

# 未知周期DoS攻击下奇异摄动信息物理系统 $H_\infty$ 滤波设计

周林娜<sup>†</sup>, 刘虹羽, 马磊, 王国庆, 杨春雨

(中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116)

**摘要:** 针对奇异摄动信息物理系统在未知周期拒绝服务攻击 (denial-of-service, DoS) 下的状态估计问题, 提出事件触发多时间尺度切换滤波器设计方法. 首先, 在传感器与滤波器之间引入事件触发机制确定采样数据是否传输至网络中, 可以达到节约网络资源的目的; 然后, 在此事件触发机制的基础上, 考虑未知周期 DoS 攻击问题, 建立滤波误差切换系统, 通过构建依赖奇异摄动参数的 Lyapunov 函数, 提出奇异摄动信息物理系统切换滤波器设计方法, 得到较小的估计误差, 从而克服设计过程中的病态数值问题, 降低网络通信中 DoS 攻击对系统的不良影响, 保证误差系统指数稳定且满足  $H_\infty$  性能, 实现未知周期 DoS 攻击下系统的状态估计; 最后, 利用电路仿真算例验证所提出的滤波器设计方法的有效性.

**关键词:** 奇异摄动信息物理系统; 拒绝服务攻击; 事件触发机制; 状态估计;  $H_\infty$  滤波; 网络通信

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0482

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 周林娜, 刘虹羽, 马磊, 等. 未知周期 DoS 攻击下奇异摄动信息物理系统  $H_\infty$  滤波设计 [J]. 控制与决策, 2023, 38(1): 123-132.

## $H_\infty$ filter design for singularly perturbed cyber-physical system under unknown period DoS attack

ZHOU Lin-na<sup>†</sup>, LIU Hong-yu, MA Lei, WANG Guo-qing, YANG Chun-yu

(School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

**Abstract:** To solve the problem of state estimation of the singularly perturbed information physical systems under unknown cycle denial-of-service (DoS) attack, a design method of the event-triggered multi-time scale switching filter is proposed. Firstly, an event triggering mechanism is introduced between the sensor and the filter to determine whether the sampled data is transmitted to the network, which can save the network resources. Then, on the basis of this event triggering mechanism, considering the DoS attack problem of unknown cycle, a filtering error switching system is established. By constructing a Lyapunov function which depends on singular perturbation parameters, a switching filter design method for the singular perturbation information physical system is proposed, which reduces the estimation error, overcomes the "ill-conditioned numerical problems" in the design process, reduces the adverse effect of DoS attack on the system in network communication, and ensures the exponential stability of the error system and satisfies  $H_\infty$  performance, thus the system state estimation under unknown cycle DoS attack is realized. Finally, a circuit simulation example is used to illustrate the effectiveness of the proposed filter design method.

**Keywords:** singularly perturbed cyber-physical system; denial of service attacks; event-triggered mechanism; state estimation;  $H_\infty$  filter; network communication

## 0 引言

信息物理系统 (cyber-physical systems, CPSs) 是物理系统结合计算技术、通信技术及控制技术而成的一种复杂系统<sup>[1]</sup>, 目前已广泛应用于智能电网、

医疗保健和工业过程等领域<sup>[2-5]</sup>. 网络通信的引入使 CPS 具有易部署、易维护、低成本等优点, 并且能够实现系统资源共享. 然而, 网络通信存在一些缺点, 例如易导致时间延迟、易受外部干扰和网络攻击. 针

收稿日期: 2021-03-22; 录用日期: 2021-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61873272, 62073327); 江苏省自然科学基金项目 (BK20200086, BK20200631).

责任编辑: 关新平.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: linnazhou@cumt.edu.cn.

对CPS的网络攻击主要包括3类,即拒绝服务攻击(denial-of-service, DoS)<sup>[6]</sup>、重放攻击<sup>[7]</sup>和虚假数据注入攻击<sup>[8]</sup>。其中DoS攻击是一种容易实现的攻击方式,获得了学者们的广泛关注。DoS攻击会导致数据传输中断,导致系统性能下降并破坏系统稳定性。因此,学者们采用不同方法研究在DoS攻击下的CPS状态估计问题,其中两种重要方法是卡尔曼滤波方法<sup>[9]</sup>和 $H_\infty$ 滤波方法<sup>[10]</sup>。

卡尔曼滤波方法应用的前提是已知噪声的统计学信息,相比较而言,基于 $H_\infty$ 滤波的状态估计方法能够在系统模型和噪声统计特性不确定的条件下保证系统状态估计精度且具有鲁棒性。本文研究系统受到的未知周期DoS攻击的攻击周期随机且具有一定的随机性,因此本文选择 $H_\infty$ 滤波方法。 $H_\infty$ 滤波方法的优点使其具有较强的普适性,广泛应用于各种系统状态估计问题研究中。例如:文献[11]针对受到DoS攻击的网络系统 $H_\infty$ 滤波问题,提出了一种基于事件触发的 $H_\infty$ 滤波器设计方法;文献[12]提出了一种T-S模糊滤波器的设计方法,利用 $H_\infty$ 滤波方法解决了DoS攻击下非线性系统的状态估计问题。然而,现有方法主要针对单一时间尺度系统,用于具有多时间尺度特性<sup>[13]</sup>的奇异摄动CPS时会出现由奇异摄动参数引起的病态数值问题<sup>[14]</sup>,从而导致无法得到全部近似解。本文研究DoS攻击的奇异摄动CPS的 $H_\infty$ 滤波设计。

奇异摄动CPS的研究具有广泛的应用背景。例如,智慧矿山、智能电网、机械和航空航天等领域中大量研究对象都具有明显的多时间尺度特性,而且因为复杂工况、工程成本等外部环境因素引入网络通信技术,上述系统在实际应用中容易出现网络堵塞和时间延迟等现象。为了克服通讯受限情况下CPS的网络堵塞和时间延迟问题<sup>[15]</sup>,基于事件触发机制<sup>[16]</sup>的CPS控制与滤波研究受到人们的广泛关注。文献[17]研究基于缓慢变化动态的事件触发控制问题,并且给出了保证系统稳定性的条件;文献[18]采用对角变换的方法分别给出了连续奇异摄动系统的快、慢变化动态事件触发器的设计方案;文献[19]设计了基于动态事件触发机制的奇异摄动滑模控制器。但是在现有的事件触发状态估计问题的研究中,忽略了网络传输可能存在的恶意攻击,这会造成数据泄露流失,从而引起不可预估的经济损失。因此,本文针对奇异摄动CPS的事件触发状态估计问题,考虑网络攻击的影响具有重要意义。本文的主要研究目标是提出新的 $H_\infty$ 滤波器设计方法,在应对未知周期DoS攻击的同时,可以避免病态数值问题。

本文研究奇异摄动CPS在未知周期DoS攻击下的事件触发状态估计问题。首先,设计基于采样数据的事件触发机制,以节省网络通信资源;其次,为了有效克服病态数值问题,利用全阶系统方法设计奇异摄动系统滤波器;最后,基于事件触发方案,将受到DoS攻击的滤波误差系统转换成切换系统,采用奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法<sup>[20]</sup>构造切换的Lyapunov函数,给出滤波器的设计方法。

本文的主要贡献如下:1) 首次研究在未知周期DoS攻击下奇异摄动CPS的状态估计问题,提出事件触发多时间尺度切换滤波器;2) 构造依赖奇异摄动参数的Lyapunov函数,设计奇异摄动CPS切换滤波器,实现在网络攻击下系统的状态估计,并克服设计过程中的病态数值问题。

## 1 系统描述和预备知识

本文研究如图1所示DoS攻击下的奇异摄动CPS状态估计问题。

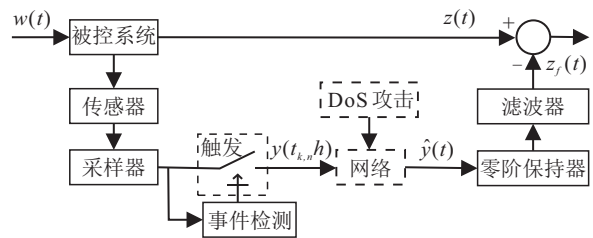


图1 DoS攻击下的奇异摄动CPS

图1中的被控系统为如下奇异摄动系统:

$$\begin{cases} E(\varepsilon)\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ y(t) = Cx(t) + Dv(t), \\ z(t) = Lx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是状态向量; $y(t) \in R^{n_2}$ 是被控制系统的输出向量; $z(t) \in R^{n_3}$ 是估计输出信号; $w(t) \in R^{n_4}$ 是扰动输入,且 $w(t) \in L_2[0, +\infty)$ ; $v(t) \in R^{n_5}$ 是测量噪声; $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times 1}$ ,  $C \in R^{n \times n}$ ,  $D \in R^{n \times 1}$ ,  $L \in R^{1 \times n}$ 是已知的参数矩阵; $E(\varepsilon) = \begin{bmatrix} I_{n_{I_1}} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_{I_2}} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 是已知的奇异摄动参数。奇异摄动系统的状态变量分为快慢状态,两种状态区别表现在方程形式上即是微分方程的导数是否乘有奇异摄动参数 $\varepsilon$ 。其中, $\varepsilon_0$ 一般参照物理意义,凭工程经验设定。

DoS攻击的实现方式主要是通过攻击网络信道中的正常通信来降低数据传输成功率。在本文中,考虑如下一种能量受限且未知周期的DoS攻击模型:

$$S_{\text{DoS}}(t) = \begin{cases} 0, & t \in G_{1,n}; \\ 1, & t \in G_{2,n}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $n \in R$  是攻击频率;  $G_{1,n} \triangleq [g_n, g_n + b_n)$ ,  $G_{2,n} \triangleq [g_n + b_n, g_{n+1})$ ,  $g_n$  是第  $n$  次 DoS 攻击休眠期的起始时间,  $b_n$  是第  $n$  次 DoS 攻击休眠期的持续时间,  $g_n + b_n$  是第  $n$  次 DoS 攻击攻击期的起始时间; 定义  $b_{\min} \leq \inf_{n \in R} \{b_n\}$ ,  $c_{\max} \geq \sup_{n \in R} \{g_n - g_{n-1} - b_{n-1}\}$ .

由于 DoS 攻击能量受限的特点, 攻击方必须先进入休眠期, 为攻击期补充能量, 然后在攻击期内对网络信道发动连续的 DoS 攻击, 达到降低数据包传输成功率的目的. 在没有 DoS 攻击或者 DoS 攻击处于休眠期的情况下, 数据可以正常传输, 否则传输数据置为零.

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} y(t_{k,n}h), & t \in R_{k,n} \cap G_{1,n}; \\ 0, & t \in G_{2,n}. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $k$  是事件触发周期次数,  $t_{k,n}h$  是数据成功传输的时刻 ( $t_{0,n}h \triangleq g_n$ ),  $h$  是采样周期,  $R_{k,n} \triangleq [t_{k,n}h, t_{k+1,n}h)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, k(n)\} \triangleq K(n)$ ,  $n \in N$  且  $k(n) = \sup\{k \in N | t_{k,n}h \leq g_n + b_n\}$ ,  $t_{k,n}h \leq g_n + b_n$ ,  $t_{k+1,n}h \geq g_n + b_n$ .

本文构建如下多时间尺度切换滤波器进行状态估计:

$$\begin{cases} E(\varepsilon)\dot{x}_f(t) = A_{f_i}x_f(t) + B_{f_i}\hat{y}(t), \\ z_f(t) = C_{f_i}x_f(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $x_f(t) \in R^n$  是滤波器状态向量,  $z_f(t)$  是  $z(t)$  估计值,  $\hat{y}(t)$  是滤波器实际输入. 根据是否发生 DoS 攻击,  $i = 1, 2$  表示切换为滤波器 1 或者 2, 具体描述如下:

1) 当 DoS 攻击处于休眠期时,  $i = 1$ , 即切换为滤波器 1, 其增益为  $A_{f_1}$ 、 $B_{f_1}$ 、 $C_{f_1}$ ;

2) 当 DoS 攻击处于攻击期时,  $i = 2$ , 即切换为滤波器 2, 其增益为  $A_{f_2}$ 、 $B_{f_2}$ 、 $C_{f_2}$ , 其中  $B_{f_2} = 0$ .

设计事件触发条件如下:

$$[y(t_k h + j h) - y(t_k h)]^T W [y(t_k h + j h) - y(t_k h)] > \sigma y^T(t_k h) W y(t_k h). \quad (5)$$

其中:  $\sigma \in [0, 1)$  是事件触发阈值,  $W$  是事件触发权值矩阵,  $t_k h$  是最后一次更新的事件触发瞬间,  $t_k h + j h$  是后续采样时刻.

定义未知周期 DoS 攻击下的事件触发时刻

$$t_{k,n}h = \{t_{k_j}h \text{ 满足式(5)} | t_{k_j}h \in G_{1,n-1}\} \cup \{g_n\}. \quad (6)$$

其中:  $n, t_{k_j}, k_j \in N$ ,  $k$  是第  $n$  次 DoS 攻击发生区间内的事件触发次数. 假设事件触发间隔  $R_{k,n}$  按采样周期次序划分, 即

$$R_{k,n} = \bigcup_{m=1}^{\lambda_{k,n}} [t_{k,n}h + (m-1)h, t_{k,n}h + mh). \quad (7)$$

其中  $\lambda_{k,n} \triangleq \sup\{m \in N | t_{k,n}h + mh < t_{k+1,n}h\}$ .

令

$$\begin{cases} F_{k,n}^m = [t_{k,n}h + (m-1)h, t_{k,n}h + mh), \\ m \in \{1, 2, \dots, \lambda_{k,n-1}\}; \\ F_{k,n}^{\lambda_{k,n}} = [t_{k,n}h + \lambda_{k,n}h, t_{k+1,n}h). \end{cases} \quad (8)$$

$$G_{1,n} = \bigcup_{k=0}^{k(n)} \{R_{k,n} \cap G_{1,n}\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{k(n)} R_{k,n}. \quad (9)$$

结合式 (7)~(9), 区间  $G_{1,n}$  可以写为  $G_{1,n} = \bigcup_{k=0}^{k(n)} \bigcup_{m=1}^{\lambda_{k,n}} \{F_{k,n}^m \cap G_{1,n}\}$ , 令  $\Omega_{k,n}^m = F_{k,n}^m \cap G_{1,n}$ , 则  $G_{1,n} = \bigcup_{k=0}^{k(n)} \bigcup_{m=1}^{\lambda_{k,n}} \Omega_{k,n}^m$ .

对于  $k \in K(n)$ ,  $n \in N$ , 定义两个分段函数

$$\tau_{k,n}(t) = \begin{cases} t - t_{k,n}h, & t \in \Omega_{k,n}^1; \\ t - t_{k,n}h - h, & t \in \Omega_{k,n}^2; \\ \vdots \\ t - t_{k,n}h - \lambda_{k,n}h, & t \in \Omega_{k,n}^{\lambda_{k,n}}. \end{cases} \quad (10)$$

$$e_{k,n}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \Omega_{k,n}^1; \\ y(t_{k,n}h) - y(t_{k,n}h + h), & t \in \Omega_{k,n}^2; \\ \vdots \\ y(t_{k,n}h) - y(t_{k,n}h + \lambda_{k,n}h), & t \in \Omega_{k,n}^{\lambda_{k,n}}. \end{cases} \quad (11)$$

根据上述两个分段函数的定义可以得到  $\tau_{k,n}(t) \in [0, h)$ ,  $t \in G_{1,n} \cap R_{k,n}$ .

事件触发采样数据  $y(t_{k,n}h)$  可表示为

$$y(t_{k,n}h) = y(t - \tau_{k,n}(t)) + e_{k,n}(t), \quad t \in G_{1,n} \cap R_{k,n}. \quad (12)$$

其中误差向量  $e_{k,n}(t)$  满足

$$e_{k,n}^T(t) W e_{k,n}(t) \leq \sigma y^T(t_{k,n}h) W y(t_{k,n}h). \quad (13)$$

定义滤波误差为  $e(t) = z(t) - z_f(t)$ , 滤波误差切换系统状态向量为  $\zeta(t) = [x^T(t) \quad x_e^T(t)]^T$ , 其中  $x_e(t) = x(t) - x_f(t)$ ,  $\omega(t) = [w^T(t) \quad v^T(t - \tau_{k,n}(t))]^T$ . 结合式 (1) 和 (4), 可以得到滤波误差切换系统

$$\begin{cases} \tilde{E}(\varepsilon)\dot{\zeta}(t) = A_i \zeta(t) + B_i H \zeta(t - \tau_{k,n}(t)) + B_{e_i} e_{k,n}(t) + B_{w_i} \omega(t); \\ e(t) = C_i \zeta(t), \quad i = \{1, 2\}, t \in \bigcup_{n \in N} G_{i,n}; \\ \zeta(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\tilde{E}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon) & 0 \\ 0 & E(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - A_{f_i} & A_{f_i} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - A_{f_2} & A_{f_2} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{f_1} C \end{bmatrix}, B_2 = 0,$$

$$B_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{f_1} \end{bmatrix}, B_{e_2} = 0, B_{w_1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & -B_{f_1} D \end{bmatrix},$$

$$B_{w_2} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}, C_1 = [L - C_{f_1} \quad C_{f_1}],$$

$$C_2 = [L - C_{f_2} \quad C_{f_2}], H = [I \quad 0],$$

且  $e_{k,n}(t)$  满足式(13).

**注1** 文献[21]详细阐述了DoS攻击下事件触发方案的信号传输模式,给出了采样时间序列、事件触发时间序列、攻击发生时间序列和实际接收数据时间序列图.

本文考虑的  $H_\infty$  滤波设计问题定义如下.

设计滤波器(4),使得误差系统(14)在干扰输入  $w(t) \in L_2[0, +\infty)$  作用下是全局指数稳定(GES)的,且干扰衰减系数为  $\gamma > 0$ ,即满足如下条件:

1) 当干扰输入  $w(t) = 0$  时,存在常数  $b_0, b_1, b_3 > 0$ , 可使  $\|\zeta(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_0 b_3}{b_1}} e^{-\varpi t} \|\psi(t)\|_h, \forall t \geq 0$ . 其中:  $\zeta(t) = \psi(t), t \in [-h, 0], \psi(t)$  是连续函数且  $\psi(0) = 0$  是初始条件,  $\varpi, b_0, b_1, b_3$  定义将在下文给出.

2) 在零初始条件下,滤波误差  $e(t)$  满足  $\|e(t)\|_2 \leq \gamma \|\varpi(t)\|_2, \varpi(t) \in L_2[0, +\infty)$ .

**引理1**<sup>[21]</sup> 对于  $\tau(t) \in [0, h]$ , 如果存在  $Z \in R^{m \times m}$  和  $S \in R^{m \times m}$  使得  $\begin{bmatrix} Z & * \\ S & Z \end{bmatrix} \geq 0$ , 则以下不等式成立:

$$-h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \leq s^T(t) \Phi s(t). \quad (15)$$

其中

$$s(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - h) \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Z & Z^T + S^T & -S^T \\ * & -2Z - S - S^T & Z^T + S^T \\ * & * & -Z \end{bmatrix}.$$

**引理2**<sup>[22]</sup> 对于给定标量  $\varepsilon_0 > 0$ 、对称矩阵  $M_1$  和  $M_2$ , 如果有如下不等式成立:

$$M_1 > 0, \quad (16)$$

$$M_1 + \varepsilon_0 M_2 > 0, \quad (17)$$

则可得

$$M_1 + \varepsilon M_2 > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (18)$$

**引理3**<sup>[22]</sup> 如果存在一个标量  $\varepsilon_0 > 0$  和矩阵  $P_i (i = 1, 2, 3)$ , 且  $P_i = P_i^T (i = 1, 2)$  满足以下不等式:

$$P_1 > 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & \varepsilon_0 P_3^T \\ * & \varepsilon_0 P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (20)$$

则有如下不等式成立:

$$E(\varepsilon)P(\varepsilon) = P^T(\varepsilon)E(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad (21)$$

其中  $P(\varepsilon) = \begin{bmatrix} P_1 & \varepsilon P_3^T \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$ .

**注2** 文献[11]已研究了在未知周期DoS攻击下CPS基于事件触发的状态估计问题,但是其研究的被控对象是系统(1)的一种特殊形式(当  $\varepsilon = 1$  时). 奇异摄动参数  $\varepsilon$  是非常小的正数,出现在微分方程的最高阶导数项中,如果直接利用文献[11]的常规方法设计滤波器,则设计方法涉及的线性矩阵不等式中含有奇异摄动参数,容易导致求解线性矩阵不等式过程中出现病态数值的问题.

## 2 主要结果

本部分主要研究在未知周期DoS攻击下,奇异摄动CPS基于事件触发的  $H_\infty$  滤波器设计问题,在保证滤波误差切换系统(14)的  $H_\infty$  性能的前提下,给出设计滤波器的方法.

下面给出满足滤波误差切换系统(14)在干扰为0时稳定的充分条件,证明思路是先构建Lyapunov函数,用以证明滤波误差切换系统(14)在干扰输入为0时,系统(14)在DoS攻击期内是有界的,在DoS攻击的休眠期是稳定的,然后证明滤波误差切换系统(14)在DoS攻击的攻击期/休眠期切换过程中是指数稳定的.

**定理1** 给定标量  $\varepsilon_0 > 0, \alpha_i \in (0, +\infty), \mu_i \in (1, +\infty), \sigma \in (0, 1)$  和  $h \in (0, b_{\min})$ , 如果存在正定矩阵  $P_i \in R^{2n \times 2n}, Q_i \in R^{m \times m}, R_i \in R^{n \times n}, W \in R^{n \times n}$  和矩阵  $S_i \in R^{n \times n}$  满足不等式(19)、(20)和以下矩阵不等式:

$$\Sigma_i(0) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i(0) & \sqrt{h} G_i^T H^T R_i \\ * & -R_i \end{bmatrix} < 0; \quad (22)$$

$$\Sigma_i(\varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i(\varepsilon_0) & \sqrt{h} G_i^T H^T R_i \\ * & -R_i \end{bmatrix} < 0; \quad (23)$$

$$\begin{cases} P_1 \leq \mu_2 P_2, P_2 \leq e^{2(\alpha_1 + \alpha_2)h} \mu_1 P_1, \\ Q_i \leq \mu_{3-i} Q_{3-i}, \\ R_i \leq \mu_{3-i} R_{3-i}; \end{cases} \quad (24)$$

0 <

$$\lambda \triangleq 2\alpha_1 b_{\min} - 2\alpha_2 c_{\max} - 2(\alpha_1 + \alpha_2)h - \ln(\mu_1 \mu_2). \quad (25)$$

则当  $w(t) = 0$  时,对于任意的  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , 系统(14)是

全局指数稳定的,且指数衰减率为 $\varpi = \frac{\lambda}{2T}$ .

定理1中所用符号定义如下:

$$i = \{1, 2\}, G_1 = [A_1 \ B_1 \ 0 \ B_{e_1}],$$

$$G_2 = [A_2 \ 0 \ 0],$$

$$\Sigma_{11}^1(0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^1(0) & \Phi_{12}^1(0) & \Phi_{13}^1(0) & \Phi_{14}^1(0) \\ * & \Phi_{22}^1(0) & \Phi_{23}^1(0) & \Phi_{24}^1(0) \\ * & * & \Phi_{33}^1(0) & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44}^1(0) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}^2(0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^2(0) & \Phi_{12}^2(0) & \Phi_{13}^2(0) \\ * & \Phi_{22}^2(0) & \Phi_{23}^2(0) \\ * & * & \Phi_{33}^2(0) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11}^1(0) = A_1^T P_1(0) + P_1^T(0) A_1 + 2\alpha_1 \tilde{E}(0) P_1(0) + H^T Q_1 H - \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T e^{-2\alpha_1 h} R_1 H \tilde{E}(0),$$

$$\Phi_{12}^1(0) = P_1^T(0) B_1 + \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T e^{-2\alpha_1 h} R_1 E(0) + \frac{1}{h} H^T S_1^T,$$

$$\Phi_{13}^1(0) = -\frac{1}{h} H^T S_1^T, \Phi_{14}^1(0) = P_1^T(0) B_{e_1},$$

$$\Phi_{22}^1(0) = \sigma C^T W C - \frac{1}{h} S_1 - \frac{1}{h} S_1^T - \frac{2}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} R_1 E(0),$$

$$\Phi_{23}^1(0) = S_1^T + \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} R_1 E(0),$$

$$\Phi_{24}^1(0) = \sigma C^T W,$$

$$\Phi_{33}^1(0) = -e^{-2\alpha_1 h} Q_1 - \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} R_1 E(0),$$

$$\Phi_{44}^1(0) = \sigma W - W,$$

$$\Phi_{11}^2(0) = -2\alpha_2 \tilde{E}(0) P_2(0) + A_2^T P_2(0) + P_2^T(0) A_2 - \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T R_2 H \tilde{E}(0) + H^T Q_2 H,$$

$$\Phi_{12}^2(0) = \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T R_2 E(0) + \frac{1}{h} H^T S_2^T,$$

$$\Phi_{13}^2(0) = -\frac{1}{h} H^T S_2^T,$$

$$\Phi_{22}^2(0) = -\frac{2}{h} E(0) R_2 E(0) - \frac{1}{h} S_2 - \frac{1}{h} S_2^T,$$

$$\Phi_{23}^2(0) = \frac{1}{h} E(0) R_2 E(0) + \frac{1}{h} S_2^T,$$

$$\Phi_{33}^2(0) = -e^{2\alpha_2 h} Q_2 - \frac{1}{h} E(0) R_2 E(0).$$

同理定义

$$\Sigma_{11}^1(\varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^1(\varepsilon_0) & \Phi_{12}^1(\varepsilon_0) & \Phi_{13}^1(\varepsilon_0) & \Phi_{14}^1(\varepsilon_0) \\ * & \Phi_{22}^1(\varepsilon_0) & \Phi_{23}^1(\varepsilon_0) & \Phi_{24}^1(\varepsilon_0) \\ * & * & \Phi_{33}^1(\varepsilon_0) & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44}^1(\varepsilon_0) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}^2(\varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^2(\varepsilon_0) & \Phi_{12}^2(\varepsilon_0) & \Phi_{13}^2(\varepsilon_0) \\ * & \Phi_{22}^2(\varepsilon_0) & \Phi_{23}^2(\varepsilon_0) \\ * & * & \Phi_{33}^2(\varepsilon_0) \end{bmatrix}.$$

**证明** 由引理2可知,对于任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , LMI(22)和LMI(23)意味着

$$\Sigma_i(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i(\varepsilon) & \sqrt{h} G_i^T H^T R_i \\ * & -R_i \end{bmatrix} < 0, i \in \{1, 2\}. \tag{26}$$

其中

$$\Sigma_{11}^1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^1(\varepsilon) & \Phi_{12}^1(\varepsilon) & \Phi_{13}^1(\varepsilon) & \Phi_{14}^1(\varepsilon) \\ * & \Phi_{22}^1(\varepsilon) & \Phi_{23}^1(\varepsilon) & \Phi_{24}^1(\varepsilon) \\ * & * & \Phi_{33}^1(\varepsilon) & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44}^1(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}^2(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^2(\varepsilon) & \Phi_{12}^2(\varepsilon) & \Phi_{13}^2(\varepsilon) \\ * & \Phi_{22}^2(\varepsilon) & \Phi_{23}^2(\varepsilon) \\ * & * & \Phi_{33}^2(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

由引理3可知,对于任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,有 $E(\varepsilon) P(\varepsilon) = P^T(\varepsilon) E(\varepsilon) > 0$ 成立.

构建李雅普诺夫泛函

$$\begin{aligned} V_{\delta(t)}(t) = & \zeta^T(t) \tilde{E}(\varepsilon) P_{\delta(t)}(\varepsilon) \zeta(t) + \\ & \int_{t-h}^t \zeta^T(s) H^T e^* Q_{\delta(t)} H \zeta(s) ds + \\ & \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \zeta^T(s) \tilde{E}(\varepsilon) H^T e^* R_{\delta(t)} H \tilde{E}(\varepsilon) \dot{\zeta}(s) ds d\theta. \end{aligned} \tag{27}$$

其中: $P_{\delta(t)}(\varepsilon) > 0, Q_{\delta(t)} > 0, R_{\delta(t)} > 0, e^* = e^{2(-1)^{\delta(t)} \alpha_{\delta(t)}(t-s)}, \alpha_{\delta(t)} > 0$ ,且

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-h, 0] \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{1,n} \right); \\ 2, & t \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{2,n}. \end{cases}$$

当 $t \in G_{1,n}$ 时,系统(14)中 $\delta(t) = i = 1$ ,结合引理1与式(26)可得 $\dot{V}_1(t) \leq -2\alpha_1 V_1(t)$ .

同理当 $t \in G_{2,n}$ 时,系统(14)中 $\delta(t) = i = 2$ ,可得 $\dot{V}_2(t) \leq 2\alpha_2 V_2(t)$ .

综上所述可知

$$\begin{cases} \dot{V}_1 + 2\alpha_1 V_1 \leq 0, \forall t \in G_{1,n}; \\ \dot{V}_2 - 2\alpha_2 V_2 \leq 0, \forall t \in G_{2,n}. \end{cases} \tag{28}$$

因此,滤波误差系统(14)在干扰输入为0时,滤波误差切换系统(14)在DoS攻击期内是有界的,在DoS攻击的休眠期是稳定的.由式(28)可得

$$V(t) \leq \begin{cases} e^{-2\alpha_1(t-g_n)} V_1(g_n), \forall t \in G_{1,n}; \\ e^{2\alpha_2(t-g_n-b_n)} V_2(g_n + b_n), \forall t \in G_{2,n}. \end{cases} \tag{29}$$

对于  $t \in [g_n, g_n + b_n]$ , 通过式(28)和(29)可推导出

$$V(t) \leq e^{-\lambda n} V_1(g_0) = e^{-\lambda n} V_1(0). \quad (30)$$

令  $g_n = nT, g_n + b_n = nT + b_{\min}$ , 有

$$nT = g_n \leq t \leq g_n + b_n = nT + b_{\min} \Rightarrow \frac{t - b_{\min}}{T} < n \leq \frac{t}{T}. \quad (31)$$

令

$$\varpi = \frac{\lambda}{2T}, b_0 = \max \left\{ e^{\frac{\lambda b_{\min}}{T}}, \frac{1}{\mu_2} \right\},$$

$$b_1 = \min \{ \lambda_{\min}(\tilde{E}(\varepsilon) P_{\delta(t)}(\varepsilon)) \},$$

$$b_2 = \max \{ \lambda_{\max}(\tilde{E}(\varepsilon) P_{\delta(t)}(\varepsilon)) \},$$

$$b_3 = b_2 + h \lambda_{\max}(H^T Q_{\delta(t)} H) + \frac{h^2}{2} \lambda_{\max}(\tilde{E}(\varepsilon) H^T R_{\delta(t)} H \tilde{E}(\varepsilon)).$$

综上可得

$$\|\zeta(t)\| \leq \sqrt{\frac{b_0 b_3}{b_1}} e^{-\varpi t} \|\psi(t)\|_h, \quad \forall t \geq 0. \quad (32)$$

因此, 当干扰输入为0时, 滤波误差切换系统(14)满足  $H_\infty$  性能条件.  $\square$

下面给出系统(14)在零初始条件下满足  $H_\infty$  性能指标的充分条件, 其证明思路是先利用 Lyapunov 函数证明滤波误差切换系统(14)在零初始条件下, 系统(14)在 DoS 攻击期内是有界的, 在 DoS 攻击的休眠期是输入状态稳定的, 然后基于定理1给出的条件式(24)和(25), 证明滤波误差切换系统(14)满足  $H_\infty$  性能条件.

**定理2** 给定标量  $\varepsilon_0 > 0, \gamma \in (0, +\infty), \alpha_i \in (0, +\infty), \mu_i \in (1, +\infty), \sigma \in (0, 1)$  和  $h \in (0, b_{\min})$ , 如果存在正定矩阵  $\hat{P}_i \in R^{2n \times 2n}, \hat{Q}_i \in R^{n \times n}, \hat{R}_i \in R^{n \times n}, W \in R^{n \times n}$ , 矩阵  $\hat{S}_i \in R^{n \times n}$  使得不等式(19)、(20)、(24)和(25)成立并且满足以下矩阵不等式:

$$\hat{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i(0) & \sqrt{h} G_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{R}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\hat{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i(0) & \sqrt{h} G_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{R}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

则基于事件触发的滤波误差系统(14)是全局指数稳定的, 且在零初始条件下, 滤波误差  $e(t)$  满足  $\|e(t)\|_2 \leq \gamma \|\varpi(t)\|_2, \varpi(t) \in L_2[0, +\infty)$ .

定理2中所用符号定义如下:

$$i = \{1, 2\}, \hat{D} = [0 \ D],$$

$$\hat{G}_1 = [A_1 \ B_1 \ 0 \ B_{e_1} \ B_{w_1}],$$

$$\hat{G}_2 = [A_2 \ 0 \ 0 \ B_{w_2}],$$

$$\hat{C}_1 = [C_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \hat{C}_2 = [C_2 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\hat{\Sigma}_{11}^1(0) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}^1(0) & \hat{\Phi}_{12}^1(0) & \hat{\Phi}_{13}^1(0) & \hat{\Phi}_{14}^1(0) & \hat{\Phi}_{15}^1(0) \\ * & \hat{\Phi}_{22}^1(0) & \hat{\Phi}_{23}^1(0) & \hat{\Phi}_{24}^1(0) & \hat{\Phi}_{25}^1(0) \\ * & * & \hat{\Phi}_{33}^1(0) & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44}^1(0) & \hat{\Phi}_{45}^1(0) \\ * & * & * & * & \hat{\Phi}_{55}^1(0) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}^2(0) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}^2(0) & \hat{\Phi}_{12}^2(0) & \hat{\Phi}_{13}^2(0) & \hat{\Phi}_{14}^2(0) \\ * & \hat{\Phi}_{22}^2(0) & \hat{\Phi}_{23}^2(0) & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}_{33}^2(0) & 0 \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44}^2(0) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_{11}^1(0) = A_1^T \hat{P}_1(0) + \hat{P}_1^T(0) A_1 + 2\alpha_1 \tilde{E}(0) \hat{P}_1(0) + H^T \hat{Q}_1 H - \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 H \tilde{E}(0),$$

$$\hat{\Phi}_{12}^1(0) = \hat{P}_1^T(0) B_1 + \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) + \frac{1}{h} H^T \hat{S}_1^T,$$

$$\hat{\Phi}_{13}^1(0) = -\frac{1}{h} H^T \hat{S}_1^T, \hat{\Phi}_{14}^1(0) = \hat{P}_1^T(0) B_{e_1},$$

$$\hat{\Phi}_{15}^1(0) = \hat{P}_1^T(0) B_{w_1},$$

$$\hat{\Phi}_{22}^1(0) = \sigma C^T W C - \frac{2}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) - \frac{1}{h} \hat{S}_1 - \frac{1}{h} \hat{S}_1^T,$$

$$\hat{\Phi}_{23}^1(0) = \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) + \frac{1}{h} \hat{S}_1^T,$$

$$\hat{\Phi}_{24}^1(0) = \sigma C^T W, \hat{\Phi}_{25}^1(0) = \sigma C^T W \hat{D},$$

$$\hat{\Phi}_{33}^1(0) = -e^{-2\alpha_1 h} \hat{Q}_1 - \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0),$$

$$\hat{\Phi}_{44}^1(0) = \sigma W - W, \hat{\Phi}_{45}^1(0) = \sigma W \hat{D},$$

$$\hat{\Phi}_{55}^1(0) = -\gamma^2 I_{x \times y} + \sigma \hat{D}^T W \hat{D},$$

$$\hat{\Phi}_{11}^2(0) = A_2^T \hat{P}_2(0) + \hat{P}_2^T(0) A_2 - 2\alpha_2 \tilde{E}(0) \hat{P}_2(0) + H^T \hat{Q}_2 H - \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T \hat{R}_2 H \tilde{E}(0),$$

$$\hat{\Phi}_{12}^2(0) = \frac{1}{h} \tilde{E}(0) H^T \hat{R}_2 E(0) + \frac{1}{h} H^T \hat{S}_2^T,$$

$$\hat{\Phi}_{13}^2(0) = -\frac{1}{h} H^T \hat{S}_2^T, \hat{\Phi}_{14}^2(0) = \hat{P}_2^T(0) B_{w_2},$$

$$\hat{\Phi}_{22}^2(0) = -\frac{2}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0) - \frac{1}{h} \hat{S}_2 - \frac{1}{h} \hat{S}_2^T,$$

$$\hat{\Phi}_{23}^2(0) = \frac{1}{h} \hat{S}_2^T + \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0),$$

$$\hat{\Phi}_{33}^2(0) = -e^{2\alpha_2 h} \hat{Q}_2 - \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0),$$

$$\hat{\Phi}_{44}^2(0) = -\gamma^2 I_{x \times y}.$$

同理可定义  $\Sigma_{11}^1(\varepsilon_0)$  和  $\Sigma_{11}^2(\varepsilon_0)$ .

**证明** 由引理2可知,对于任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , LMI(33)和LMI(34)意味着

$$\hat{\Sigma}_i(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11}^i(\varepsilon) & \sqrt{h}\hat{G}_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{C}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\}. \quad (35)$$

其中

$$\hat{\Sigma}_{11}^1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{12}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{13}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{14}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{15}^1(\varepsilon) \\ * & \hat{\Phi}_{22}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{23}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{24}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{25}^1(\varepsilon) \\ * & * & \hat{\Phi}_{33}^1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44}^1(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{45}^1(\varepsilon) \\ * & * & * & * & \hat{\Phi}_{55}^1(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_{11}^2(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}^2(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{12}^2(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{13}^2(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{14}^2(\varepsilon) \\ * & \hat{\Phi}_{22}^2(\varepsilon) & \hat{\Phi}_{23}^2(\varepsilon) & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}_{33}^2(\varepsilon) & 0 \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44}^2(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

由引理3可知,对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,有 $E(\varepsilon)\hat{P}(\varepsilon) = \hat{P}^T(\varepsilon)E(\varepsilon) > 0$ 成立.

构建李雅普诺夫泛函

$$V_{\delta(t)}(t) = \zeta^T(t)\tilde{E}(\varepsilon)\hat{P}_{\delta(t)}(\varepsilon)\zeta(t) + \int_{t-h}^t \zeta^T(s)H^T e^* \hat{Q}_{\delta(t)} H \zeta(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \zeta^T(s)\tilde{E}(\varepsilon)H^T e^* \hat{R}_{\delta(t)} H \tilde{E}(\varepsilon)\zeta(s) ds d\theta. \quad (36)$$

其中

$$\hat{P}_i = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i1} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{i2} \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{i11} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i111} & 0 \\ \hat{P}_{i112} & \hat{P}_{i122} \end{bmatrix}, \hat{P}_{i12} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{P}_{i112}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{i1} = \hat{P}_{i11} + \varepsilon \hat{P}_{i12} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i111} & \varepsilon \hat{P}_{i112}^T \\ \hat{P}_{i112} & \hat{P}_{i122} \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{i21} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i211} & 0 \\ \hat{P}_{i212} & \hat{P}_{i222} \end{bmatrix}, \hat{P}_{i22} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{P}_{i212}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{i2} = \hat{P}_{i21} + \varepsilon \hat{P}_{i22} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i211} & \varepsilon \hat{P}_{i212}^T \\ \hat{P}_{i212} & \hat{P}_{i222} \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_{\delta(t)}(\varepsilon) > 0, \hat{Q}_{\delta(t)} > 0, \hat{R}_{\delta(t)} > 0, \alpha_{\delta(t)} > 0,$$

$$e^* = e^{2(-1)^{\delta(t)}\alpha_{\delta(t)}(t-s)}.$$

当 $t \in G_{1,n}$ 时,系统(14)中 $\delta(t) = i = 1$ ,结合引理1与式(35)可得 $\dot{V}_1(t) \leq -2\alpha_1 V_1(t) - e^T(t)e(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)$ .同理当 $t \in G_{2,n}$ 时,系统(14)中 $\delta(t)$

$= i = 2$ ,可得 $\dot{V}_2(t) \leq 2\alpha_2 V_2(t) - e^T(t)e(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)$ .于是可得

$$V(t) \leq e^{-2\alpha_1(t-g_n)} V_1(g_n) - \int_{g_n}^t \{e^{-2\alpha_1(t-\tau)} [e^T(\tau)e(\tau) - \gamma^2 \omega^T(\tau)\omega(\tau)]\} d\tau, \quad \forall t \in [g_n, g_n + b_n); \quad (37)$$

$$V(t) \leq e^{2\alpha_2(t-g_n-b_n)} V_2(g_n + b_n) - \int_{g_n+b_n}^t \{e^{2\alpha_2(t-\tau)} [e^T(\tau)e(\tau) - \gamma^2 \omega^T(\tau)\omega(\tau)]\} d\tau, \quad \forall t \in [g_n + b_n, g_{n+1}). \quad (38)$$

结合式(24)、(25)、(37)、(38)与 $V(t)$ 定义可知 $V(t) > 0, V_1(0) = 0$ ,通过观察可知 $e^{-2\alpha_1(t-g_n)} \cdot e^{-2\alpha_1 t} e^{-2\alpha_1(n-1)b_{\min}} e^{-2\alpha_2 \tau} > 0$ ,由此可推出

$$\int_0^{+\infty} e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{+\infty} \omega^T(t)\omega(t)dt \Rightarrow \|e(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2. \quad (39)$$

因此滤波误差切换系统(14)在零初始条件下是全局指数稳定的.  $\square$

下面,基于定理1和定理2,给出求解滤波器(4)增益与事件触发条件(5)权值矩阵的方法.定义 $A_{f_1} = \hat{P}_{12}^{-T} \bar{A}_{f_1}, A_{f_2} = \hat{P}_{22}^{-T} \bar{A}_{f_2}, B_{f_1} = \hat{P}_{12}^{-T} \bar{B}_{f_1}$ .根据定理2,用 $\bar{A}_{f_1}, \bar{A}_{f_2}, \bar{B}_{f_1}$ 替换式(26)与(27)中的非线性部分.可得到如下定理.

**定理3** 给定标量 $\varepsilon_0 \in (0, +\infty), \gamma \in (0, +\infty), \alpha_i \in (0, +\infty), \mu_i \in (1, +\infty), \sigma \in (0, 1)$ 和 $h \in (0, b_{\min})$ ,如果存在正定矩阵 $\hat{P}_i \in R^{2n \times 2n}, \hat{Q}_i \in R^{n \times n}, \hat{R}_i \in R^{n \times n}, W \in R^{n \times n}, \bar{A}_{f_1} \in R^{n \times n}, \bar{B}_{f_1} \in R^{n \times n}, \bar{C}_{f_1} \in R^{n \times n}, \bar{A}_{f_2} \in R^{n \times n}, \bar{C}_{f_2} \in R^{n \times n}$ 和矩阵 $\hat{S}_i \in R^{n \times n}$ 使得不等式(19)、(20)、(24)和(25)成立并且满足如下矩阵不等式:

$$\hat{S}_i(0) = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11}^i(0) & \sqrt{h}\hat{G}_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{C}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

$$\hat{S}_i(\varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11}^i(\varepsilon_0) & \sqrt{h}\hat{G}_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{C}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (41)$$

则可得如下 $H_\infty$ 滤波器增益使得滤波误差系统(14)满足如下 $H_\infty$ 性能:

$$\begin{cases} A_{f_1} = \hat{P}_{12}^{-T} \bar{A}_{f_1}, A_{f_2} = \hat{P}_{22}^{-T} \bar{A}_{f_2}, \\ B_{f_1} = \hat{P}_{12}^{-T} \bar{B}_{f_1}, \\ C_{f_1} = \bar{C}_{f_1}, C_{f_2} = \bar{C}_{f_2}. \end{cases} \quad (42)$$

定理3中所用符号定义如下:

$$i \in \{1, 2\},$$

$$\phi_{11}^1(0) = A^T \hat{P}_{11} + \hat{P}_{11}^T A + 2\alpha_1 E(0) \hat{P}_{11} + \hat{Q}_1 - \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0),$$

$$\phi_{12}^1(0) = A^T \hat{P}_{12} - \bar{A}_{f_1}^T,$$

$$\phi_{13}^1(0) = \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) + \frac{1}{h} \hat{S}_1^T,$$

$$\phi_{14}^1(0) = -\frac{1}{h} \hat{S}_1^T, \phi_{16}^1(0) = \hat{P}_{11}^T B,$$

$$\phi_{22}^1(0) = \bar{A}_{f_1}^T + \bar{A}_{f_1} + 2\alpha_1 E(0) \hat{P}_{12},$$

$$\phi_{23}^1(0) = -\bar{B}_{f_1} C, \phi_{25}^1(0) = -\bar{B}_{f_1},$$

$$\phi_{26}^1(0) = \hat{P}_{12}^T B, \phi_{27}^1(0) = -\bar{B}_{f_1} D,$$

$$\phi_{33}^1(0) = \sigma C^T W C - \frac{2}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) - \frac{1}{h} \hat{S}_1 - \frac{1}{h} \hat{S}_1^T,$$

$$\phi_{34}^1(0) = \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0) + \frac{1}{h} \hat{S}_1^T,$$

$$\phi_{35}^1(0) = \sigma C^T W, \phi_{37}^1(0) = \sigma C^T W D,$$

$$\phi_{44}^1(0) = -e^{-2\alpha_1 h} Q_1 - \frac{1}{h} E(0) e^{-2\alpha_1 h} \hat{R}_1 E(0),$$

$$\phi_{55}^1(0) = \sigma W - W, \phi_{57}^1(0) = \sigma W D,$$

$$\phi_{66}^1(0) = -\gamma^2, \phi_{77}^1(0) = -\gamma^2 + \sigma D^T W D,$$

$$\phi_{11}^2(0) = A^T \hat{P}_{21} + \hat{P}_{21}^T A + 2\alpha_2 E(0) \hat{P}_{21} + \hat{Q}_2 - \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0),$$

$$\phi_{12}^2(0) = A^T \hat{P}_{22} - \bar{A}_{f_2}^T,$$

$$\phi_{13}^2(0) = \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0) + \frac{1}{h} \hat{S}_2^T, \phi_{14}^2(0) = -\frac{1}{h} \hat{S}_2^T,$$

$$\phi_{22}^2(0) = \bar{A}_{f_2}^T + \bar{A}_{f_2} + 2\alpha_2 E(0) \hat{P}_{22},$$

$$\phi_{15}^2(0) = \hat{P}_{21}^T B, \phi_{25}^2(0) = \hat{P}_{22}^T B,$$

$$\phi_{33}^2(0) = -\frac{2}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0) - \frac{1}{h} \hat{S}_2 - \frac{1}{h} \hat{S}_2^T,$$

$$\phi_{34}^2(0) = \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0) + \frac{1}{h} \hat{S}_2^T,$$

$$\phi_{44}^2(0) = -e^{2\alpha_2 h} \hat{Q}_2 - \frac{1}{h} E(0) \hat{R}_2 E(0),$$

$$\phi_{55}^2(0) = -\gamma^2, \phi_{66}^2(0) = -\gamma^2,$$

$$\tilde{\Sigma}_{11}^1(0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}^1(0) & \phi_{12}^1(0) & \phi_{13}^1(0) \\ * & \phi_{22}^1(0) & \phi_{23}^1(0) \\ * & * & \phi_{33}^1(0) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} \phi_{14}^1(0) & 0 & \phi_{16}^1(0) & 0 \\ 0 & \phi_{25}^1(0) & \phi_{26}^1(0) & \phi_{27}^1(0) \\ \phi_{34}^1(0) & \phi_{35}^1(0) & 0 & \phi_{37}^1(0) \\ \leftarrow \phi_{44}^1(0) & 0 & 0 & 0 \\ * & \phi_{55}^1(0) & 0 & \phi_{57}^1(0) \\ * & * & \phi_{66}^1(0) & 0 \\ * & * & * & \phi_{77}^1(0) \end{array} \right],$$

$$\tilde{\Sigma}_{11}^2(0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}^2(0) & \phi_{12}^2(0) & \phi_{13}^2(0) \\ * & \phi_{22}^2(0) & 0 \\ * & * & \phi_{33}^2(0) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \phi_{14}^2(0) & \phi_{15}^2(0) & 0 \\ 0 & \phi_{25}^2(0) & 0 \\ \leftarrow \phi_{34}^2(0) & 0 & 0 \\ \phi_{44}^2(0) & 0 & 0 \\ * & \phi_{55}^2(0) & 0 \\ * & * & \phi_{66}^2(0) \end{bmatrix} \rightarrow$$

同理可定义  $\tilde{\Sigma}_{11}^1(\varepsilon_0)$  与  $\tilde{\Sigma}_{11}^2(\varepsilon_0)$ .

**证明** 由引理2可知,对于任意的  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,

LMI(40)和(41)意味着

$$\tilde{\Sigma}_i(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11}^i(\varepsilon) & \sqrt{h} \hat{G}_i^T H^T \hat{R}_i & \hat{C}_i^T \\ * & -R_i & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, i \in \{1, 2\}. \tag{43}$$

通过求解LMI(43)可求得滤波器增益与事件触发条件权值矩阵. □

**注3** 针对本文所研究的问题,文献[11]所提方法只能适用于当奇异摄动参数  $\varepsilon = 1$  的情况.当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,利用文献[11]方法会出现病态数值问题.本文结合引理1~引理3,设计依赖奇异摄动参数  $\varepsilon$  的李雅普诺夫泛函,引入新的自由权矩阵,有效解决了设计过程中出现的病态数值问题.

**注4** 当噪声为统计特性已知的白噪声时,  $H_\infty$  滤波器的滤波效果比卡尔曼滤波器的滤波效果稍差.但是,当噪声为统计特性未知的有色噪声或系统具有不确定性时,卡尔曼滤波的结果并不理想.因此本文利用  $H_\infty$  滤波器研究系统受到的未知周期的DoS攻击干扰情况下的状态估计问题.未来将考虑网络攻击可识别的情况,在卡尔曼滤波框架下研究奇异摄动信息物理系统状态估计方法.

### 3 仿真实验

本节将利用电路仿真实验验证所提方案的有效性。

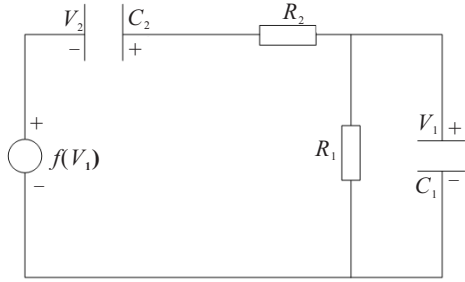


图2 RC电路系统

对于如图2所示的RC电路系统,  $f(V_1) = 2V_1$  为电压源, 令  $x_1 = V_2, x_2 = V_1$ , 则电路系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_2 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + 0.1w(t), \\ \frac{C_1}{C_2} \dot{x}_2(t) = \frac{1}{R_2 C_2} x_1 + \frac{1}{R_2 C_2} x_2 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2, \\ y_1(t) = x_1 + 0.1v(t), \\ y_2(t) = x_2 + 0.1v(t), \\ z(t) = x_1. \end{cases}$$

其中: 系统干扰输入是  $w(t) = 0.8e^{-0.1t} \sin t$ , 测量噪声  $v(t)$  是在  $[-0.1, 0.1]$  中的随机数,  $y(t)$  是测量输出,  $z(t)$  是被估计输出信号. RC电路系统的参数为  $R_1 = 100 \Omega, R_2 = 500 \Omega, C_1 = 0.001 \text{ F}, C_2 = 0.01 \text{ F}, \varepsilon_0 = C_1/C_2$ . 由  $\varepsilon_0$  的存在可知  $x_1$  和  $x_2$  是两个不同的时间尺度上的状态向量, 于是上述系统可以建模为如下奇异摄动系统模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1w(t), \\ \varepsilon_0 \dot{x}_2(t) = 0.2x_1 - 0.8x_2, \\ y_1(t) = x_1 + 0.1v(t), \\ y_2(t) = x_2 + 0.1v(t), \\ z(t) = x_1. \end{cases}$$

选择初始值  $x_0 = [1 \ 5]^T$ , 给定参数  $\varepsilon_0 = 0.1, \gamma_{\min} = 2.55, h = 0.1, \sigma = 0.6, \alpha_1 = 0.106, \alpha_2 = 0.1, \mu_1 = 1.02, \mu_2 = 1.02$ , 通过求解LMI(19)、(20)、(24)、(25)、(40)和(41)可得

$$\begin{aligned} A_{f_1} &= \begin{bmatrix} -0.41 & 0.03 \\ 0.21 & -1.04 \end{bmatrix}, B_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.02 \\ 0.04 & -0.07 \end{bmatrix}, \\ C_{f_1} &= [0.825 \ 0.07], A_{f_2} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.01 \\ 0.09 & -0.40 \end{bmatrix}, \\ C_{f_2} &= [0.74 \ 0.07], W = \begin{bmatrix} 1.64 & -0.79 \\ -0.79 & 4.71 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

图3给出了滤波误差轨迹  $e(t) = z(t) - z_f(t)$  和

DoS攻击, 表明基于事件触发机制的  $H_\infty$  滤波器能够降低未知周期DoS攻击对系统的不良影响, 且本文方法满足系统稳定性和  $H_\infty$  性能。

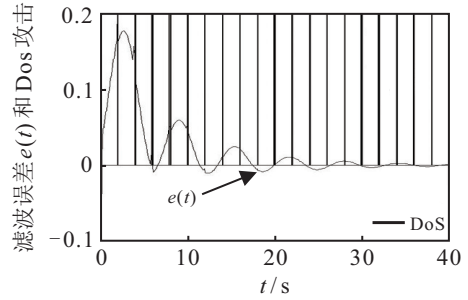


图3 滤波误差  $e(t)$  和DoS攻击

图4表示事件触发时刻与触发时间间隔, 横坐标表示系统触发时刻, 纵坐标表示触发时间间隔, 系统运行产生400个传输数据, 在经过网络攻击后的触发数据数目是166, 触发率为41.5%, 这表明所设计事件触发机制能够有效节约网络资源, 降低数据传输频率。

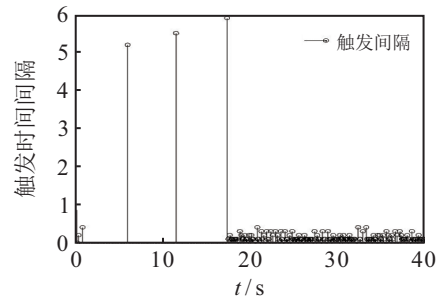


图4 触发时刻和触发间隔

综上所述, 针对在未知周期DoS攻击下奇异摄动CPS的状态估计问题, 本文提出的方法能够有效抵抗网络攻击的干扰, 引入事件触发机制可减少数据传输且能够保证期望的系统性能. 本文提出的切换滤波方法是建立在单通道测量信息的基础上, 也可以适用于受到网络攻击的分布式多通道系统的状态估计问题, 因此本文提出的方法具有较强的可扩展性。

### 4 结论

本文提出了奇异摄动CPS在未知周期的DoS攻击下的  $H_\infty$  滤波器设计方法. 主要贡献是基于系统多时间尺度结构特点构建了未知周期DoS攻击下奇异摄动CPS的事件触发多时间尺度  $H_\infty$  切换滤波器, 并利用李雅普诺夫稳定性理论和线性矩阵不等式技术给出了奇异摄动CPS切换滤波器设计方法, 这种事件触发切换滤波设计方法相较于已有的事件触发滤波设计方法可以根据系统是否受到网络攻击进行切换, 能够实现在网络攻击下系统的状态估计, 最大限度地保证滤波误差最终趋近于零, 并且避免了设计过程中的病态数值问题和奇诺现象. 仿真实验表明本文设

计方案是可行的。

### 参考文献(References)

- [1] 汪慕峰, 胥布工. DoS干扰攻击下的信息物理系统状态反馈稳定[J]. 控制与决策, 2019, 34(8): 1681-1687. (Wang M F, Xu B G. State feedback stabilization of cyber-physical system under DoS jamming attacks[J]. Control and Decision, 2019, 34(8): 1681-1687.)
- [2] Sampigethaya K, Poovendran R. Aviation cyber-physical systems: Foundations for future aircraft and air transport[J]. Proceedings of the IEEE, 2013, 101(8): 1834-1855.
- [3] Mo Y L, Kim T H J, Brancik K, et al. Cyber-physical security of a smart grid infrastructure[J]. Proceedings of the IEEE, 2012, 100(1): 195-209.
- [4] Liu Y G, Xu B G, Ding Y H. Convergence analysis of cooperative braking control for interconnected vehicle systems[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2017, 18(7): 1894-1906.
- [5] Lee I, Sokolsky O, Chen S J, et al. Challenges and research directions in medical cyber-physical systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2012, 100(1): 75-90.
- [6] Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1998, 454(1971): 903-995.
- [7] Franzè G, Tedesco F, Lucia W. Resilient control for cyber-physical systems subject to replay attacks[J]. IEEE Control Systems Letters, 2019, 3(4): 984-989.
- [8] Liu K, Guo H, Zhang Q R, et al. Distributed secure filtering for discrete-time systems under round-robin protocol and deception attacks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(8): 3571-3580.
- [9] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
- [10] Zhang H, Zheng X Y, Yan H C, et al. Codesign of event-triggered and distributed  $H_\infty$  filtering for active semi-vehicle suspension systems[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, 22(2): 1047-1058.
- [11] Hu S L, Yue D, Chen X L, et al. Resilient  $H_\infty$  filtering for event-triggered networked systems under nonperiodic DoS jamming attacks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(3): 1392-1403.
- [12] Cheng Z H, Yue D, Hu S L, et al. Event-based resilient  $H_\infty$  fuzzy filter design under DoS attacks[C]. The 5th IEEE International Conference on Cloud Computing and Intelligence Systems. Nanjing, 2018: 198-202.
- [13] Xu X, Mathur R M, Jiang J, et al. Modeling of generators and their controls in power system simulations using singular perturbations[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1998, 13(1): 109-114.
- [14] Petar Kokotović, Hassan K Khalil, John O'Reilly. Singular perturbation methods in control: Analysis and design[J]. Automatica, 1989, 25(6): 953-954.
- [15] Zhou J, Wen C Y, Yang G H. Adaptive backstepping stabilization of nonlinear uncertain systems with quantized input signal[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2): 460-464.
- [16] 李艳辉, 陶莹莹. 事件触发机制下分布时滞网络化控制系统  $H_\infty$  故障检测[J]. 控制与决策, 2020, 35(12): 3059-3065. (Li Y H, Tao Y Y. Event-triggered  $H_\infty$  fault detection for networked control systems with distributed delays[J]. Control and Decision, 2020, 35(12): 3059-3065.)
- [17] Abdelrahim M, Postoyan R, Daafouz J. Event-triggered control of nonlinear singularly perturbed systems based only on the slow dynamics[J]. Automatica, 2015, 52: 15-22.
- [18] Bhandari M, Fulwani D M, Gupta R. Event-triggered composite control of a two time scale system[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(4): 471-475.
- [19] Song J, Niu Y G. Dynamic event-triggered sliding mode control: Dealing with slow sampling singularly perturbed systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(6): 1079-1083.
- [20] 王燕舞, 杨武. 混杂奇异摄动系统的研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 950-959. (Wang Y W, Yang W. Survey on hybrid singularly perturbed systems[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 950-959.)
- [21] Liu J L, Gu Y Y, Zha L J, et al. Event-triggered  $H_\infty$  load frequency control for multiarea power systems under hybrid cyber attacks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(8): 1665-1678.
- [22] Yang C Y, Zhang Q L. Multiobjective control for T-S fuzzy singularly perturbed systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(1): 104-115.

### 作者简介

周林娜(1979—), 女, 副教授, 博士, 从事T-S模糊控制、奇异系统优化控制、奇异摄动系统稳定性分析与控制等研究, E-mail: linnazhou@cumt.edu.cn;

刘虹羽(1996—), 女, 硕士生, 从事信息物理系统、网络攻击的研究, E-mail: TS19060174P31@cumt.edu.cn;

马磊(1989—), 男, 助理研究员, 博士, 从事奇异摄动系统的分析与设计、网络化控制系统的滤波与控制、信息物理系统安全估计与控制等研究, E-mail: malei@cumt.edu.cn;

王国庆(1990—), 男, 副教授, 博士, 从事状态估计理论、多传感器信息融合和机器人组合导航等研究, E-mail: wangguoqing0632@163.com;

杨春雨(1979—), 男, 教授, 博士, 从事智能系统控制技术、奇异摄动系统优化控制等研究, E-mail: chunyu yang@cumt.edu.cn.