GGIW-CPHD[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2019, 55(9): 118-123.)
- [23] 吕晓燕, 吴孙勇, 蔡如华, 等. 基于 GGIW-PMB 的衍生扩展目标跟踪[J]. *计算机系统应用*, 2023, 32(5): 220-

226.  
(Lv X Y, Wu S Y, Cai R H, et al. Spawning extended target tracking based on GGIW-PMB[J]. Computer Systems & Applications, 2023, 32(5): 220-226.)
- [24] Xia Y X, Granstrom K, Svensson L, et al. Poisson multi-bernoulli approximations for multiple extended object filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(2): 890-906.
- [25] Hu Q, Ji H B, Zhang Y Q. Tracking of maneuvering non-ellipsoidal extended target with varying number of sub-objects[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 99: 262-284.
- [26] Garcia-Fernandez A F, Svensson L, Morelande M R. Multiple target tracking based on sets of trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(3): 1685-1707.
- [27] Granström K, Orguner U. Estimation and maintenance of measurement rates for multiple extended target tracking[C]. Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion. Singapore: IEEE, 2012: 2170-2176.
- [28] Tsukuma H, Kubokawa T. Matrix-variate distributions[C]. Shrinkage Estimation for Mean and Covariance Matrices. Singapore: Springer, 2020: 13-26.
- [29] Granström K, Fatemi M, Svensson L. Poisson multi-bernoulli mixture conjugate prior for multiple extended target filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(1): 208-225.
- [30] Yang S S, Baum M, Granstrom K. Metrics for performance evaluation of elliptic extended object tracking methods[C]. 2016 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems. Baden-Baden. 2016: 523-528.
- [31] Garcia-Fernandez A F, Rahmathullah A S, Svensson L. A metric on the space of finite sets of trajectories for evaluation of multi-target tracking algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 3917-3928.

### 作者简介

杨英壮 (1997-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多传感器信息融合、扩展目标跟踪, E-mail: [2020119141@qq.com](mailto:2020119141@qq.com);

蔡如华 (1971-), 男, 副教授, 主要研究方向为小波分析、信号处理, E-mail: [ruhuac@guet.edu.cn](mailto:ruhuac@guet.edu.cn);

吴孙勇 (1981-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为多目标检测与跟踪、阵列信号处理, E-mail: [wusunyong121991@163.com](mailto:wusunyong121991@163.com);

刘锦新 (1997-), 男, 博士生, 研究方向为多传感器信息融合, E-mail: [468301239@qq.com](mailto:468301239@qq.com).