

# 控制与决策

Control and Decision

## 一种新型复合滑模趋近律设计与分析

雷城, 蓝益鹏, 徐泽来, 孙云鹏, 石晓磊

引用本文:

雷城, 蓝益鹏, 徐泽来, 孙云鹏, 石晓磊. 一种新型复合滑模趋近律设计与分析[J]. *控制与决策*, 2023, 38(2): 435–440.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1127>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于干扰补偿趋近律的离散滑模多周期重复控制

Discrete-time sliding mode multi-periodic repetitive control with reaching law based on disturbance compensation

*控制与决策*. 2023, 38(2): 421–428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0490>

#### 基于变速趋近律的机电伺服系统自适应滑模控制

Adaptive sliding mode control of electromechanical servo system based on variable rate reaching law

*控制与决策*. 2022, 37(4): 1067–1073 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1166>

#### 直线同步电动机磁悬浮系统的自适应模糊滑模控制

Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor

*控制与决策*. 2021, 36(3): 693–698 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0774>

#### 考虑加速度约束的终端角度约束滑模制导律设计

Sliding-mode guidance law with acceleration and angle constraints

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2511–2516 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0284>

#### 基于变速趋近律的Buck型变换器抗扰动控制

Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law

*控制与决策*. 2021, 36(4): 893–900 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1073>

# 一种新型复合滑模趋近律设计与分析

雷城, 蓝益鹏<sup>†</sup>, 徐泽来, 孙云鹏, 石晓磊

(沈阳工业大学 电气工程学院, 沈阳 110870)

**摘要:** 针对传统幂次趋近律存在的抖振以及全局收敛缓慢的问题, 提出一种新型复合滑模趋近律, 该趋近律通过引入正切函数以及对传统幂次趋近律的改进, 实现趋近律的快速收敛和无抖振特性. 首先, 引入正切函数, 在初始状态已知的情况下使系统更快地收敛; 其次, 通过设计的趋近律改进传统幂次趋近律中含符号函数乘积项容易引起的抖振; 然后, 理论证明新型复合趋近律能够快速收敛且无抖振, 并推导出趋近速率及稳态误差界; 最后, 以直线磁悬浮同步电动机磁悬浮系统为例, 与双幂次趋近律和多幂次趋近律仿真对比, 进一步验证新型复合趋近律能够明显缩短系统的动态过程并消除抖振, 且存在模型不确定性及外加干扰作用下, 系统仍能迅速地收敛到平衡点附近的领域内.

**关键词:** 正切函数; 新型复合趋近律; 滑模控制; 稳态误差界; 直线磁悬浮同步电动机; 变幂次趋近律

中图分类号: TM359.4

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1127

引用格式: 雷城, 蓝益鹏, 徐泽来, 等. 一种新型复合滑模趋近律设计与分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 435-440.

## Design and analysis of a new compound sliding mode reaching law

LEI Cheng, LAN Yi-peng<sup>†</sup>, XU Ze-lai, SUN Yun-peng, SHI Xiao-lei

(School of Electrical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of chattering and slow global convergence of the traditional power law, a new compound sliding mode law is proposed, which introduces a tangent function and improves the traditional power law, thus the fast convergence and chattering-free characteristics of the reaching law are realized. Firstly, a tangent function is introduced, which can make the system converge faster when the initial state is known, the reaching law is designed to improve the chattering caused by the product term of the symbolic function in the traditional power reaching law. Then, the convergence rate and steady-state error bounds of the new compound reaching law are derived. Finally, taking the magnetic levitation system of a linear magnetic levitation synchronous motor as an example, the simulation results show that the new compound reaching law can obviously shorten the dynamic process of the system and eliminate chattering, and in the presence of model uncertainty and external disturbance, the system can converge rapidly to the region near the equilibrium point.

**Keywords:** tangent function; new compound reaching law; sliding mode control; steady-state error boundary; linear magnetic levitation synchronous motor; variable power reaching law

## 0 引言

滑模变结构控制<sup>[1-2]</sup>可以使系统的状态随着目标方向变化, 滑模面可以自由设计, 与被控对象和外界扰动无关, 因此滑模变结构控制具有很强的鲁棒性. 但是, 滑模控制中因为有不连续开关特性的存在导致抖振的产生, 高频抖振会引起系统的未建模动态, 对系统的性能造成严重影响<sup>[3-4]</sup>. 针对滑模存在的抖振问题, 国内外学者提出了高阶滑模方法<sup>[5]</sup>、非奇异终端滑模方法<sup>[6]</sup>以及趋近律方法<sup>[7]</sup>. 高阶滑模方法

消除抖振实质上是把符号函数放在了滑模变量的高阶导数中, 这样得到的控制律中会含有符号函数的积分项, 从而达到削弱抖振的目的, 但微分器对测量噪声比较敏感. 非奇异终端滑模通过在滑模面上引入分数幂使系统状态能够在有限时间内收敛到平衡点, 但在靠近滑动模态领域内趋近速率缓慢. 我国学者高为炳院士<sup>[8]</sup>提出了趋近律的概念, 并采用等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律等滑模趋近律加快系统状态收敛速度并削弱系统抖振. 等速趋近律趋近速

收稿日期: 2021-06-28; 录用日期: 2021-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51575363).

责任编委: 周彬.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lanyipengg@163.com.

度缓慢且单一;指数趋近律是在等速趋近律的基础上加入指数项,虽然加快了趋近速度,但在即将到达滑模面上时会产生较大抖振;幂次趋近律是利用幂函数的性质在系统状态趋近滑模面,保证较小的控制增益以降低抖振,但在远离滑模面时趋近速度小于指数趋近速度.由此可以看出,单一的趋近律不能同时满足快速趋近和削弱抖振的目的,因此许多学者结合不同趋近律的优点设计复合趋近律<sup>[9-11]</sup>.

陈强等<sup>[12]</sup>提出了变速趋近律,设计反余切函数,根据系统状态改变幂次趋近律的增益;蒲明等<sup>[13]</sup>提出了新型变指数趋近律,将具有有限时间收敛的幂次项与变指数项组合,实现了系统的快速收敛性;张合新等<sup>[14]</sup>提出了一种新型的双幂次趋近律,在传统幂次趋近律的基础上引入了另一个幂次趋近律,通过设置不同的幂次项参数使系统状态分为两部分,分别调节趋近速率,但当系统状态远大于1或小于1时,趋近速率较慢;Kang等<sup>[15]</sup>提出了改进的双幂次滑模趋近律,通过自适应改变增益来调整趋近律,有效地提高了系统动态响应过程;Pan等<sup>[16]</sup>将双幂次趋近律与等速趋近律相结合,实现了系统状态的全局收敛,但等速趋近律会产生抖振问题;张瑶等<sup>[17]</sup>提出了多幂次趋近律,随滑动变量变化的幂次项引入到双幂次趋近律中,与双幂次趋近律相比实现更快的收敛速度,但随滑动变量变化的幂次项导致该趋近律在零点处不连续,易产生抖振问题.

本文通过分析以上趋近律的设计思路,结合文献[14-17]提出新型复合趋近律,并通过引入正切函数,在系统远离滑模面时快速收敛.为了消除幂次趋近律的抖振问题,设计新的函数,将符号函数放在幂次项中,不仅能实现与双幂次趋近律相同的趋近性质,而且可以消除抖振.最后,通过仿真验证所提趋近律的有效性.

### 1 新型复合趋近律设计

#### 1.1 趋近律

定义1 趋近律为

$$\dot{s} = -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b|s|^{\alpha \cdot \text{sgn}(|s|-1)}s. \quad (1)$$

其中: $a > 0; b > 0; 0 < \alpha < 1; s_m = |s_0| + \sigma, s_0$ 为 $t = 0$ 时刻 $s$ 的初始状态, $s_m$ 为最大滑模距离, $\sigma$ 为很小的数; $\text{sgn}$ 为符号函数.取 $a = 1, b = 5, \alpha = 0.6$ ,所提趋近律函数变化如图1所示.

由图1可以看出,所提趋近律分3部分:当 $s_0 \geq s \geq s_0 - \Delta$ 时, $-a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)$ 起主要作用,由于正切函数的特性,状态变量能够迅速收敛到滑模面;当 $s_0 - \Delta > s \geq 1$ 时,正切函数的收敛速度下降,这时

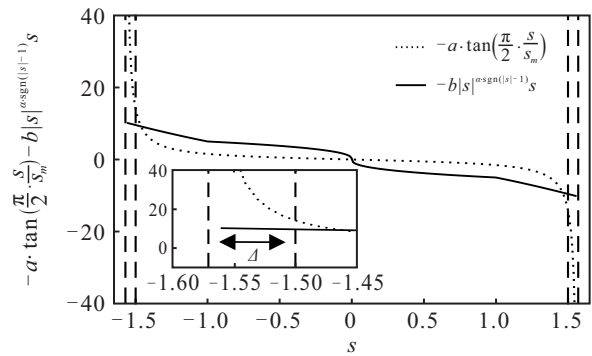


图1 函数变化轨迹

$\text{sgn}(|s| - 1) = 1$ ,趋近律 $-b \cdot |s|^\alpha s$ 起主要作用,收敛速度提高且随着 $s$ 的减小趋近速率也在不断减小;当 $1 > s \geq 0$ 时, $\text{sgn}(|s| - 1) = -1$ 趋近律变为 $-b|s|^{-\alpha}s$ ,很显然 $-b|s|^{-\alpha}s > -b|s|^\alpha s$ ,增加了变速趋近律的趋近速度.

#### 1.2 存在性和可达性证明

定理1 所提新型复合趋近律滑动状态 $s$ 可在其作用下到达平衡点.

证明 根据趋近律(1)可得

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s\left(-a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b|s|^{\alpha \cdot \text{sgn}(|s|-1)}s\right) = \\ &= -a \cdot s \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b|s|^{\alpha \cdot \text{sgn}(|s|-1)}s^2 \leq \\ &= -b|s|^{\alpha \cdot \text{sgn}(|s|-1)}s^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

当且仅当 $s = 0$ 时,有 $s\dot{s} = 0$ .根据连续系统趋近律存在且可达条件<sup>[18]</sup>,如果满足 $s\dot{s} \leq 0$ ,则该趋近律是存在可达的,即滑动状态 $s$ 可在其作用下到达平衡点 $s = 0$ .

### 2 新型趋近律特性分析

#### 2.1 新型复合趋近律连续性及抖振分析

定理2 所提趋近律在 $s = \dot{s} = 0$ 时刻是连续且无抖振的.

证明 当 $s \rightarrow 0$ 时,文献[17]所提趋近律

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \\ &= -k_1|s|^\alpha \text{sgn}(s) - k_2|s|^\beta \text{sgn}(s) - k_3|s|^\gamma \text{sgn}(s) - k_4s. \end{aligned} \quad (3)$$

由于

$$\lim_{s \rightarrow 0} (-k_1|s|^\alpha \text{sgn}(s) - k_2|s|^\beta \text{sgn}(s) - k_4s) \rightarrow 0, \quad (4)$$

趋近律变为

$$\dot{s} = -k_3|s|^\gamma \text{sgn}(s). \quad (5)$$

由于 $\gamma = \begin{cases} \max\{\alpha, |s|\}, & |s| \geq 1 \\ \min\{\beta, |s|\}, & |s| < 1 \end{cases}$ ,当 $s \rightarrow 0$ 时, $\gamma = |s| \rightarrow 0$ 公式变为

$$\dot{s} = -k_3 |s|^{\alpha} \operatorname{sgn}(s). \quad (6)$$

因为  $\lim_{s \rightarrow 0} (|s|^{\alpha}) = 1$ , 整理可得

$$\dot{s} = -k_3 \operatorname{sgn}(s). \quad (7)$$

所提趋近律

$$\dot{s} = -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s. \quad (8)$$

当  $s = 0^+$  及  $s = 0^-$  时, 所提趋近律均可写为  $s = \dot{s} = 0$ , 即所提趋近律是连续的, 且因为不含与符号函数的乘积项, 所以所提趋近律是没有抖振的.  $\square$

### 2.2 新型复合趋近律的收敛速度

**定理3** 设  $s$  的初始值为  $s_0$ , 到达滑模面的时间小于  $[t_1 + t_2 + t_3]$ .

$$t_1 = \frac{2s_m}{a\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi s_0}{2s_m}\right)\right) - \frac{2s_m}{a\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi(s_0 - \Delta)}{2s_m}\right)\right), \quad (9)$$

$$t_2 = \frac{2}{k_1 \alpha} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} - V_0^{-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (10)$$

$$t_3 = \frac{2}{k_2 \alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (11)$$

其中:  $k_1 = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(\alpha+2)}{2}}$ ,  $k_2 = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(-\alpha+2)}{2}}$ ,  $V_0 = \frac{1}{2}(s_0 - \Delta)^2$ .

**证明** 不妨设  $s_0 > s_0 - \Delta \geq 1$ , 系统的趋近过程分为3个阶段: 第1个阶段到达时间为  $t_1$ , 第2阶段到达时间为  $t_2$ , 第3阶段到达时间为  $t_3$ .

1) 当  $s > s_0 - \Delta \geq 1$  时, 正切函数起主要作用, 收敛时间  $t_1$  为

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{s_0}^{s_0 - \Delta} \frac{1}{-a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)} ds = \\ &= \frac{1}{-a} \int_{s_0}^{s_0 - \Delta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)} ds = \\ &= -\frac{2s_m}{a\pi} \int_{s_0}^{s_0 - \Delta} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)} d\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)\right) = \\ &= -\frac{2s_m}{a\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right)\right) \Big|_{s_0}^{s_0 - \Delta} = \\ &= \frac{2s_m}{a\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s_0}{s_m}\right)\right) - \\ &= \frac{2s_m}{a\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s_0 - \Delta}{s_m}\right)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

系统从  $s_0$  到  $s_0 - \Delta$  时, 所需时间小于  $t_1$ .

2) 当  $s_0 - \Delta > s \geq 1$  时,  $-b|s|^{\alpha} s$  起主要作用, 收敛时间为  $t_2$ .

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} s^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \left( -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s \right) = \\ &= -a \cdot s \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s^2 \leq \\ &= -b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s^2 = \\ &= -b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-(\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+2)}{2}} V^{\frac{(\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+2)}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

系统从  $s_0 - \Delta$  到  $s(t_1) = 1$  时, 有

$$\dot{V} < -b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(\alpha+2)}{2}} V^{\frac{(\alpha+2)}{2}}. \quad (15)$$

为了简化公式, 令

$$l_1 = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(\alpha+2)}{2}} > 0, \quad (16)$$

则

$$\dot{V} < -l_1 V^{\frac{\alpha+2}{2}}, \quad (17)$$

移项可得

$$V^{\frac{\alpha+2}{2}} dV < -l_1 dt. \quad (18)$$

已知  $V_0 = \frac{1}{2}(s_0 - \Delta)^2$ ,  $V(t_2) = \frac{1}{2}$ , 对两边同时积分可得

$$\int_{V_0}^{\frac{1}{2}} V^{\frac{\alpha+2}{2}} dV < -l_1 \int_0^{t_2} dt, \quad (19)$$

整理可得

$$-\frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{2}{\alpha} V_0^{-\frac{\alpha}{2}} < -l_1 t_2. \quad (20)$$

化简可得

$$t_2 < \frac{2}{l_1 \alpha} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} - V_0^{-\frac{\alpha}{2}} \right). \quad (21)$$

系统从  $s_0 - \Delta$  到  $s(t_2) = 1$  时, 所需时间小于  $t_2$ .

3) 当  $1 > s \geq 0$  时,  $-b|s|^{-\alpha} s$  起主要作用, 收敛时间  $t_3$  为

$$\dot{V} \leq -b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(-\alpha+2)}{2}} V^{\frac{(-\alpha+2)}{2}}. \quad (22)$$

为了简化公式, 令

$$l_2 = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(-\alpha+2)}{2}} > 0, \quad (23)$$

则

$$\dot{V} \leq -l_2 V^{\frac{-\alpha+2}{2}}, \quad (24)$$

移项可得

$$V^{-\frac{(-\alpha+2)}{2}} dV \leq -l_2 dt. \quad (25)$$

已知  $V(t_3) = 0$ , 对两边积分得

$$\int_{\frac{1}{2}}^0 V^{-\frac{(-\alpha+2)}{2}} dV \leq -l_2 \int_0^{t_3} dt, \quad (26)$$

整理可得

$$0 - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq -l_2 t, \quad (27)$$

$$t_3 \leq \frac{2}{l_2 \alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (28)$$

系统从  $s(t_2) = 1$  达到  $s(t_3) = 0$  时,所需时间小于  $t_3$ .  $\square$

### 2.3 趋近速度分析

将所提趋近律与当前收敛速度较快的张瑶等提出的多幂次趋近律<sup>[17]</sup>对比,以分析趋近速率的快速性.

$$\dot{s} = -k_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^\beta \operatorname{sgn}(s) - k_3 s. \quad (29)$$

多幂次趋近律是在双幂次趋近律的基础上,通过调整  $\gamma$  的值来自适应各个趋近阶段的趋近速率.

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \\ & -k_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^\beta \operatorname{sgn}(s) - k_3 |s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_4 s. \end{aligned} \quad (30)$$

其中:  $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0, \alpha > 1, 0 < \beta < 1, \gamma$  的取值情况为

$$\gamma = \begin{cases} \max\{\alpha, |s|\}, & |s| \geq 1; \\ \min\{\beta, |s|\}, & |s| < 1. \end{cases} \quad (31)$$

本文所提复合趋近律利用正切函数的特性,当远离滑模面时,正切函数的值大于指数函数的值,使状态变量快速衰减,在  $|s| > 1$  时,  $\operatorname{sgn}(|s| - 1) = 1$ ,趋近律  $-a \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b \cdot |s|^\alpha s$  起主要作用,通过调整正切函数的增益调节趋近律的趋近速度;在  $|s| < 1$  时,随着  $|s|$  不断减小,  $-b \cdot |s|^{-\alpha} s < -k_3 |s|^\gamma \operatorname{sgn}(s)$ ,趋近速率不断变小以达到消除抖振的目的.

### 2.4 稳态误差分析

考虑如下不确定系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(t). \quad (32)$$

其中:  $x$  为系统的状态,  $f(x)$  和  $g(x)$  为两个已知的光滑函数,  $u$  为系统的控制输入,  $d(t)$  为系统存在的扰动. 定义  $d_x = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot d(t)$ , 其满足有界性条件  $|d_x| \leq \varepsilon, \varepsilon$  为一个正常数,则滑模变量  $s$  可表示为

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x) + \frac{\partial s}{\partial x} g(x)u + d_x. \quad (33)$$

其中:  $\frac{\partial s}{\partial x}$  为  $s$  对  $x$  的偏微分,  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x)$  满足  $\frac{\partial s}{\partial x} g(0) \neq 0$ , 且  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x)$  存在.

根据式(32)和(33),系统的控制输入可设计为

$$u = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ -\frac{\partial s}{\partial x} f(x) + u_s \right], \quad (34)$$

其中  $u_s = -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s$ . 将式(34)代入(33)有

$$\begin{aligned} \dot{s} = u_s + d_x = & \\ & -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s + d_x. \end{aligned} \quad (35)$$

定义Lyapunov函数  $V_d = \frac{1}{2} s^2$ , 则对  $V_d$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_d = & \\ & \left( -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s + d_x \right) s \leq \\ & \left( -a \cdot \operatorname{stan}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s^2 + \varepsilon |s| \right) = \\ & \left( -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) \cdot s - b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s^2 + \varepsilon |s| \right) \leq \\ & -b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s^2 + \varepsilon |s| = \\ & -\left( b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s \cdot \operatorname{sgn}(s) - \varepsilon \right) |s|. \end{aligned} \quad (36)$$

为了保证系统稳定,需要满足如下条件:

$$b |s|^{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)} s \cdot \operatorname{sgn}(s) - \varepsilon \geq 0, \quad (37)$$

则有

$$|s| \geq \left( \frac{\varepsilon}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+1}}. \quad (38)$$

当滑模变量满足条件  $|s| \geq \left( \frac{\varepsilon}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+1}}$  时,有  $\dot{V}_d \leq 0$ ,滑模变量将从初始值  $s_0$  收敛到界  $|s| = \left( \frac{\varepsilon}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+1}}$ , 即当系统存在外部扰动  $d(t)$  时,滑模变量的稳态误差界  $|s| \leq \left( \frac{\varepsilon}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(|s|-1)+1}}$ .

## 3 仿真分析

由于直线磁悬浮同步电动机的磁悬浮系统稳定悬浮的快速性和稳定性是设计控制器主要考虑的因素,数值仿真以磁悬浮系统控制为例<sup>[19]</sup>进行仿真,考虑直线磁悬浮同步电动机磁悬浮系统模型为非线性系统,令  $x_1 = \delta, x_2 = \dot{\delta}, u = i_f^2$ ,得到磁悬浮系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{Ku}{mx_1^2} - g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} d(t). \quad (39)$$

其中:  $m$  为动子平台的重量;  $\delta$  为动子平台实际悬浮的气隙高度;  $i_f$  为励磁电流;  $d(t) = f_y - \frac{3}{2} i_q^2 \frac{\partial L_{mq}}{\partial \delta}$  为不确定性扰动,  $\frac{3}{2} i_q^2 \frac{\partial L_{mq}}{\partial \delta}$  为进给子系统对悬浮子系统的影响,  $f_y$  为磁悬浮系统不确定扰动,  $L_{mq}$  为  $q$  轴主电感;  $K = 5.659 \times 10^{-6}$  为磁悬浮系数.

数值仿真主要分为两个部分:

- 1) 在无干扰情况下,验证本文新型复合趋近律的有效性;
- 2) 在干扰作用下验证滑模变量的稳态误差界.

### 3.1 趋近律对比仿真

当不存在扰动时,将所提趋近律与双幂次趋近律和多幂次趋近律进行对比仿真.

- 1) 双幂次趋近律.

$$\dot{s}_a = -k_{a1} |s|^{\alpha_a} \operatorname{sgn}(s) - k_{a2} |s|^{\beta_a} \operatorname{sgn}(s). \quad (40)$$

2) 多幂次趋近律.

$$\dot{s}_b = -k_1 |s|^{\alpha_b} \text{sgn}(s) - k_2 |s|^{\beta_b} \cdot \text{sgn}(s) - k_3 |s|^{\gamma_b} \text{sgn}(s) - k_4 s. \quad (41)$$

3) 新型复合趋近律.

$$\dot{s} = -a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{s_m}\right) - b |s|^{\alpha} \text{sgn}(|s|-1) s. \quad (42)$$

为了公平,对比仿真参数设为:  $k_{a1} = 1, k_{a2} = 1, \alpha_a = 1.7, \beta_a = 0.3; k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 0.1, \alpha_b = 1.7, \beta_b = 0.3; a = 1.4, b = 2, \alpha = 0.7$ .

磁悬浮系统初始悬浮高度  $\delta_0 = 0.003 \text{ m}$ , 通过控制器使系统稳定悬浮在  $\delta = 0.0025 \text{ m}$ . 滑动变量初始值为  $s(0) = 2, s = \lambda e + \dot{e}$ . 其中:  $\lambda > 0, e = \delta - \delta_0$ .

不同趋近律下  $s$  随时间变化情况如图2所示.

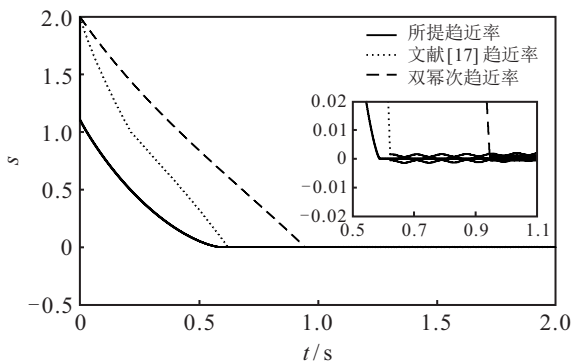


图2 不同趋近律下  $s$  随时间变化情况

由图2可知,正切函数的引入使得趋近律在距初始状态  $\Delta$  区间内快速下降,随着  $s$  的不断减小,其趋近速率不断下降,达到了削弱抖振的目的;由于双幂次趋近律和多幂次趋近律都含有符号函数的乘积项,都会产生抖振.多幂次趋近律的变指数项在滑模面处不连续,相比双幂次趋近律抖振略大,这符合定理2的推导结果.所提趋近律不仅消除了幂次趋近律因符号函数中乘积项引起的抖振问题,并且保持与幂次趋近律相同的趋近速率,同时能够实现更快的收敛速度和更少的调节参数.

不同趋近律下磁悬浮系统稳定状态如图3所示.

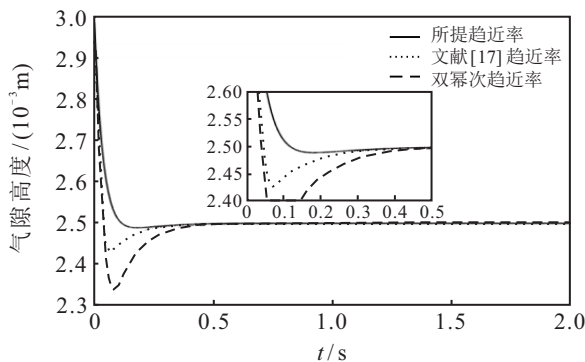


图3 不同趋近律下磁悬浮系统稳定状态

由图3可知,通过仿真对比3种趋近律都能够使

磁悬浮系统稳定悬浮在给定高度,所提趋近律相较于其他两种趋近律动态性能更好.

不同趋近律下励磁电流随时间变化情况如图4所示.

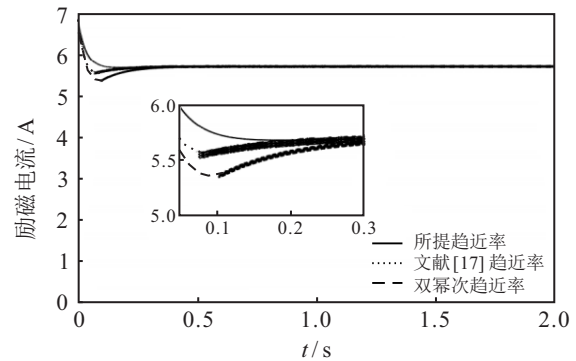


图4 不同趋近律下励磁电流随时间变化情况

由图4可知,励磁电流变化曲线无抖振现象,在直线同步电动机磁悬浮系统进行仿真,验证了所提趋近律是可以完全消除抖振的.

### 3.2 稳态误差界仿真

不确定性扰动

$$d(t) = 0.5 \cos t + \sin(2t). \quad (43)$$

$\varepsilon \geq |d(t)| = \sqrt{1.25}$ ,趋近律参数为  $b = 2, \alpha = 0.7$ ,当系统处于稳态时可知  $s < 1$ ,故稳态误差界为  $\left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ,可得  $|s| \leq 0.1439$ ,仿真结果如图5所示.

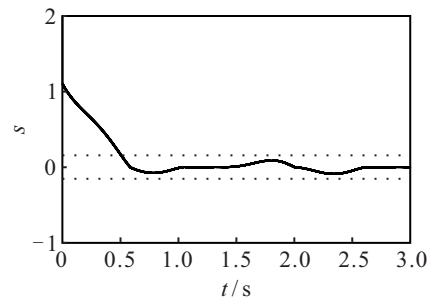


图5 外加干扰  $s$  的收敛情况

由图5可知,仿真结果与推导的稳态误差界一致,因此,系统受到不确定性扰动时,在新型复合趋近律的作用下,系统的稳态误差要小于本文所推导的稳态误差界.

## 4 结论

针对直线磁悬浮同步电动机磁悬浮系统对高精度和快速性要求较高,提出了一种新型复合趋近律,通过理论证明了新型复合趋近律能够快速收敛到滑模面且无抖振并推导出该趋近律在受到扰动时能够收敛到期望精度.最后以直线磁悬浮同步电动机为例对不同趋近律进行仿真对比,验证了所提趋近律具有更快的收敛速度以及消除抖振的能力.

## 参考文献(References)

- [1] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真基本理论与设计方法[M]. 第3版. 北京: 清华大学出版社, 2015, 38-46.  
(Liu J K. Sliding mode control design and MATLAB simulation the basic theory and design method[M]. The 3rd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2015, 38-46.)
- [2] Kachroo P, Tomizuka M. Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(7): 1063-1068.
- [3] Laggoun L, Kiyour B, Boukhalfa G, et al. Direct torque control using fuzzy second order sliding mode speed regulator of double star permanent magnet synchronous machine[C]. Proceedings of the 4th International Conference on Electrical Engineering and Control Applications. Algeria, 2020: 139-153.
- [4] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407-418.  
(Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(3): 407-418.)
- [5] Incremona G P, Rubagotti M, Tanelli M, et al. A general framework for switched and variable gain higher order sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(4): 1718-1724.
- [6] Abrazeh S, Parvaresh A, Mohseni S R, et al. Nonsingular terminal sliding mode control with ultra-local model and single input interval type-2 fuzzy logic control for pitch control of wind turbines[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2021, 8(3): 690-700.
- [7] 林淑怡. 基于趋近律方法的滑模控制器设计研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2019.  
(Lin S Y. Design of sliding mode controller based on reaching law method[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2019.)
- [8] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 241-254.  
(Gao W B. Theory and design method for variable sliding mode control[M]. Beijing: Science Press, 1996: 241-254.)
- [9] Brahmi B, Laraki M H, Brahmi A, et al. Improvement of sliding mode controller by using a new adaptive reaching law: Theory and experiment[J]. ISA Transactions, 2020, 97: 261-268.
- [10] 张国山, 李现磊. 一种滑模控制新型幂次趋近律的设计与分析[J]. 天津大学学报: 自然科学与工程技术版, 2020, 53(11): 1112-1119.  
(Zhang G S, Li X L. Design and analysis of a new power reaching law for sliding mode control[J]. Journal of Tianjin University: Science and Technology, 2020, 53(11): 1112-1119.)
- [11] 刘希, 孙秀霞, 董文瀚, 等. 一种新的约束变速趋近律离散滑模控制方法[J]. 自动化学报, 2013, 39(9): 1552-1557.  
(Liu X, Sun X X, Dong W H, et al. A new discrete-time sliding mode control method based on restricted variable trending law[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(9): 1552-1557.)
- [12] 陈强, 杨晨冰, 南余荣. 基于变速趋近律的 Buck 型变换器抗扰动控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 893-900.  
(Chen Q, Yang C B, Nan Y R. Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law[J]. Control and Decision, 2021, 36(4): 893-900.)
- [13] 蒲明, 蒋涛, 付克昌. 输入受约束下的无抖振有限时间稳定趋近律设计[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 135-142.  
(Pu M, Jiang T, Fu K C. Finite time stable chattering-free reaching law design with bounded input[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 135-142.)
- [14] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 289-293.  
(Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 289-293.)
- [15] Kang Z J, Yu H G, Li C C. Variable-parameter double-power reaching law sliding mode control method[J]. Automatika, 2020, 61(3): 345-351.
- [16] Pan J, Li W, Zhang H P. Control algorithms of magnetic suspension systems based on the improved double exponential reaching law of sliding mode control[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(6): 2878-2887.
- [17] 张瑶, 马广富, 郭延宁, 等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析[J]. 自动化学报, 2016, 42(3): 466-472.  
(Zhang Y, Ma G F, Guo Y N, et al. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(3): 466-472.)
- [18] Utkin V. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222.
- [19] Lan Y P, Li J, Zhang F G, et al. Fuzzy sliding mode control of magnetic levitation system of controllable excitation linear synchronous motor[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2020, 56(5): 5585-5592.

## 作者简介

雷城(1995—), 男, 博士生, 从事电机及其控制、数控技术的研究, E-mail: 271390823@qq.com;

蓝益鹏(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事电机及其控制、数控技术等研究, E-mail: lanyipeng@163.com;

徐泽来(1996—), 男, 博士生, 从事电机及其控制、数控技术的研究, E-mail: 1224693223@qq.com;

孙云鹏(1992—), 男, 博士生, 从事电机及其控制、数控技术的研究, E-mail: 2225960112@qq.com;

石晓磊(1983—), 女, 博士生, 从事电机及其控制、数控技术的研究, E-mail: sunshine830226@126.com.