

# 控制与决策

Control and Decision

## 带有输入饱和及输出受限非仿射系统固定时间跟踪控制

黄燕华, 代冀阳, 应进, 蒋沅, 李叶鼎, 鲁亮亮

引用本文:

黄燕华, 代冀阳, 应进, 蒋沅, 李叶鼎, 鲁亮亮. 带有输入饱和及输出受限非仿射系统固定时间跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(2): 429–434.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0856>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 输出受限的不确定非线性系统的自适应固定时间控制

Adaptive fixed-time control for uncertain nonlinear systems with output constraints  
*控制与决策*. 2022, 37(9): 2265–2273 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0310>

#### 具有输入量化和全状态约束的非严格反馈随机非线性系统的有限时间动态面控制

Finite-time dynamic surface control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with input quantization and full-state constraints  
*控制与决策*. 2022, 37(10): 2575–2584 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0012>

#### 基于RBF神经网络的多关节机器人固定时间滑模控制

Fixed-time sliding mode control of multi-joint robot based on RBF neural network  
*控制与决策*. 2022, 37(11): 2790–2798 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0421>

#### 基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm  
*控制与决策*. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

#### 多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft  
*控制与决策*. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

# 带有输入饱和及输出受限非仿射系统固定时间跟踪控制

黄燕华, 代冀阳<sup>†</sup>, 应进, 蒋沅, 李叶鼎, 鲁亮亮

(南昌航空大学 信息工程学院, 南昌 330100)

**摘要:** 针对具有量化输入饱和及输出受限的非线性非仿射系统, 提出固定时间自适应神经网络跟踪控制方法. 引入中值定理解决系统具有非仿射结构的问题; 基于反步法, 使用 Barrier Lyapunov 函数约束系统输出, 并利用 RBF 神经网络逼近未知函数; 根据固定时间控制理论设计输入信号, 该输入信号由滞后量化器量化, 以降低控制信号的通信速率, 并保证该系统在满足量化输入饱和及输出受限的条件下, 系统可以在固定时间内跟踪上期望信号, 且该系统收敛时间与初始状态无关. 最后通过 Matlab 仿真软件验证所设计控制器的有效性.

**关键词:** 固定时间控制; 量化输入饱和; 输出受限; Barrier Lyapunov 函数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0856

**引用格式:** 黄燕华, 代冀阳, 应进, 等. 带有输入饱和及输出受限非仿射系统固定时间跟踪控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 429-434.

## Fixed-time tracking control of pure-feedback system with input saturation and output constraints

HUANG Yan-hua, DAI Ji-yang<sup>†</sup>, YING Jin, JIANG Yuan, LI Ye-ding, LU Liang-liang

(School of Information Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330100, China)

**Abstract:** A fixed-time adaptive neural tracking control method is firstly proposed for nonlinear pure-feedback systems with quantized input saturation and output constraints. To resolve the problem of the system with non-simulation structure, the mean value theorem is introduced firstly. The Barrier Lyapunov function is used to constrain system output, and the RBF neural network is used to approximate the unknown function based on the back stepping method. According to the fixed time control theory, we design an input signal to guarantee this system to trace desired signal at fixed time under the situation of saturation input and limited output. Besides, the input signal is quantified by a lagging quantizer, which contributes to decrease the communications rate of the control signal. and the convergence speed is unrelated to the initial state in this system. Finally, Matlab simulation software is conducted to verify the effectiveness the proposed controller.

**Keywords:** fixed-time control; quantized input saturation; output constraints; Barrier Lyapunov function

## 0 引言

在许多实际工业控制系统中, 输入饱和约束是经常出现的输入约束之一, 且系统在物理停止、性能和安全规格的形式上对其输出或状态也有约束<sup>[1]</sup>. 因此, 近年来具有约束的非线性非仿射系统控制受到了越来越多的关注<sup>[2-6]</sup>. 文献[1]针对具有全状态约束及输入饱和的非线性非仿射系统, 提出了一种模糊控制的控制方法. 文献[4]针对具有输入饱和及全状态约束的多输入多输出随机非仿射系统, 提出了一种鲁棒自适应神经控制方法. 文献[6]针对一类输入饱和非线性非仿射系统, 提出了自适应神经网络控制方法,

通过引入低通滤波器和新的状态定义处理输入饱和约束. 上述关于具有约束的非线性非仿射系统的研究没有考虑量化方案. 实际上, 这是一项具有挑战性且意义重大的任务, 主要控制难点在于控制器输出量化后, 只有有限数量量化值可以应用于系统动力学.

由于实际通信环境中数字网络资源有限, 将连续信号映射为离散集的量化信号被广泛应用于研究非线性系统的控制问题<sup>[7-8]</sup>. 文献[7]针对具有输入饱和的机械手系统, 基于开关量化器, 提出了自适应模糊视觉跟踪控制方法. 文献[8]针对具有非对称输入饱和的随机非反馈非线性系统, 基于扇区有界的量化

收稿日期: 2021-05-15; 录用日期: 2021-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61663032); 南昌航空大学研究生创新专项基金项目(YC2021-S681).

责任编辑: 张国山.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: djiyang@163.com.

器,提出了自适应跟踪方法.由于固定时间控制收敛时间的上限与初始状态无关,只与系统的设计参数有关<sup>[9]</sup>,非线性系统固定时间控制成为目前快速发展和研究的焦点<sup>[10-12]</sup>.

受上述启发,本文重点研究具有量化输入饱和及输出受限的非仿射系统的固定时间跟踪控制问题.与文献[7-8]量化方案不同,本文首次将滞后量化器与固定时间控制理论相结合应用于具有输入饱和及输出受限的非线性非仿射系统.最后通过 Matlab 仿真软件验证所设计控制器的有效性.

## 1 问题描述及预备知识

### 1.1 问题描述

考虑如下一类非线性非仿射系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, \text{Sat}[u]); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in R^i (i = 1, 2, \dots, n)$  为系统状态向量;  $y \in R$  为系统的输出信号;  $f_i(\cdot, \cdot)$  为未知非仿射结构;  $\text{Sat}[u]$  为系统的输入信号.

控制目标:对系统(1)设计一个基于滞后量化器的固定时间自适应控制器,使输出  $y$  在固定时间内跟踪到期望信号  $y_d$ ,且保证闭环系统内所有信号有界.

**假设 1**<sup>[12]</sup> 参考信号  $y_d$  及其  $j$  阶导数  $y_d^{(j)}$  是连续有界的,其中  $y_d$  满足  $|y_d| \leq B_0, B_0$  为正常数.

### 1.2 量化输入饱和

根据文献[13],输入饱和函数可描述为

$$\text{Sat}[u] = \begin{cases} u_{\max}, & u \geq u_{\max}; \\ u, & u_{\min} < u < u_{\max}; \\ u_{\min}, & u \leq u_{\min}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $u_{\max}$  和  $u_{\min}$  分别为已知的饱和非线性上限和下限;  $u = q(v)$  为滞后量化器的输出,定义为

$$q(v) = \begin{cases} v_j \text{sgn}(v), \frac{v_j}{1+\delta} < |v| \leq v_j, \dot{v} < 0, \text{ or} \\ v_j < |v| \leq \frac{v_j}{1-\delta}, \dot{v} > 0; \\ v_j(1+\delta) \text{sgn}(v), v_j < |v| \leq \frac{v_j}{1-\delta}, \dot{v} < 0, \text{ or} \\ \frac{v_j}{1-\delta} < |v| \leq \frac{v_j(1+\delta)}{1-\delta}, \dot{v} > 0; \\ 0, 0 \leq |v| \leq \frac{v_{\min}}{1+\delta}, \dot{v} < 0, \text{ or} \\ \frac{v_{\min}}{1+\delta_i} \leq |v| \leq v_{\min}, \dot{v} > 0; \\ q(v), \dot{v} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $v_j = \rho^{1-j} v_{\min}; j = 1, 2, \dots; \delta = (1-\rho)/(1+\rho)$ ; 设计参数  $0 < \rho < 1; v_{\min} > 0$ .

**注 1** 与文献[7-8]关于输入量化的控制方案不同,本文采用滞后量化器,可以避免信号抖动并且涉及对输入和输出的限制.这种输出受限以及输入信号同时受到量化和饱和,使系统(1)的固定时间自适应控制设计更加困难,并具有挑战性.

利用文献[13]处理输入饱和信号的方法、文献[14]的引理1和中值定理,系统(1)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + h_{i\mu_i}(x_{i+1} - \alpha_i^*), 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, \alpha_n^*) + h_{n\mu_n}(g_q g_{u_\mu} v + g_{u_\mu} \psi + d - \alpha_n^*); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $h_{i\mu_i} = h_i(\bar{x}_i, x_{\mu_i}) = \partial f_i(\bar{x}_i, x_{\mu_i}) / \partial x_{\mu_i}, i = 1, 2, \dots, n, x_{\mu_i} = \mu_i x_{i+1} + (1-\mu_i) \alpha_i^*, 0 < \mu_i < 1$ .

**假设 2**<sup>[15]</sup> 未知函数  $h_{i\mu_i}(\cdot)$  有界,且满足  $0 < b_m \leq |h_{i\mu_i}(\cdot)| < b_M < \infty, i = 1, 2, \dots, n$ . 为了不失一般性,假设  $0 < b_m \leq h_{i\mu_i}(\cdot) \leq b_M$ . 同理,存在  $g_m$  和  $g_M$ , 使得  $0 < g_m \leq g_{v_\mu} \leq g_M, b = \min\{b_m, b_m g_m(1-\delta)\}$ , 其中  $b_m, b_M, g_m, g_M, b$  均为未知的正常数.

**注 2** 假设 2 中  $h_{i\mu_i}(\cdot)$  的正负不影响本文系统设计.

## 2 固定时间控制器设计

本节将介绍基于反步法的固定时间跟踪控制器设计方案.使用 RBF 神经网络逼近未知函数,其输出为  $\alpha_i^* = W_i^{*T} S_i(Z_i) + \delta_i(Z_i)$ . 定义常数

$$\theta_i = \{b^{-1} b_M^2 \|W_i^*\|^2, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (5)$$

$$\phi_2 = \min \phi_1 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\beta-1}{2}}, \dots, \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\right]^n \right\}, \quad (6)$$

$$\phi_1 = \min \left( 2^{\frac{1+\alpha}{2}} b k_{11}, \dots, 2^{\frac{1+\alpha}{2}} b k_{n1}, b k_{12}, \dots, b k_{n2} \right). \quad (7)$$

其中:  $Z_i = [x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_i, y_d, \bar{y}_d^{(i)T}]^T$  为基向量  $S_i(Z_i)$  的输入,  $W_i^*$  为理想权值矩阵,  $\delta(Z_i)$  为逼近误差,  $\beta > 1, 0 < \alpha < 1, \phi_1$  和  $\phi_2$  为未知正常数.

**step 1:** 由坐标变换  $z_1 = x_1 - y_d$  和系统(4),得到

$$\dot{z}_1 = f_1(\bar{x}_1, \alpha_1^*) + h_{1\mu_1}(x_2 - \alpha_1^*) - \dot{y}_d. \quad (8)$$

定义 Barrier Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_b^2}{k_b^2 - z_1^2} + \frac{b}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2. \quad (9)$$

其中:  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$  为参数误差,  $k_b, \gamma_1$  为正设计参数,  $k_b = k_c - B_0, V_1$  连续.对 Barrier Lyapunov 函数  $V_1$  求导,得到

$$\dot{V}_1 = \frac{z_1}{k_b^2 - z_1^2} f_1(\bar{x}_1, \alpha_1^*) + \frac{h_{1\mu_1} z_1 z_2}{k_b^2 - z_1^2} + \frac{h_{1\mu_1} z_1 \alpha_1}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{h_{1\mu_1} z_1 \alpha_1^*}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{z_1 \dot{y}_d}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{b}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1. \quad (10)$$

由于  $\partial w_i / \partial x_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 根据文献[16]引理2可知, 对于任意  $x_i$  和  $w_i$ , 存在理想光滑控制输入  $x_{i+1} = \alpha_i^*(x_i, w_i)$ , 使得

$$f_i(x_i, \alpha_i^*) + w_i = 0. \quad (11)$$

定义  $w_1$  为

$$w_1 = -\dot{y}_d + \frac{z_1}{k_b^2 - z_1^2}. \quad (12)$$

设计虚拟控制器  $\alpha_1$  为

$$\alpha_1 = -k_{11} \text{sign}(z_1) |z_1|^\alpha \left( \frac{1}{k_b^2 - z_1^2} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}-1} - k_{12} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} \times z_1 \left( \frac{z_1^2}{k_b^2 - z_1^2} \right)^{\frac{1+\beta}{2}-1} - \frac{k_{13} z_1}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{\hat{\theta}_1 z_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1)}{2\eta_1^2 (k_b^2 - z_1^2)}, \quad (13)$$

其中  $\eta_1, k_{11}, k_{12}, k_{13}$  为正设计参数.

**注3** 本文控制器没有类似  $z^{2\alpha-1}$  和  $z^{2\beta-1}$  的幂函数结构, 可以避免该幂函数结构诱导控制器产生奇点.

**注4** 本文控制器包含  $k_{13} z_1 / (k_b^2 - z_1^2)$ , 可以提高跟踪性能, 减小系统的跟踪误差. 仿真表明, 在系统其他设计参数不变的情况下  $k_{13}$  越大, 跟踪误差越小.

设计自适应律  $\hat{\theta}_1$  为

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{\gamma_1 z_1^2 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1)}{2\eta_1^2 (k_b^2 - z_1^2)^2} - \lambda_1 \hat{\theta}_1, \quad (14)$$

其中  $\lambda_1$  为正设计参数. 根据文献[14]引理4, 并将式(11)~(14)代入(10), 得到

$$\dot{V}_1 \leq -2^{\frac{1+\alpha}{2}} b k_{11} \left[ \left( \frac{z_1^2}{2(k_b^2 - z_1^2)} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} + \left( \frac{b\hat{\theta}_1^2}{2\gamma_1} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \right] - b k_{12} \left[ \left( \frac{z_1^2}{2(k_b^2 - z_1^2)} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} + \left( \frac{b\hat{\theta}_1^2}{2\gamma_1} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} \right] + \frac{1}{4} b_M^2 z_2^2 + C_1. \quad (15)$$

其中

$$C_1 = b k_{11} \left( \frac{b\hat{\theta}_1^2}{\gamma_1} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} + b k_{12} \left( \frac{b\hat{\theta}_1^2}{2\gamma_1} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} + \frac{\lambda_1 b \theta_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{b_M^2 \varepsilon_1^2}{4b k_{13}}, \frac{\lambda_1 b \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1}{\gamma_1} \leq \frac{\lambda_1 b}{\gamma_1} \left( \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}_1^2}{2} \right) \leq \frac{\lambda_1 b \theta_1^2}{2\gamma_1}.$$

根据文献[17]引理3.3和3.4, 式(15)可以整理为

$$\dot{V}_1 \leq C_1 - \phi_1 V_1^{\frac{1+\alpha}{2}} - \phi_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\beta-1}{2}} V_1^{\frac{1+\beta}{2}} + \frac{1}{4} b_M^2 z_2^2. \quad (16)$$

step  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ): 由坐标变换  $\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1}$  和系统(4), 得到

$$\dot{z}_i = f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + h_{i\mu_i} (x_{i+1} - \alpha_i^*) - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (17)$$

定义 Lyapunov 函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{b\hat{\theta}_i^2}{2\gamma_i}, \quad (18)$$

其中  $\gamma_i$  为正设计参数. 对  $V_i$  关于时间  $t$  求导, 得到

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + h_{i\mu_i} z_i z_{i+1} + h_{i\mu_i} z_i \alpha_i - h_{i\mu_i} z_i \alpha_i^* - z_i \dot{\alpha}_{i-1} - \frac{b}{\gamma_i} \tilde{\theta}_i \dot{\theta}_i. \quad (19)$$

定义  $w_i$  为

$$w_i = -\dot{\alpha}_{i-1} + \frac{1}{4} b_M^2 z_i + z_i. \quad (20)$$

设计虚拟控制器  $\alpha_i$  为

$$\alpha_i = -k_{i1} \text{sign}(z_i) |z_i|^\alpha - k_{i2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} (z_i^2)^{\frac{1+\beta}{2}} / z_i - k_{i3} z_i - \frac{\hat{\theta}_i z_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i)}{2\eta_i^2}, \quad (21)$$

其中  $\eta_i, k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}$  为正设计参数. 设计自适应律  $\hat{\theta}_i$  为

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{\gamma_i z_i^2 S_i^T(Z_i) S_i(Z_i)}{2\eta_i^2} - \lambda_i \hat{\theta}_i, \quad (22)$$

其中  $\lambda_i$  为正设计参数. 根据文献[14]引理4, 并将式(20)~(22)代入(19), 得到

$$\dot{V}_i \leq -\phi_1 V_{i-1}^{\frac{1+\alpha}{2}} - \phi_1 \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\beta-1}{2}} \right]^{i-1} V_{i-1}^{\frac{1+\beta}{2}} - 2^{\frac{1+\alpha}{2}} b k_{i1} \left[ \left( \frac{1}{2} z_i^2 \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} + \left( \frac{b\hat{\theta}_i^2}{2\gamma_i} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \right] + \sum_{j=1}^i C_j - b k_{i2} \left[ \left( \frac{1}{2} z_i^2 \right)^{\frac{1+\beta}{2}} + \left( \frac{b\hat{\theta}_i^2}{2\gamma_i} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} \right] + \frac{1}{4} b_M^2 z_{i+1}^2. \quad (23)$$

其中

$$C_j = b k_{j1} \left( \frac{b\hat{\theta}_j^2}{\gamma_j} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} + b k_{j2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} \left( \frac{b\hat{\theta}_j^2}{2\gamma_j} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} + \frac{\lambda_j b \theta_j^2}{2\gamma_j} + \frac{\eta_j^2}{2} + \frac{b_M^2 \varepsilon_j^2}{4b k_{j3}}.$$

根据文献[17]引理3.3和3.4, 式(23)可以整理为

$$\dot{V}_i \leq -\phi_1 V_i^{\frac{1+\alpha}{2}} - \phi_1 \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\beta-1}{2}} \right]^i V_i^{\frac{1+\beta}{2}} + \sum_{j=1}^i C_j + \frac{1}{4} b_M^2 z_{i+1}^2. \quad (24)$$

step  $n$ : 由坐标变换  $\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1}$  和系统(4), 得到

$$\dot{z}_n = f_n(\bar{x}_n, \alpha_n^*) + h_{n\mu_n} (g_{\mu} g_{u_{\mu}} v + g_{u_{\mu}} \psi + d(u) - \alpha_n^*) - \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (25)$$

定义Lyapunov函数为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{b\tilde{\theta}_n^2}{2\gamma_n}, \quad (26)$$

其中 $\gamma_n$ 为正设计参数. 对 $V_n$ 关于时间求导,得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + z_n f_n(\bar{x}_n, \alpha_n^*) + h_{n\mu_n} g_q g_{u_\mu} z_n v + \\ &h_{n\mu_n} g_{u_\mu} z_n \psi + h_{n\mu_n} z_n d - h_{n\mu_n} z_n \alpha_n^* - \\ &z_n \dot{\alpha}_{n-1} - \frac{b}{\gamma_n} \tilde{\theta}_n \dot{\theta}_n. \end{aligned} \quad (27)$$

定义 $w_n$ 为

$$\begin{aligned} w_n &= -\dot{\alpha}_{n-1} + z_n + \frac{1}{4}b_M^2 z_n + \\ &\frac{1}{2z_n} b_M^2 g_M^2 v_{\min}^2 + \frac{1}{2z_n} b_M^2 D^2. \end{aligned} \quad (28)$$

设计实际控制器 $v$ 为

$$\begin{aligned} v &= -k_{n1} \text{sign}(z_n) |z_n|^\alpha - k_{n2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+\beta}{2}} (z_n^2)^{\frac{1+\beta}{2}} / z_n - \\ &k_{n3} z_n - \frac{\hat{\theta}_n z_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n)}{2\eta_n^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\eta_n, k_{n1}, k_{n2}, k_{n3}$ 为正设计参数. 设计自适应律 $\hat{\theta}_n$ 为

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{\gamma_n z_n^2 S_n^T(Z_n) S_n(Z_n)}{2\eta_n^2} - \lambda_n \hat{\theta}_n, \quad (30)$$

其中 $\lambda_n$ 为正设计参数. 根据文献[14]引理4,并将式(28)~(30)代入(27),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -2^{\frac{1+\alpha}{2}} b k_{n1} \left[ \left(\frac{1}{2} z_n^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} + \left(\frac{b\tilde{\theta}_n^2}{2\gamma_n}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \right] - \\ &\phi_2 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\beta-1}{2}} \right]^{n-1} V_{n-1}^{\frac{1+\beta}{2}} + \sum_{j=1}^n C_j - \phi_1 V_{n-1}^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ &b k_{n2} \left[ \left(\frac{1}{2} z_n^2\right)^{\frac{1+\beta}{2}} + \left(\frac{b\tilde{\theta}_n^2}{2\gamma_n}\right)^{\frac{1+\beta}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

根据文献[17]引理3.3和3.4,式(31)可以整理为

$$\dot{V}_n \leq -\phi_1 V_n^{2/(1+\alpha)} - \phi_2 V_n^{2/(1+\beta)} + \tau, \quad (32)$$

其中 $\tau = \sum_{j=1}^n C_j$ . 根据文献[12]引理2和式(32),有

$$T_s \leq T_{\max} = \frac{2}{\phi_1 \varpi (1-\alpha)} + \frac{2}{\phi_2 \varpi (\beta-1)}. \quad (33)$$

**定理1** 对于量化输入饱和及输出受限的非仿射系统(1),如果假设1和假设2成立,设计控制器(29),采用虚拟控制器(13)、(21)及自适应律(14)、(22)、(30),选取适当的设计参数,则如下性质成立:1)闭环系统所有信号均有界,系统输出信号在固定时间内可以跟踪上给定的期望信号,且固定时间收敛与初始状态无关;2)输出满足约束条件.

**证明** 情况1): 若 $V_n \geq [\tau/(1-\varpi)\phi_1]^{2/(1+\alpha)}$ ,  $\varpi \in (0, 1)$ ,则式(32)可写为

$$\dot{V}_n \leq -\varpi \phi_1 V^{\frac{1+\alpha}{2}} - \phi_2 V^{\frac{1+\beta}{2}}. \quad (34)$$

当 $T > T_{\max}$ ,即 $V_n \leq [\tau/(1-\varpi)\phi_1]^{2/(1+\alpha)}$ 时,有

$$|y - y_d| \leq k_b [1 - e^{-2(\frac{\tau}{(1-\varpi)\phi_1})^{\frac{2}{1+\alpha}}}]^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

情况2): 若 $V_n \geq [\tau/(1-\varpi)\phi_2]^{2/(1+\beta)}$ ,  $\varpi \in (0, 1)$ ,则式(32)可写为

$$\dot{V}_n \leq -\phi_1 V^{\frac{1+\alpha}{2}} - \varpi \phi_2 V^{\frac{1+\beta}{2}}. \quad (36)$$

当 $T > T_{\max}$ ,即 $V_n \leq [\tau/(1-\varpi)\phi_1]^{2/(1+\beta)}$ 时,有

$$|y - y_d| \leq k_b [1 - e^{-2(\frac{\tau}{(1-\varpi)\phi_1})^{\frac{2}{1+\beta}}}]^{\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

由式(35)和(37)可知,当系统运行时间 $T$ 超过 $T_{\max}$ 时,跟踪误差收敛到原点的一个小邻域内.

结合情况1)和情况2)可知, $V_n$ 有界, $z_i$ 和 $\tilde{\theta}_i$ 也有界.又因为 $\theta_i$ 是一个常数,所以 $\hat{\theta}_i$ 有界.根据 $\alpha_i$ 定义可知, $\alpha_i$ 有界.由于 $z_{i+1}, y_d, \alpha_i$ 有界,可知 $x_i$ 也有界.综上,闭环系统的所有信号都是有界的.

由式(35)和(37)可得 $|z_1| \leq k_b$ ,根据 $x_1 = z_1 - y_d$ 和 $|y_d| \leq B_0$ ,可得到 $|y| = |x_1| \leq |z_1| + |y_d| < k_b + B_0$ ,由 $k_b = k_c - B_0$ 得到 $|y| < k_c$ ,因此输出满足受限条件. □

### 3 仿真研究

#### 3.1 数值仿真

考虑如下二阶的非线性非仿射系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 0.5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + \text{Sat}[u] + (\text{Sat}[u])^3/5, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (38)$$

参考信号为 $y_d = 0.5 \sin t \leq B_0 = 0.5$ ;系统输入被约束为 $u_{\max} = 5, u_{\min} = -7$ .假设 $|y(t)| < k_c = 1.1, \forall t > 0$ ,有 $k_b = k_c - B_0 = 0.6$ .初始条件为 $[x_1(0), x_2(0), \hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_1(0)]^T = [0.2, 0.2, 0, 0]^T$ .

RBF神经网络宽度设置为8, $W_1 S_1(Z_1)$ 和 $W_2 S_2(Z_2)$ 分别包含4个节点和7个节点.高斯基函数中心设置为

$$\begin{bmatrix} -1.5 & -0.3 & 0 & 0.3 & -1.5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1.5 & -0.3 & 0 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix} \in R^{i \times 5},$$

其中 $i$ 为节点数.

选取参数如下: $\alpha = 3/4, \beta = 4, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \eta_1 = 2, \eta_2 = 2, k_{11} = 1, k_{12} = 1, k_{13} = 20, k_{21} = 1, k_{22} = 1, k_{23} = 10, \varepsilon_{10} = 10^{-6}, \varepsilon_{20} = 10^{-6}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ .

仿真结果如图1~图4所示.图1中, $x_1$ 为输出信号, $y_d$ 为期望信号,可以看出系统输出能够跟踪上参考信号且输出满足约束要求;图2中, $\text{Sat}[u]$ 为控制输

入信号,  $u = q(v)$  为量化信号,  $v$  为控制器输出信号, 可以看出控制输入信号  $\text{Sat}[u]$  符合输入饱和要求; 图3为其他参数不变时, 不同  $k_{13}$  的跟踪误差, 可以看出  $k_{13}$  越大跟踪误差越小; 由图4可以看出当  $k_b > B_0$

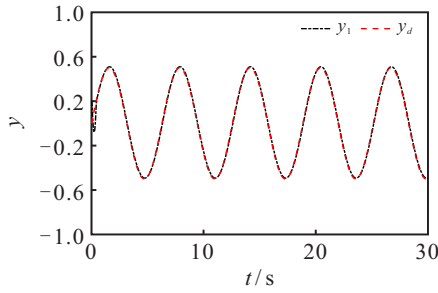


图1 跟踪轨迹

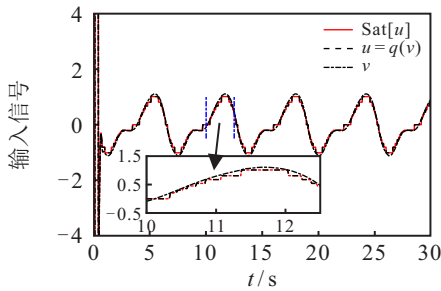


图2 输入信号

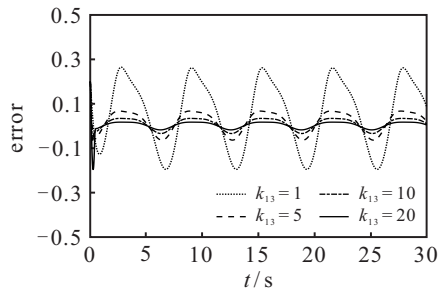
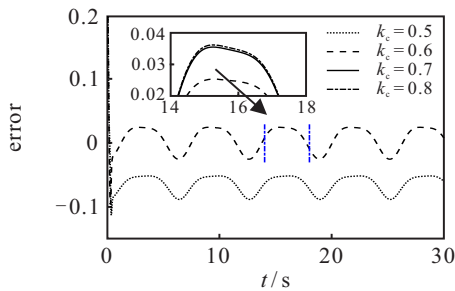
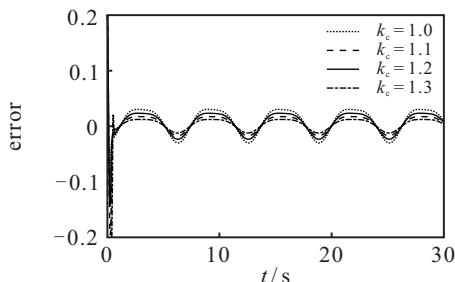


图3 不同  $k_{13}$  跟踪误差  $y - y_d$



(a) 参数设置I



(b) 参数设置II

图4 不同  $k_c$  跟踪误差  $y - y_d$

时, 输出约束  $k_c = k_b + B_0$  参数越接近  $B_0$  跟踪误差越小. 图4(a)参数如下:  $\eta_1 = 25, \alpha = 99/100, \beta = 6, k_{11} = 27, k_{12} = 2, k_{13} = 12/100, k_{21} = 27, k_{22} = 2, k_{23} = 1$ .

图1~图4的仿真结果表明, 所提出的基于滞后量化器的固定时间自适应神经网络控制器, 在固定时间内输出可以跟踪上期望信号, 且系统的输入和输出满足约束条件.

### 3.2 对比实例仿真

考虑如下机电系统<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = e_{21}x_2x_3^2 + e_{22}\sin x_1 + e_{23}x_2 - e_{23}x_2^2x_3^3, \\ \dot{x}_3 = e_{31}u + e_{32}x_2 + e_{33}x_3^2 - e_{33}x_2^2\sin x_3, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (39)$$

其中:  $e_{21} = 1/M, e_{22} = -N/M, e_{23} = -B/M, e_{31} = 1/L, e_{32} = -K_B/L, e_{33} = -R/L$  为系统参数,  $M, N, B, L, K_B, R$  的选择及描述参见文献[18].

参考信号如下:  $y_d = 0.5 \sin t + \sin(0.5t) \leq B_0 = 1.5; u_{\max} = 5, u_{\min} = -7$ , 假设  $|y| < k_c = 3.5, \forall t > 0$ , 有  $k_b = k_c - B_0 = 2$ . 参数选取如下:  $\alpha = 94/101, \beta = 101/100, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 10, \eta_1 = 2, \eta_2 = 2, \eta_3 = 2, k_{11} = 12, k_{12} = 12, k_{21} = 12, k_{22} = 12, k_{23} = 30, k_{31} = 12, k_{32} = 12, k_{33} = 30, \varepsilon_{10} = 10^{-6}, \varepsilon_{20} = 10^{-6}, \lambda_2 = 0.05, \lambda_3 = 0.1$ . 仿真结果如图5和图6所示. 可以看出, 所提出控制方法的跟踪效果和跟踪误差优于文献[12].

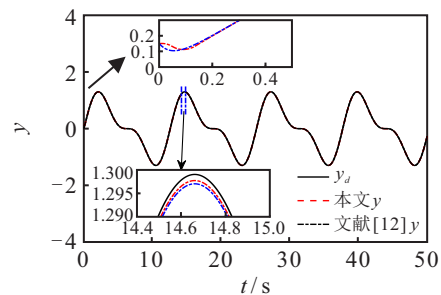


图5 跟踪轨迹

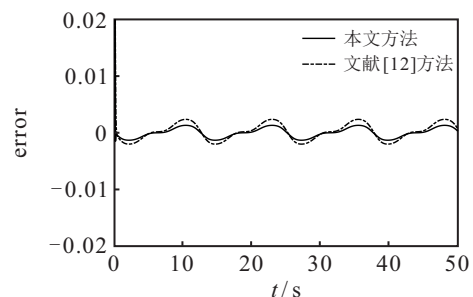


图6 跟踪误差  $y - y_d$

## 4 结论

本文研究了具有量化输入饱和及输出受限的非线性非仿射系统输出跟踪控制问题. 首先引入中值定理处理系统非仿射结构, 同时利用RBF神经网络逼近系统未知函数. 在控制器设计过程中采用Barrier Lyapunov函数使系统输出受到约束, 且输入信号经过滞后量化器量化后再经过饱和模型, 满足系统在量化输入饱和及输出受限的情况下, 系统的跟踪误差在固定时间内, 可以收敛到足够小的领域内且收敛时间与初始状态无关.

### 参考文献(References)

- [1] Li Y M, Tong S C, Li T S. Adaptive fuzzy output-feedback control for output constrained nonlinear systems in the presence of input saturation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2014, 248: 138-155.
- [2] Jia F J, Lu J W, Li Y M. Adaptive fuzzy control for nonlinear uncertain pure-feedback systems with full-state and input constraints[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(10): 4917-4932.
- [3] Huang X C, Song Y D, Wen C Y. Output feedback control for constrained pure-feedback systems: A non-recursive and transformational observer based approach[J]. *Automatica*, 2020, 113: 108789.
- [4] Si W J, Dong X D. Adaptive neural control for MIMO stochastic nonlinear pure-feedback systems with input saturation and full-state constraints[J]. *Neurocomputing*, 2018, 275: 298-307.
- [5] Yang Y L, Liu Z J, Li Q, et al. Output constrained adaptive controller design for nonlinear saturation systems[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(2): 441-454.
- [6] Zerari N, Chemachema M, Essounbouli N. Neural network based adaptive tracking control for a class of pure feedback nonlinear systems with input saturation[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, 6(1): 278-290.
- [7] Wang F J, Liu Z, Zhang Y, et al. Adaptive fuzzy visual tracking control for manipulator with quantized saturation input[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(2): 1241-1258.
- [8] Yang Y K, Yu Z X, Li S G. Adaptive output feedback quantised tracking control for stochastic nonstrict-feedback nonlinear systems with input saturation[J]. *International Journal of Systems Science*, 2018, 49(15): 3130-3145.
- [9] Wang F, Lai G Y. Fixed-time control design for nonlinear uncertain systems via adaptive method[J]. *Systems & Control Letters*, 2020, 140: 104704.
- [10] Ba D S, Li Y X, Tong S C. Fixed-time adaptive neural tracking control for a class of uncertain nonstrict nonlinear systems[J]. *Neurocomputing*, 2019, 363: 273-280.
- [11] Li Y M, Li K W, Tong S C. Finite-time adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control for MIMO nonstrict feedback systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(1): 96-110.
- [12] He C, Wu J, Dai J Y, et al. Approximation-based fixed-time adaptive tracking control for a class of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. *Complexity*, 2020, 2020: 4205914.
- [13] Wang H Q, Chen B, Liu X P, et al. Robust adaptive fuzzy tracking control for pure-feedback stochastic nonlinear systems with input constraints[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(6): 2093-2104.
- [14] Qin Z H, He X X, Li G, et al. Robust adaptive consensus of nonstrict-feedback multi-agent systems with quantized input and unmodeled dynamics[J]. *Information Sciences*, 2019, 498: 117-134.
- [15] Wang M, Ge S S, Hong K S. Approximation-based adaptive tracking control of pure-feedback nonlinear systems with multiple unknown time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(11): 1804-1816.
- [16] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 671-682.
- [17] Zuo Z Y, Tie L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems[J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(2): 363-370.
- [18] Dawson D M, Carroll J J, Schneider M. Integrator backstepping control of a brush DC motor turning a robotic load[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1994, 2(3): 233-244.

### 作者简介

黄燕华(1994—), 女, 硕士生, 从事非线性控制、多智能体系统分布式控制的研究, E-mail: 1451926442@qq.com;

代冀阳(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制技术及其应用、飞行器控制等研究, E-mail: djyang@163.com;

应进(1982—), 男, 讲师, 硕士, 从事智能控制技术及其应用等研究, E-mail: azx519@foxmail.com;

蒋沅(1982—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性系统控制、复杂网络等研究, E-mail: jiangyuan@nchu.edu.cn;

李叶鼎(1995—), 男, 硕士生, 从事无人机航迹规划的研究, E-mail: 865137290@qq.com;

鲁亮亮(1996—), 男, 硕士生, 从事无人机航迹规划与跟踪控制的研究, E-mail: 411609750@qq.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)