

# 基于系数图法的多输入多输出系统控制器设计方法

孟范伟<sup>1</sup>, 刘凯<sup>1†</sup>, 孟圣亚<sup>1</sup>, 庞爱平<sup>2</sup>

(1. 东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 贵州大学 电气工程学院, 贵阳 550025)

**摘要:** 多输入多输出系统的交互作用会限制适用于单输入单输出系统的多种先进设计方法的使用, 且多数关于多输入多输出系统控制研究只重视消除交互作用的影响, 忽略系统控制问题, 这样不但弱化系统的鲁棒性, 且设计过程复杂, 解耦后系统阶次也较高. 鉴于此, 提出一种基于系数图法的多入多出系统的控制器设计方法, 将多输入多输出系统解耦问题转化为参数优化问题. 首先, 给出目标函数和两个线性约束条件, 通过在频域基于粒子群算法优化目标函数, 从而设计补偿器实现解耦; 其次, 基于系数图法确定控制器结构及参数整定, 兼顾系统的稳定性和鲁棒性; 最后, 通过仿真实验验证所提出方法的有效性.

**关键词:** 多输入多输出系统; 交互作用; 解耦; 粒子群算法; 系数图法; 控制器设计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1131

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 孟范伟, 刘凯, 孟圣亚, 等. 基于系数图法的多输入多输出系统控制器设计方法[J]. 控制与决策, 2023, 38(1): 143-151.

## Controller design of MIMO systems based on coefficient diagram method

MENG Fan-wei<sup>1</sup>, LIU Kai<sup>1†</sup>, MENG Sheng-ya<sup>1</sup>, PANG Ai-ping<sup>2</sup>

(1. School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Electrical Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** The interaction of MIMO (multi-input multi-output) systems limits the use of many advanced design methods suitable for SISO (single input single output) systems. And most of the research on the control of MIMO systems only pays attention to eliminating the influence of interaction, but the problems of systems control are ignored, which weakens the system's robustness, the design process is complex, and the order of the system is higher after decoupling. Therefore, we propose a controller design method for MIMO systems based on the coefficient diagram method (CDM) to achieve control objectives relatively in the view of utility. The problem of decoupling of MIMO systems is transformed into parameter optimization problems. For this purpose, Firstly, the object function and two linear constraints are proposed, and the target function is optimized by the particle swarm optimization (PSO) in the frequency domain to design the compensator to achieve decoupling. Secondly, the CDM can design the controller structure and parameters flexibly according to the system's actual performance on the premise that it considers the stability, response characteristics, and robustness of the system. Therefore, the controller structure design and parameter tuning are based on the coefficient diagram method. Finally, the effectiveness of this method is verified by simulation examples.

**Keywords:** MIMO; interaction; decoupling; PSO; CDM; controller design

## 0 引言

具有多个控制输入和多个控制输出的系统通称为 MIMO 系统, 大多数工业控制系统都是 MIMO 系统, 如在化学系统中的过程蒸发器和化学反应器<sup>[1]</sup>、石油和天然气行业中蒸馏塔和热交换器<sup>[2]</sup>、机械系统中电动发电机和汽车传动系统<sup>[3]</sup>等. 因此, MIMO 控制技术越来越受到业界的关注. MIMO 系统控制最

重要的问题之一是耦合问题<sup>[4]</sup>, 即 MIMO 系统中的每个输入都会对其他输出造成影响, 而这种影响在大多数情况下是有害的, 使系统的稳定裕度下降, 甚至导致系统振荡和造成不希望的误差. 如何设计 MIMO 系统控制策略始终是工业控制系统所面临的一个难题.

有效的 MIMO 系统控制策略可以通过一系列

收稿日期: 2021-06-29; 录用日期: 2021-09-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(12462007); 河北省自然科学基金面上项目(F2019501012); 贵州省教育厅青年人才成长项目(黔科合(KY[2021]100)); 贵州省科技厅科学技术基金项目(黔科合基础([2020]1Y273)).

责任编辑: 刘向杰.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: 15732137808@163.com.

SISO分散式控制器或带有一系列解耦器的集中式MIMO控制器来实现<sup>[5-6]</sup>。SISO分散式控制器结构简单,方便调整、维护和实施。然而,当MIMO系统输入和输出通道间存在强耦合效应时,由于控制结构的灵活性有限,可能无法获得满意的性能<sup>[7]</sup>。带有一系列解耦器的集中式MIMO控制器可以处理强耦合效应,其设计过程分为解耦器设计和控制器设计。

解耦器设计策略有静态解耦和动态解耦,静态解耦根据稳态增益进行计算,需要控制的系统信息较少,可以有效减少模型不确定性影响的风险,但会对MIMO系统高频响应产生不利影响<sup>[8]</sup>。与静态解耦相比,动态解耦性能更优,理想解耦、简化解耦和反向解耦是工业中广泛研究和应用的动态解耦策略<sup>[9-11]</sup>。理想解耦的优点是解耦后传递函数矩阵简单,便于控制器参数的调整,然而,对于大多数MIMO系统而言,理想解耦器在实际应用中很难实现,甚至是无法实现的<sup>[12]</sup>。简化解耦提供一个简单的解耦结构,但会产生一个复杂的解耦系统。为了减少简化解耦器设计阶段的负担,Hägglund<sup>[13]</sup>提出了一种元素近似求和的方法。反向解耦方案兼顾理想解耦和简化解耦的优点<sup>[14-15]</sup>,但MIMO系统有时间延迟环节时,系统的稳定性有时无法保证。

在控制器设计方面,人们提出了许多智能解耦算法,葛锁良等<sup>[16]</sup>针对一类多变量非线性耦合系统提出了一种基于虚拟模型的非线性自适应控制器,Liu等<sup>[17]</sup>提出了一种基于等阶分数阶Butterworth滤波器的多变量系统内部模型控制设计方法。Ma<sup>[18]</sup>采用递归滤波自适应神经容错控制方案解决MIMO系统中交互引起的问题。刘建帮等<sup>[19]</sup>提出了基于控制模型的预测控制前馈解耦策略用于减少多变量预测计算量大、鲁棒性弱的问题。这些先进的MIMO控制器设计理念一方面难以理解,另一方面控制器复杂、阶次高,难以实现。反而一些基于经典或现代控制的设计方法避免了上述问题,解决了MIMO系统控制问题,文献[11]将PID控制器作为SISO分散式控制器用于MIMO系统控制,文献[20-21]将PID控制器用于集中式MIMO控制,文献[22-23]采用的正则化解耦方法通过解析求解过程模型的近似逆。

系数图法(coefficient diagram method, CDM)是一种结合经典控制理论和现代控制理论优点的代数设计方法<sup>[3,24]</sup>,理论基础是李雅普诺夫提出的稳定的充分条件。CDM控制器设计过程简单易懂且易于实现,可以保证系统兼顾稳定性、响应特性和鲁棒性。本文给出一种基于CDM的MIMO系统控制

器设计方法,通过在频域求解一个基于粒子群算法(particle swarm optimization, PSO)的线性优化问题,优化补偿器未知参数实现解耦。基于CDM进行集中式控制器结构设计和参数整定,相对于其他解耦设计方法,本文方法简单易懂易于实现,兼顾系统稳定性、响应特性和鲁棒性。另外,现有研究多数基于控制模型结构解耦,本文转换设计思路,给出一套体系化的MIMO系统控制器设计方法,主要贡献如下:一是将解耦问题转化为参数优化问题,提出目标函数和2个线性约束条件,简化设计流程,降低设计难度;二是现阶段CDM多应用于SISO系统控制器设计,对于MIMO系统控制器设计缺乏成功设计的实例,将CDM方法应用于MIMO系统的研究有待推进,为了弥补现有研究的不足,给出一种基于CDM鲁棒控制器的设计策略,为其他学者提供借鉴经验。

## 1 解耦设计

目前,针对MIMO系统交互作用有两种解决思路:一种是利用现代控制理论,一种是将交互作用限制在一定程度并将其视为多个SISO系统,后者称为解耦控制。通常而言,解耦控制操作简单,多被使用。本文通过在频域中设计补偿器进行解耦设计,同时为了检验所设计的补偿器是否达到预期的解耦效果,给出MIMO系统交互作用度量式。

### 1.1 补偿器设计

MIMO系统的模型可由传递函数 $G_p(s) \in R^{n \times m}$ 表示为

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(s) & \cdots & g_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其特性显示出变量间存在交互作用, $g_{nm}(s)$ 为 $G_p(s)$ 中的传递函数元素。设计的补偿器 $G_c(s) \in R^{m \times n}$ 为

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & \cdots & h_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & \cdots & h_{mn}(s) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 $h_{mn}$ 为 $G_c(s)$ 中的传递函数元素。为了降低补偿器 $G_c(s)$ 的难度,将其设计为常数矩阵。当补偿器 $G_c$ 作用于MIMO系统 $G_p(s)$ 时,得到的解耦系统 $Q(s) \in R^{n \times n}$ 为

$$Q(s) = G_p(s)G_c = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(s) & \cdots & g_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(s) & \dots & f_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(s) & \dots & f_{nn}(s) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

设计补偿器的目的是使解耦系统  $Q(s)$  在所有频域实现对角化, 即非对角线元素  $f_{lr}(s) = 0$  ( $l \neq r, l = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots, n$ ), 这样其交互作用最小, 解耦效果最好, 但很难找到这样的理想补偿器. 因此, 选取某一特定频率  $s = j\omega_0$  设计补偿器. 需要说明的是, 某一特定频率  $s = j\omega_0$  的选取取决于控制对象, 并且需要设计者借助设计经验经过反复实验进行验证.

将  $Q(s) = G_p(s)G_c$  中第  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) 列元素用  $s = j\omega_0$  表示, 有

$$f_{lr}(j\omega_0) = g_l(j\omega_0)\hat{h}_r = (\alpha_l + j\beta_l)\hat{h}_r, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

其中:  $g_l(j\omega_0)$  为  $G_p(j\omega_0)$  第  $l$  行行向量,  $\hat{h}_r$  为  $G_c$  第  $r$  列列向量,  $\alpha_l = \text{Re}\{g_l(j\omega_0)\}, \beta_l = \text{Im}\{g_l(j\omega_0)\}$ .

为了实现  $Q(j\omega_0)$  对角化, 令  $Q(j\omega_0)$  第  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) 列的非对角线元素绝对值平方等于零, 即

$$|f_{lr}(j\omega_0)|^2 = \hat{h}_r^T(\alpha_l\alpha_l^T + \beta_l\beta_l^T)\hat{h}_r = 0, \quad l \neq r. \quad (5)$$

在等式(5)条件下, 可以求取最优解  $\hat{h}_r$ , 从而获得补偿器  $G_c$  和解耦系统  $Q(s)$ . 但解耦系统  $Q(s)$  可能无法满足解耦设计要求, 原因一是某特定频率  $s = j\omega_0$  条件下, 等式(5)只能保证  $Q(j\omega_0)$  非对角线元素绝对值平方  $|f_{lr}(j\omega_0)|^2$  ( $l \neq r$ ) 等于0, 无法保证对角线元素的绝对值平方  $|f_{lr}(j\omega_0)|^2$  ( $l = r$ ) 不等于0或不趋于0. 若设计的补偿器  $G_c$  无法保证  $Q(s)$  在某特定频率  $s = j\omega_0$  实现对角化, 则无法保证  $Q(s)$  在整个频域实现解耦. 原因二在于求取的  $\hat{h}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) 可能是平凡解, 这样设计的补偿器是没有意义的.

考虑到以上不足, 在式(5)约束条件的基础上作以下补充: 1) 选取  $Q(j\omega_0)$  第  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) 列对角线元素绝对值的平方  $|f_{lr}(j\omega_0)|^2$  ( $l = r$ ) 为目标函数, 求取其最大值; 2) 为了防止求取的  $\hat{h}_r$  出现平凡解, 增加下式作为约束条件:

$$\hat{h}_r^T\hat{h}_r = 1. \quad (6)$$

综上, MIMO 系统解耦问题转化为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \max f(\hat{h}_r) &= |f_{lr}(j\omega_0)|^2 = \hat{h}_r^T(\alpha_l\alpha_l^T + \beta_l\beta_l^T)\hat{h}_r, \\ & \quad l = r; \\ \text{s.t. } |f_{lr}(j\omega_0)|^2 &= \hat{h}_r^T(\alpha_l\alpha_l^T + \beta_l\beta_l^T)\hat{h}_r = 0, \\ & \quad l \neq r, \hat{h}_r^T\hat{h}_r = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

## 1.2 补偿器参数调试

本文采用 PSO 优化目标函数. 首先, 编译适应度函数, 为了方便编程, 取  $-|f_{lr}(j\omega_0)|^2$  ( $l = r$ ) 作为目标函数, 求其最小值, 适应度函数为

$$\begin{aligned} \text{Fit}[f(\hat{h}_r)] &= -|f_{lr}(j\omega_0)|^2 = \\ & -\hat{h}_r^T(\alpha_l\alpha_l^T + \beta_l\beta_l^T)\hat{h}_r, \quad l = r. \end{aligned} \quad (8)$$

通过以上频域设计的适应度函数及约束条件, 可以通过 PSO 调试并求取  $\hat{h}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), 从而获得补偿器  $G_c$ . 通常 PSO 算法迭代停止条件为最大迭代次数或找到的最优解与真实最优解的距离达到算法精度要求指标. 显然, 当真实最优解未知时, 该停止条件无法自动控制算法的终止时间. 如果优化算法具有整体收敛趋势, 则当种群粒子收敛于最优解时, 种群粒子的平均适应度值 ( $F_{\text{ave}}$ ) 与最小适应度值 ( $F_{\text{min}}$ ) 必然非常接近, 反之亦然. 为此, 将 PSO 算法优化精度的最大容忍度定义为

$$A_{\text{Cbest10}} = |F_{\text{ave}} - F_{\text{min}}| \leq 10^{-3}. \quad (9)$$

当 POS 算法满足最大迭代次数或者优化算法精度的最大容忍度时, 迭代停止.

PSO 本质上是一种随机算法. 表 1 给出了 PSO 的具体参数设置.

表 1 PSO 参数设置

参数	取值
种群大小	50
迭代次数	100
惯性权重	0.35
认知学习因子	1.5
社会学习因子	2.5

## 1.3 交互作用度量式

补偿器的设计过程第 1.1 节已经给出, 但由于解耦系统  $Q(s)$  变量之间的交互作用大小没有一个具体的数值度量, 所设计的补偿器能否达到预期的解耦效果并不清楚. 为此, 给出一种 MIMO 系统交互作用度量式, 用于评价补偿器实现解耦程度的效果. 该等式成立的依据是对角矩阵的对角线元素等于其逆的对角线元素的倒数.

假设解耦系统的被控变量为  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ , 操纵变量为  $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ , 假定  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 控制  $y_i$ . 对于  $Q(s)$  的第  $i$  条通道, 在其他回路呈开路状态, 即所有其他操纵变量都为零的情况下, 找到该通道的开环增益, 有

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_i}\right)_{u_n=0, n \neq i} = f_{ii}. \quad (10)$$

在其他回路呈闭合状态,即所有其他被控变量为零的情况下,找到该通道的开环增益,有

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_i}\right)_{y_n=0, n \neq i} = \tilde{f}_{ii}. \quad (11)$$

这里给出MIMO系统 $Q(s)$ 交互作用的度量式为

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{|f_{ii} - \tilde{f}_{ii}|}{|\tilde{f}_{ii}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

当解耦系统 $Q(s)$ 实现对角化时, $E = 0$ ,所以当式(12)等于零或者接近零时表明其他通道与该通道无关联或关联很小,解耦效果良好.

**注1** 式(10)和(11)是建立在MIMO系统稳态的情况下,但这种情况通常在其他频率上不会保持,因此交互作用度量式(12)存在局限性,其只能作为MIMO系统交互作用大小的度量式,不能作为MIMO系统是否解耦的判断式.

## 2 CDM控制器设计

第1节解耦设计可以得到交互作用最小化的解耦系统 $Q(s)$ ,但其开环传递函数复杂且阶次高,因此对其进行控制系统设计时,如果既要满足系统稳定性和响应特性,又要保证系统鲁棒性,则控制器的设计将会变得复杂,CDM能够有效地解决此类问题.

CDM是一种结合经典控制理论和现代控制理论优点的代数设计方法<sup>[24]</sup>,比传递函数和状态空间表达式更容易理解和精确.此方法涉及特征多项式和控制器多项式的设计,采用双系数整体配置传递函数.该方法首先定义了闭环传递函数控制器和特征多项式的形式和阶次,然后基于设计规范找到控制器的系数多项式,稳定性、响应特性和鲁棒性都可以通过合理选择系数进行分析.

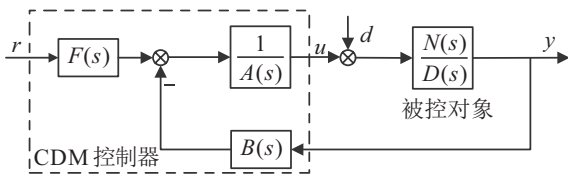


图1 CDM控制系统标准框图

对于SISO的线性系统,利用CDM设计的标准框图如图1所示.它由被控对象和CDM控制器两部分组成,其中 $r$ 、 $u$ 、 $y$ 和 $d$ 分别为参考输入、控制量、输出量和扰动量.控制器的控制作用 $u$ 可能受到干扰信号 $d$ 的干扰, $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别为被控对象的分子和分母,定义为

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \\ D(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0. \quad (13)$$

其中 $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ 和 $d_n, d_{n-1}, \dots, d_0$ 为实系数,且 $m \leq n$ . $A(s)$ 和 $B(s)$ 分别为控制器的分母和分子,定

义为

$$A(s) = \sum_{i=0}^p l_i s^i, \quad B(s) = \sum_{i=0}^q k_i s^i, \quad (14)$$

$l_i$ 、 $k_i$ 为控制器未知系数,且 $i \leq n$ . $A(s)$ 和 $B(s)$ 的选取有许多准则,扰动是其中之一,设置 $l_0 = 0$ 时,扰动信号的影响可以得到很好地抑制<sup>[25]</sup>. $F(s)$ 为控制器参考分子,可以保证闭环系统性能中的稳态误差减小至零,定义为

$$F(s) = \left(\frac{P(s)}{N(s)}\right)_{|s=0}, \quad (15)$$

其中 $P(s)$ 为闭环系统的特征多项式.由图1可以得到

$$P(s) = D(s)A(s) + N(s)B(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \\ a_i > 0, \quad (16)$$

其中 $a_i$ 为实系数.CDM有关特征多项式的设计参数分别是等效时间常数 $\tau$ 和稳定指数 $\gamma_i$ ,定义为

$$\begin{cases} \tau = \frac{a_1}{a_0}; \\ \gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1}a_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \gamma_0 = \gamma_n = \infty. \end{cases} \quad (17)$$

等效时间常数 $\tau$ 与调节时间、带宽密切相关,决定系统响应的快速性.如果调节时间由 $t_s$ 表示,则根据Manabe标准形式<sup>[24]</sup>,它与等效时间常数 $t_s$ 的关系为 $\tau = t_s / (2.5 \sim 3)$ .

稳定指数 $\gamma_i$ 的选取决定了系统的稳定性和时域响应特性,根据Manabe标准形式,稳定指数 $\gamma_i$ 定义为

$$\gamma_1 = 2.5, \quad \gamma_i = 2, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \gamma_0 = \gamma_n = \infty. \quad (18)$$

使用等效时间常数 $\tau$ 和稳定指数 $\gamma_i$ 可以得到特征多项式为

$$P(s) = a_0 \left[ \left\{ \sum_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^i} \right) (\tau s)^i \right\} + \tau s + 1 \right]. \quad (19)$$

通过比较特征多项式(16)与(19)的各系数,可以得到CDM控制器参数.

## 3 总体设计思路

针对图2中 $n \times m$ 的MIMO系统设计补偿器 $G_c$ 和集中式CDM控制器,并确定控制器参数.系统性设计思路保证了解耦设计方法在大、小型系统中的可实现性,同时,当MIMO系统交互作用最小化以较高的精度实现时,由于CDM的鲁棒性,控制器可以达到良好的控制效果.

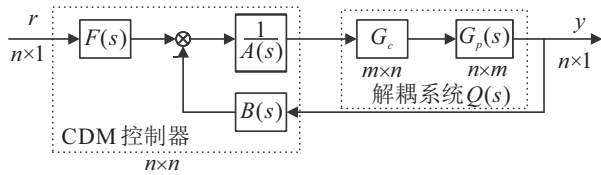


图2 MIMO系统控制框图

针对MIMO系统的解耦控制和控制器设计可以总结为以下步骤。

step 1: 通过补偿器实现解耦设计。

使用前文解耦方法,可以得到交互作用最小化的MIMO系统 $Q(s)$ ,并将其视为 $n$ 个SISO系统.然后针对每个SISO系统进行CDM控制器设计.为了方便CDM控制器设计,如果SISO系统开环传递函数中有延迟环节,则利用文献[26]的改进pade近似方法对延迟环节进行处理.根据文献[26]结果,三阶改进pade近似有

$$e^{-sL} = \frac{60 - 24sL + 3(sL)^2}{60 + 36sL + 9(sL)^2 + (sL)^3}. \quad (20)$$

后文的SISO系统CDM控制器设计过程适用于所有SISO系统.

step 2: SISO系统CDM控制器设计过程.

step 2.1: 设置SISO控制器参数 $A(s)$ 和 $B(s)$ ,为了抑制扰动,设置 $l_0 = 0$ .

step 2.2: 选择CDM设计参数.本文所使用的稳定指数 $\gamma_i$ 为式(17)Manabe标准形式,只要确定等效时间常数 $\tau$ 的值即可获得控制器参数. $\tau$ 值主要决定系统的响应时间,一般根据系统调节时间的设计要求确定.

step 2.3: 求解SISO控制器参数 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $F(s)$ .利用待定系数法或Sylvester形式的线性方程求解控制器多项式 $A(s)$ 和 $B(s)$ 系数,然后根据式(15)获得参考分子多项式 $F(s)$ ,在得到 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $F(s)$ 后,CDM控制器设计完成.

step 3: MIMO控制器仿真.

$n$ 个SISO系统的CDM控制器设计完成后,将其应用于图2中并加入补偿器 $G_c$ 控制系统进行仿真.

### 4 仿真实验

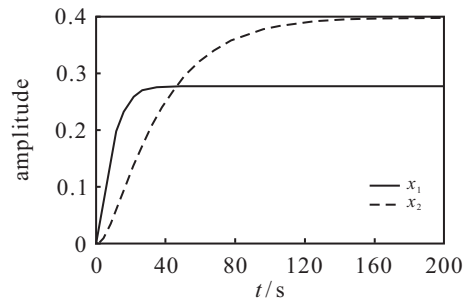
本节对3个独特的控制目标进行仿真实验,以证明所提出方法的有效性,实验均以大小为1的阶跃响应进行评估.状态变量设置为 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,系统输出设置为 $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ .使用补偿器进行解耦,当MIMO系统交互作用最小化时,将其视为 $n$ 个SISO系统,设置每个SISO系统为 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ .

### 4.1 $2 \times 2$ 型二阶惯性系统

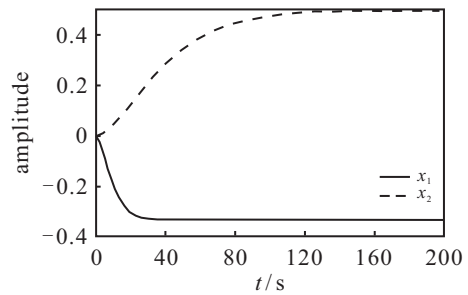
考虑文献[27]的两输入两输出二阶惯性系统(糖厂模型),其过程为

$$G_P = \begin{bmatrix} \frac{0.28}{21s^2 + 10s + 1} & \frac{-0.33}{30s^2 + 11s + 1} \\ \frac{0.4}{270s^2 + 39s + 1} & \frac{0.5}{432s^2 + 42s + 1} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

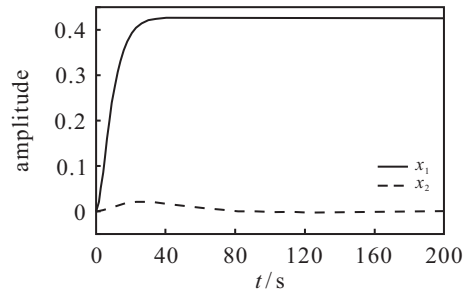
当不采用解耦设计时,利用Matlab对原系统(21)进行仿真.其阶跃响应曲线如图3(a)和图3(b)所示.



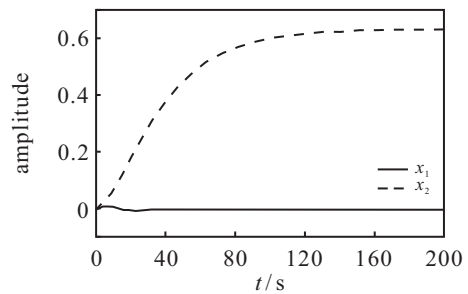
(a) 解耦前 $r_1=1, r_2=0$



(b) 解耦前 $r_1=0, r_2=1$



(c) 解耦后 $r_1=1, r_2=0$



(d) 解耦后 $r_1=0, r_2=1$

图3 解耦设计前后系统(21)的阶跃响应

由图3(a)可见,当第1个输入发生阶跃变化时( $r_1 = 1$ ),第2个输出 $y_2$ 受到较大的影响.同样由图3(b)可见,当第2个输入发生阶跃变化时( $r_2 = 1$ ),第

1个输出  $y_1$  也受到第2个输入  $r_2$  阶跃变化的影响. 两回路存在明显关联, 因此系统(21)是存在交互作用的关联系统, 采用解耦设计方法来消除原系统的交互作用.

选取角频率  $\omega_0 = 0.13$ , 求得补偿器为

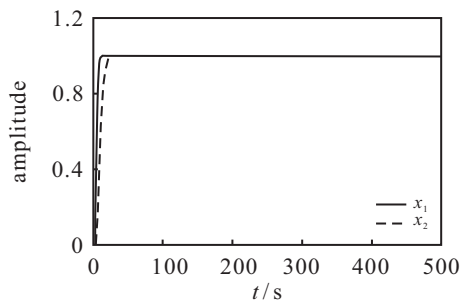
$$G_c = \begin{bmatrix} 0.7807 & 0.7606 \\ -0.6256 & 0.6507 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

将补偿器(22)作用于原系统(21)得到解耦系统  $Q(s)$ ,

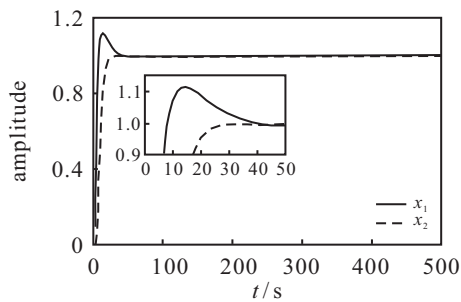
表2 等效时间常数  $\tau$  和 CDM 控制多项式参数 (I)

	$A_1$	$A_2$
$\tau$	11.2	16
$F(s)$	1.6811	0.8358
$A(s)$	$0.0313s^2 + 0.0855s$	$0.0921s^2 + 0.0928s$
$B(s)$	$6.9322s^2 + 6.1273s + 1.681$	$25.3384s^2 + 7.9861s + 0.83576$

使用表2的 CDM 控制多项式参数控制  $A_1$  和  $A_2$ , 结果如图4(a)所示, 两个单回路 SISO 系统响应快速, 无超调.



(a) CMD控制  $A_1$  和  $A_2$



(b) 本文方法控制 MIMO 系统(21)

图4 两种方法分别控制  $A_1$ 、 $A_2$  和系统(21)的阶跃响应

图4(b)为在被控对象(21)前插入补偿器(22), 使用表2的 CDM 参数进行控制的结果. 受动态响应部分交互作用的影响, 系统超调量增加.

为了与本文方法比较, 使用文献[27]设计的补偿器(23)和 PID 控制器进行仿真. 表3总结了使用式(12)评价补偿器(22)和(23)的结果. 图5显示了 PID 控制器与本文方法 CDM 控制器控制解耦系统  $Q(s)$  的结果. 有

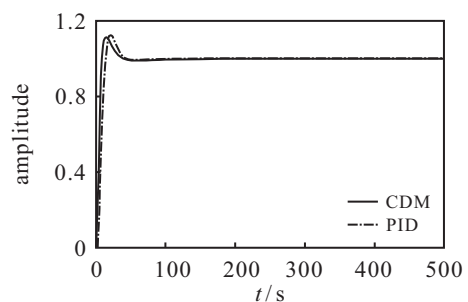
用 Matlab 进行仿真, 得到图3(c)和图3(d)阶跃响应曲线. 由图3(c)和图3(d)可见, MIMO 系统的交互作用得到了有效抑制, 尤其是系统的静态响应部分. 但在动态响应部分还存在微弱的交互作用, 整体解耦效果良好.

解耦后的两个 SISO 系统设为  $A_1$  和  $A_2$ , 使用稳定指数  $\gamma_i$  和等效时间常数  $\tau$  计算 CDM 控制多项式参数, 参数取值见表2.

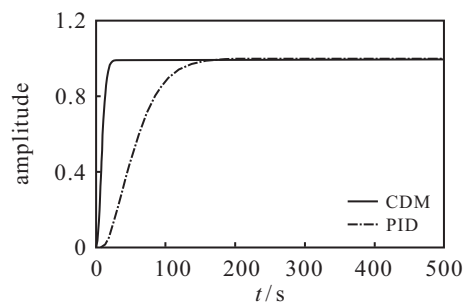
$$G_c = \begin{bmatrix} 0.174 & 0.479 \\ -0.219 & 0.503 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

表3 评价式的比较

	文献[27]	本文方法
评价值	0.048587	0.000067



(a) 文献[27]方法



(b) 本文方法

图5 两种方法控制解耦系统  $Q(s)$  阶跃响应

由表3可见, 采用本文方法设计的补偿器解耦效果更好. 由图5可见, 与 PID 控制相比, 使用本文方法设计控制器控制系统调节时间更小, 原因在于 CDM 控制器可以根据设计需要灵活设计系统调节时间, 使得系统控制效果最优.

为了验证本文方法的鲁棒性,对原系统(21)存在扰动和控制对象存在模型误差的情况进行测试.当原系统存在阶跃扰动时,控制结果如图6(a)所示,可见,扰动信号的影响在短时间内平息.假设正确的系统模型由式(24)表示,存在误差的系统模型由式(21)表示,将补偿器(22)作用于式(24),使用CDM控制器进行控制,实验结果如图6(b)所示.由图6(b)可见,当模型存在测量误差时,使用本文方法控制效果良好.

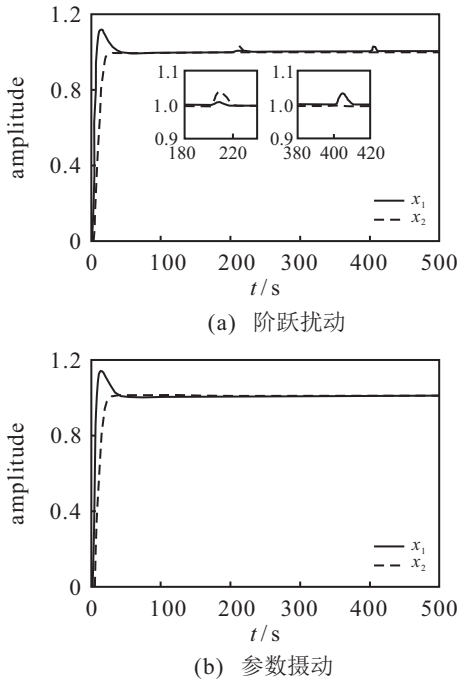


图6 鲁棒性验证

以上比较表明本文方法的鲁棒性较强.有

$$G_P = \begin{bmatrix} \frac{0.28}{22s^2 + 10s + 1} & \frac{-0.34}{30s^2 + 10s + 1} \\ \frac{0.41}{270s^2 + 38s + 1} & \frac{0.5}{431s^2 + 40s + 1} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

4.2 2 × 3型二阶惯性系统

被控对象(21)增加一列输出变为

$$G_p = \begin{bmatrix} \frac{0.28}{21s^2 + 10s + 1} & \frac{-0.33}{30s^2 + 11s + 1} \\ \frac{0.4}{270s^2 + 39s + 1} & \frac{0.5}{432s^2 + 42s + 1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{0.38}{45s^2 + 12s + 1} \\ \frac{0.6}{543s^2 + 68sv + 1} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

对于被控对象(25)的非方阵系统,选取角频率  $\omega_0 = 0.21$ ,求得预补偿器为

$$G_c = \begin{bmatrix} 0.3509 & 0.3106 \\ -0.8209 & 0.8160 \\ 0.4522 & 0.4910 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

使用评估式(12)对补偿器(26)作用于被控对象(25)后得到的解耦系统  $Q(s)$  进行评估,结果为0.000023,表明解耦设计后被控对象(25)交互作用弱,解耦效果较好.

解耦后的两个SISO系统设为  $A_1$  和  $A_2$ .使用稳定指数  $\gamma_i$  和等效时间常数  $\tau$ ,计算CDM控制多项式参数,相关参数取值见表4.

表4 等效时间常数  $\tau$  和CDM控制多项式参数(II)

	$A_1$	$A_2$
$\tau$	24	60
$F(s)$	1.8301	0.3519
$A(s)$	$0.003s^2 + 0.0168s$	$0.0021s^2 + 0.0048s$
$B(s)$	$2.6969s^2 + 3.9143s + 1.8300$	$2.8300s^2 + 1.6805s + 0.3547$

使用表4的CDM控制器控制  $A_1$  和  $A_2$ ,结果如图7(a)所示.图7(b)为在被控对象(25)前插入补偿器(26),使用表4的CDM参数进行控制的结果.可以看出受交互作用的影响,系统超调量少许增加.

4.3 2 × 2型二阶带延迟环节的惯性系统

被控对象(21)增加延迟环节变为

$$G_P = \begin{bmatrix} \frac{0.28}{21s^2 + 10s + 1} e^{-0.71s} & \frac{-0.33}{30s^2 + 11s + 1} e^{-2.24s} \\ \frac{0.4}{270s^2 + 39s + 1} e^{-0.59s} & \frac{0.5}{432s^2 + 42s + 1} e^{-0.68s} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

使用本文方法,选取角频率  $\omega_0 = 0.28$ ,求得补偿器为

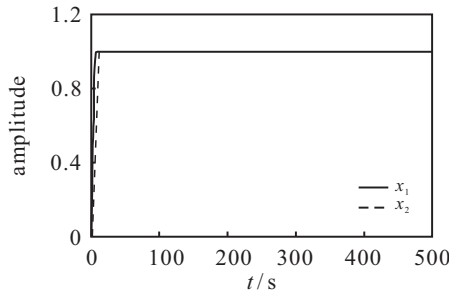
$$G_c = \begin{bmatrix} 0.7809 & 0.7625 \\ -0.6247 & 0.6470 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

使用式(12)对补偿器(28)作用于被控对象(27)后得到的解耦系统  $Q(s)$  进行评估,结果为0.00000057,表明使用补偿器解耦的系统交互作用微乎其微,解耦效果良好.

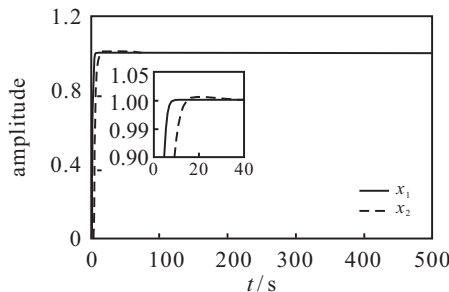
解耦后的两个SISO系统设为  $A_1$  和  $A_2$ ,采用文献[26]的改进pade近似方法对延迟环节进行近似处理.然后使用稳定指数  $\gamma_i$  和等效时间常数  $\tau$  计算CDM控制多项式参数,相关参数取值见表5.

表5 等效时间常数 $\tau$ 和CDM控制多项式参数(III)

	$A_1$	$A_2$
$\tau$	76	64
$F(s)$	0.0017	0.00028
$A(s)$	$0.3665s^2 - 0.0016s$	$0.0015s^2 + 0.000555s$
$B(s)$	$0.2464s^2 + 0.1321s + 0.0017$	$0.0728s^2 + 0.0102s + 0.0002773$



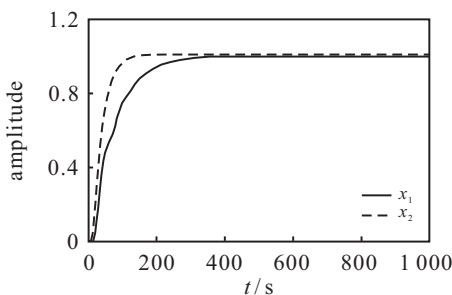
(a) CDM控制 $A_1$ 和 $A_2$



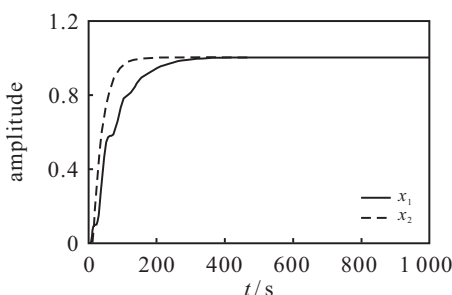
(b) 本文方法控制MIMO系统(25)

图7 两种方法分别控制 $A_1$ 、 $A_2$ 和系统(25)的阶跃响应

使用表5的CDM控制多项式参数 $A_1$ 和 $A_2$ ,结果如图8(a)所示.图8(b)为在被控对象(27)前插入补偿器(28),使用表5的CDM参数进行控制的结果.图8(a)与图8(b)基本一致,表明解耦效果较好.



(a) CDM控制 $A_1$ 和 $A_2$



(b) 本文方法控制MIMO系统(27)

图8 两种方法分别控制 $A_1$ 、 $A_2$ 和系统(27)的阶跃响应

## 5 结论

本文针对MIMO系统交互作用提出了一种基于系数图法的多变量系统控制器设计方法.解耦设计通过在频域中设计补偿器实现,并通过PSO对补偿器参数进行优化.利用统计检验对包括PSO在内的4种进化算法进行比较,以表明PSO的优势.解耦后系统开环传递函数复杂且阶次高,故基于CDM进行控制器结构设计和参数整定.最后,针对3个独特的控制目标进行仿真实验,结果表明,MIMO系统解耦效果良好,设计后的系统能够同时兼顾稳定性、响应特性和鲁棒性,验证了所提出方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Liu L, Yin S, Zhang L X, et al. Improved results on asymptotic stabilization for stochastic nonlinear time-delay systems with application to a chemical reactor system[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(1): 195-204.
- [2] Kumar S D, Chandramohan D, Purushothaman K, et al. Optimal hydraulic and thermal constrain for plate heat exchanger using multi objective wale optimization[J]. Materials Today: Proceedings, 2020, 21: 876-881.
- [3] 孟范伟, 宋朋涛, 刘凯, 等. 三明治结构挠性传动系统的PID-P复合控制[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2432-2440.  
(Meng F W, Song P T, Liu K, et al. PID-P compound control of flexible transmission system with sandwich structure[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37(11): 2432-2440.)
- [4] Chen X M, Zhang S, Li Q L. A review of mutual coupling in MIMO systems[J]. IEEE Access, 2018, 6: 24706-24719.
- [5] Khandelwal S, Detroja K P. The optimal detuning approach based centralized control design for MIMO processes[J]. Journal of Process Control, 2020, 96: 23-36.
- [6] Goud E C, Rao A S, Chidambaram M. Improved decentralized PID controller design for MIMO processes[J]. IFAC-Papers OnLine, 2020, 53(1): 153-158.
- [7] Maghade D K, Patre B M. Decentralized PI/PID

- controllers based on gain and phase margin specifications for TITO processes[J]. ISA Transactions, 2012, 51(4): 550-558.
- [8] Lee J, Hyun Kim D, Edgar T F. Static decouplers for control of multivariable processes[J]. AIChE Journal, 2005, 51(10): 2712-2720.
- [9] Vu T N L, Linh L. Analytical design of imc-pid controller for ideal decoupling embedded in multivariable smith predictor control system[J]. International Journal of Electrical and Information Engineering, 2016, 10(7): 879-883.
- [10] Chuong V L, Vu T N L, Truong N T N, et al. An analytical design of simplified decoupling Smith predictors for multivariable processes[J]. Applied Sciences, 2019, 9(12): 2487.
- [11] Garrido J, Lara M, Ruz M L, et al. Decentralized PID control with inverted decoupling and superheating reference generation for efficient operation: Application to the Benchmark PID 2018[J]. IFAC-Papers OnLine, 2018, 51(4): 710-715.
- [12] Gagnon E, Pomerleau A, Desbiens A. Simplified, ideal or inverted decoupling?[J]. ISA Transactions, 1998, 37(4): 265-276.
- [13] Hägglund T. The one-third rule for PI controller tuning[J]. Computers & Chemical Engineering, 2019, 127: 25-30.
- [14] Luyben W L. Distillation decoupling[J]. AIChE Journal, 1970, 16(2): 198-203.
- [15] 赵志诚, 徐娜, 张井岗. 多变量时滞非方系统的分数阶 Smith 预估控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(6): 1331-1337.  
(Zhao Z C, Xu N, Zhang J G. Fractional order Smith predictor control for non-square systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2019, 34(6): 1331-1337.)
- [16] 葛锁良, 张凯, 平兆武. 基于虚拟模型的自适应解耦抗扰控制[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 319-326.  
(Ge S L, Zhang K, Ping Z W. Virtual model based adaptive decoupling disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(2): 319-326.)
- [17] Liu K Y, Chen J. Internal model control design based on equal order fractional butterworth filter for multivariable systems[J]. IEEE Access, 2020, 8: 84667-84679.
- [18] Ma T. Recursive filtering adaptive neural fault-tolerant control for uncertain multivariable nonlinear systems[J]. European Journal of Control, 2021, 59: 274-289.
- [19] 刘建帮, 孙威, 张宪霞, 等. 多变量预测控制工程应用的控制模型前馈解耦策略[J]. 控制与决策, 2019, 34(5): 1094-1102.  
(Liu J B, Sun W, Zhang X X, et al. A feedforward decoupling strategy based on control model for the engineering application of multi-variable predictive control[J]. Control and Decision, 2019, 34(5): 1094-1102.)
- [20] Liao Q F, Sun D. Sparse and decoupling control strategies based on Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(2): 947-960.
- [21] 栾小丽, 王志强, 刘飞. 多变量非方系统集中式 PI 控制器设计[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 811-816.  
(Luan X L, Wang Z Q, Liu F. Centralized PI control for multivariable non-square systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 811-816.)
- [22] Cai W J, Ni W, He M J, et al. Normalized decoupling — A new approach for MIMO process control system design[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2008, 47(19): 7347-7356.
- [23] Shen Y L, Cai W J, Li S Y. Normalized decoupling control for high-dimensional MIMO processes for application in room temperature control HVAC systems[J]. Control Engineering Practice, 2010, 18(6): 652-664.
- [24] Manabe S. Coefficient diagram method[J]. IFAC Proceedings Volumes, 1998, 31(21): 211-222.
- [25] Manabe S. The application of coefficient diagram method to ACC benchmark problem[C]. Asian Control Conference. New York, 1997: 22-25.
- [26] Vajta M. Some remarks on pade-approximations[C]. Proceedings of the 3rd TEMPUS-INTCOM Symposium. New York, 2000: 242.
- [27] 佐々木正哉, 森一之, 李義頡, 等. 係数図法を用いた多入力多出力系に対する PID 制御器の一設計法[J]. 電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌), 2012, 132(9): 1465-1472.

## 作者简介

孟范伟(1981—), 男, 教授, 博士, 从事控制系统的鲁棒设计、非线性控制等研究, E-mail: mengfanwei@neuq.edu.cn;

刘凯(1994—), 男, 硕士生, 从事鲁棒控制、多变量解耦的研究, E-mail: 15732137808@163.com;

孟圣亚(1996—), 女, 硕士生, 从事鲁棒控制、多变量解耦的研究, E-mail: 1819871555@qq.com;

庞爱平(1986—), 女, 教授, 博士, 从事机器人控制、鲁棒控制、延迟系统控制、航天器控制等研究, E-mail: 417524788@qq.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)