控制与决策
Control and Decision

混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度

方冰, 韩冰

混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度

方 冰†, 韩 冰

(陆军指挥学院，南京 210045)

摘 要: 针对已有概率犹豫模糊熵测度构造复杂、区分能力弱等缺点,提出一种混合型概率犹豫模糊熵测度. 混合型熵测度能够综合反映概率犹豫模糊元所具有的个体不确定性和整体不确定性,具有结构简单、物理意义明确、区分能力强等优势. 在概率犹豫模糊元规范化的基础上,基于混合型熵测度的构造理念所设计的混合型交叉熵测度,能够克服已有交叉熵测度的设计缺陷,综合反映两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度和整体区分度,且具有自然的对称性. 基于混合型熵测度和交叉熵测度,进一步设计概率犹豫模糊环境下的多属性决策方法,并将其应用于无人机集群作战效能评估. 数值和理论分析结果表明,所提出的混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度能够成对设计,互为印证,具有广泛的应用前景.

关键词: 概率犹豫模糊集；概率犹豫模糊元；熵测度；交叉熵测度；作战效能评估

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1452 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 方冰,韩冰. 混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 546-554.

Hybrid entropy and cross-entropy measures of probabilistic hesitant fuzzy information

FANG Bing†, *HAN Bing*

(Army Command College of PLA，Nanjing 210045，China)

Abstract: The paper aims at solving the shortcomings of existing entropy measures of probabilistic hesitant fuzzy elements (PHFEs), which are either too complex in structure or too weak in discriminating ability, and proposes some hybrid entropy measures of PHFEs. The hybrid entropy measures of PHFEs can comprehensively reflect their individual and collective uncertainties, and possess some advantages of simple structure, clear physical meaning and strong discriminating ability. Based on normalized PHFEs, some hybrid cross-entropy measures of PHFEs are designed with the construction method of hybrid entropy measures, which can overcome the design flaws of existing cross-entropy measures, comprehensively reflect the individual and collective discrimination degrees between PHFEs, and possess natural symmetry. Based on proposed entropy and cross-entropy measures, a multi-attribute decision-making (MADM) method with PHFEs is further developed and applied to evaluate the combat effectiveness of UAV clusters. Numerical and theoretical results show that hybrid entropy and cross-entropy measures of PHFEs, which can be designed in pairs and supportive to each other, have a wide range of applications.

Keywords: probabilistic hesitant fuzzy set (PHFS)；probabilistic hesitant fuzzy element (PHFE)；entropy measure；cross-entropy measure；combat effectiveness evaluation

0 引 言

复杂的问题需要复杂的求解手段. 多属性决策是现代管理决策的核心课题,不断被人们注入新的活力,具有广泛的适用性. 多属性决策的本质是在多个相互冲突的指标(亦称属性、准则) 间恰当权衡、择优选择. 面对现代社会中广泛存在的复杂不确定性,传统的决策方法以及决策者的个体智慧等都无法有效应对. 为帮助决策者克服处理复杂不确定性决策问题时的认知局限性和思维模糊性,模糊决策得到了广泛应用,并取得了大量研究成果.

作为模糊决策的最新发展方向,概率犹豫模糊集在信息测度理论、信息融合理论、偏好关系理论和多属性决策方法等方面取得了丰富的研究成果,且已有研究将上述成果应用于风险投资、供应链管理、运输管理、舆情预测等领域[1]. 概率犹豫模糊集的基本描述工具是概率犹豫模糊元,概率犹豫模糊元在犹豫模

收稿日期: 2021-08-18；**录用日期:** 2021-10-27.
责任编委: 徐泽水.
†通讯作者. E-mail: bingfang_ch@163.com.

糊元的基础上增加了每个隶属度的权重信息,也即概率. 从这个意义上讲,概率犹豫模糊集是对犹豫模糊集的重要改进和推广,是模糊决策理论的重要创新发展[2-6]. 总之,得益于对概率信息的有效利用,概率犹豫模糊元能够包含较为丰富的评估信息,概率犹豫模糊集能够更为精准地建模决策过程中的不确定性认知,基于概率犹豫模糊集的决策理论和方法更具合理性和有效性.

在模糊决策领域,熵始终是一个迷人的概念和有效的决策工具,具有广泛的应用空间[7-9]. 然而,在概率犹豫模糊决策理论中,关于熵测度的研究成果却非常有限. 不同于犹豫模糊信息,概率犹豫模糊元同时包含了隶属度和概率两个维度的信息,因此,对概率犹豫模糊信息的测度要复杂得多. 现有研究通常选择将这两个维度的信息以某种方式合并后处理,这种方法虽有一定可取之处,却存在“过分简单化”的嫌疑;另一方面, 在概率犹豫模糊信息的处理上,也不应“过分复杂化”. 事实上,在对概率犹豫模糊集这一概念的把握上,“概率”应当仅作“权重”来理解,而不应再考虑其他的“不确定性”含义,徒增复杂性.

最近,文献[9-11]提出了一种概率分裂算法来对一组概率犹豫模糊元进行规范化处理,通过概率分裂算法处理的概率犹豫模糊元不仅具有相同的基数,而且具有相同的概率分布信息.概率分裂算法的出现使得对概率犹豫模糊信息的比较和处理变得通畅起来,也为概率犹豫模糊熵测度的研究开辟了一条新路径[9]. 本文在概率犹豫模糊元规范化处理的基础上,针对已有概率犹豫模糊熵测度构造过于复杂、区分能力不足等缺点[12-14],提出混合型概率犹豫模糊熵测度,以实现对概率犹豫模糊元所反映的个体不确定性和整体不确定性的综合衡量. 与已有的概率犹豫模糊熵测度相比,混合型熵测度基于全新视角进行设计,能够完全满足概率犹豫模糊熵定义的公理性要求,具有结构简单、物理意义明确、区分能力强、易于拓展应用等优势.

本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵测度不仅仅是几个具体的熵测度公式,也是一种新的设计理念,一种新的熵测度构造方法. 基于这种构造方法,本文又提出了混合型概率犹豫模糊交叉熵测度. 混合型交叉熵测度能够综合反映两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度和整体区分度,具有自然的对称性. 混合型交叉熵测度这一新特性解决了困扰学术界已久的“对称性交叉熵测度”难题,克服了已有概率犹豫模糊交叉熵测度的设计缺陷. 基于混合型熵和交叉熵测度,本文进一步设计了概率犹豫模糊环境下的多属性决策方法,并将其应用于无人机集群作战效能评估. 数值和理论分析结果表明,本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵测度和交叉熵测度能够成对设计,互为印证,配合使用,具有广泛的适用性.

1 理论基础

本节主要介绍概率犹豫模糊元的基本概念、比较方法、规范化方法和距离测度.

1.1 概率犹豫模糊元

定义1 [2] 设X是一个给定的有限集合,则定义在X上的一个概率犹豫模糊集H可表示为

$$H=\{\langle x,h(x)\rangle|x\in X\}. \tag{1}$$

其中:集合$h(x)=\{\gamma^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$是描述概率犹豫模糊集$H$的基本工具,通常被称为概率犹豫模糊元;隶属度$\gamma^i\in[0,1]\,(i=1,2,\dots,l)$,表示评估对象$x\in X$属于概率犹豫模糊集$H$的若干可能性;实数$p^i\in(0,1]\,(i=1,2,\dots,l)$,表示隶属度$\gamma^i$的发生概率,且满足归一化条件$\sum_{i=1}^{l}p^i=1$.

为方便起见,本文将涉及到的概率犹豫模糊元记为$q=h(x)$,并将其内的元素按照隶属度$\gamma^i(i=1,2,\dots,l)$的值进行升序排列.

定义2 [2] 假设$q=\{\gamma^i|p^i,\ i=1,2,\dots,l\}$为任一给定的概率犹豫模糊元,$l$是其基数,则概率犹豫模糊元的得分函数可定义为

$$s(q)=\sum_{i=1}^{l}\gamma^ip^i; \tag{2}$$

在得分函数$s(q)$的基础上,概率犹豫模糊元的偏差度可定义为

$$v(q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{l}[\gamma^i-s(h)]^2p^i}. \tag{3}$$

在定义2中,$s(q)$为统计学意义上的均值;$v(q)$为统计学意义上的标准差,反映了概率犹豫模糊元中的所有元素与其均值之间的偏差程度. 显然,$s(q)$能够在平均意义上表达整体偏好,$v(q)$能够表达对整体偏好的确信程度,二者相互配合才能全面反映概率犹豫模糊元的内涵. 基于得分值$s(q)$和偏差度$v(q)$,Xu等[2]提出了一种比较和排序概率犹豫模糊元的基本方法.

定义3 [2] 任意给定两个概率犹豫模糊元q_1和q_2,$s(q_1)$和$s(q_2)$是其得分值,$v(q_1)$和$v(q_2)$是其偏差度,则q_1和q_2可做如下比较:

1) 如果得分值$s(q_1)>s(q_2)$,则称概率犹豫模糊

元q_1优于q_2,记为$q_1 \succ q_2$.

2) 如果得分值$s(q_1) < s(q_2)$,则称概率犹豫模糊元q_1劣于q_2,记为$q_1 \prec q_2$.

3) 如果概率犹豫模糊元q_1和q_2的得分值相同,则需进一步比较其偏差度: ①若$v(q_1) < v(q_2)$,则称q_1优于q_2,记为$q_1 \succ q_2$;②若$v(q_1) > v(q_2)$,则称q_1劣于q_2,记为$q_1 \prec q_2$;③若$v(q_1) = v(q_2)$,则称q_1和q_2无差别,记为$q_1 \sim q_2$.

1.2 概率犹豫模糊元规范化方法

在处理实际决策问题中,不同概率犹豫模糊元的基数通常是不相同的. 为便于处理,需要按照一定的规则对这组概率犹豫模糊元进行规范化处理,以使它们具有相同的基数.

近年来,文献[9]和文献[10]介绍了一种对概率犹豫模糊元进行规范化处理的方法: 概率分裂算法. 通过概率分裂算法规范化处理后的概率犹豫模糊元不仅具有相同的基数,也具有相同的概率分布. 数学上,可将这组规范化处理后的概率犹豫模糊元记为

$$q_k = \{\gamma_k^i|p^i,\ i = 1, 2, \ldots, l\},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

其中: n为这组概率犹豫模糊元的个数,l为这组概率犹豫模糊元的共同基数.

事实上,经概率分裂算法规范化处理的概率犹豫模糊元的得分值和偏差度不会发生任何变化,能够保持原来的序关系. 因此,概率分裂算法能有效避免增添或减少元素的规范化方法对原始概率犹豫模糊信息带来的损伤,经概率分裂算法规范化处理的概率犹豫模糊元可以方便地进行比较和运算.

1.3 概率犹豫模糊距离测度

定义4[9] 假设$q_1 = \{\gamma_1^i|p^i, i = 1, 2, \ldots, l\}$和$q_2 = \{\gamma_2^i|p^i, i = 1, 2, \ldots, l\}$是两个经规范化处理的概率犹豫模糊元,则其海明(Hamming)距离测度可定义为

$$d_1(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^{l} |\gamma_1^i - \gamma_2^i| p^i; \tag{5}$$

其欧几里得(Euclidean) 距离测度可定义为

$$d_2(q_1, q_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\gamma_1^i - \gamma_2^i\right)^2 p^i}. \tag{6}$$

进一步拓展上面的距离测度定义,广义的概率犹豫模糊距离测度可定义为

$$d_3(q_1, q_2) = \left(\sum_{i=1}^{l} |\gamma_1^i - \gamma_2^i|^\lambda p^i\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{7}$$

其中常量$\lambda > 0$.

定义5[13] 假设$q_1 = \{\gamma_1^i|p_1^i, i = 1, 2, \ldots, l_1\}$和$q_2 = \{\gamma_2^i|p_2^i, i = 1, 2, \ldots, l_2\}$是两个任意给定的概率犹豫模糊元,则其伪距离测度(like-distance measure)可定义为

$$d'(q_1, q_2) = |s(r_1) - s(r_2)|, \tag{8}$$

其中$s(q_1)$和$s(q_2)$分别为q_1和q_2的得分函数. 事实上,式(8) 对概率犹豫模糊信息做了一种简化处理,然而却在后文的熵测度定义中具有重要价值.

2 混合型概率犹豫模糊熵测度

概率犹豫模糊熵测度主要用于度量概率犹豫模糊元的不确定性程度,是重要的决策工具.

2.1 公理性定义

本节在已有概率犹豫模糊熵测度定义的基础上,综合衡量概率犹豫模糊元所反映的个体不确定性和整体不确定性, 提出如下的公理性定义.

定义6[13] 假设$q = \{\gamma^i|p^i, i = 1, 2, \ldots, l\}$是基数为$l$的概率犹豫模糊元,$q^c = \{1 - \gamma^i|p^i,\ i = 1, 2, \ldots, l\}$是其补集,则概率犹豫模糊元的熵测度$E(q)$应满足以下5个公理性条件:

1) $0 \leqslant E(q) \leqslant 1$;

2) $E(q) = 0$当且仅当$q = \{0|1\}$或$\{1|1\}$;

3) $E(q) = 1$当且仅当$q = \{0.5|1\}$;

4) $E(q) = E(q^c)$;

5) $E(q)$的值与q和q^c之间的距离测度负相关,同时也与q和q^c之间的伪距离测度负相关.

基于概率犹豫模糊元的海明距离测度,可以构建如下的距离熵测度[13]:

$$E_1(q) = \sum_{i=1}^{l} \left(1 - 2|\gamma^i - 0.5|\right) p^i. \tag{9}$$

然而,式(9)给出的距离熵测度并不能完全满足定义6 所要求的公理性条件. 当$q = \{0|0.2, 1|0.8\}$时,根据式(9)计算可得$E_1(q) = 0$. 显然,这与直觉不符,也与定义6 所要求的公理性条件2)相矛盾.

为了构建更为合理的概率犹豫模糊熵测度,需要引入如下的伪距离熵测度[13]:

$$E_2(q) = 1 - 2|s(q) - 0.5|. \tag{10}$$

事实上,式(10)给出的伪距离熵测度也不能完全满足定义6 所要求的公理性条件. 当$q = \{0.4|0.5, 0.6|0.5\}$时,根据式(10)计算可得$E_2(q) = 1$. 显然,这与直觉不相符合,也与定义6所要求的条件3)相矛盾.

显然,式(9)和(10)所给出的概率犹豫模糊熵测度都无法满足定义6所要求的所有公理性条件. 从本质上讲,式(9) 给出的距离熵测度是对概率犹豫模糊元中所有隶属度的不确定性进行的加权平均;而式

(10) 给出的伪距离熵测度是对概率犹豫模糊元整体不确定性的度量. 因此,可在概率犹豫模糊元所表达的整体不确定性与个体不确定性之间进行恰当权衡,提出如下的混合型熵测度.

2.2　混合型概率犹豫模糊熵测度

混合型概率犹豫模糊熵测度是在距离熵测度和伪距离熵测度的基础上,对概率犹豫模糊元所反映的整体不确定性和个体不确定性进行的综合权衡[9]. 数学上,混合型熵测度可表示为距离熵测度与伪距离熵测度之间的凸组合,即

$$E_3(q)=(1-\alpha)E_1(q)+\alpha E_2(q)=$$
$$1-2\alpha|s(q)-0.5|-2(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i,\tag{11}$$

其中参数 $\alpha\in(0,1)$ 为权衡系数. 现对混合型熵测度的合理性给出如下定理及证明.

定理1　式(11)给出的混合型概率犹豫模糊熵测度能够满足定义6所要求的所有公理性条件.

证明　设 $q=\{\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l\}$ 为需要考虑的概率犹豫模糊元.

1) 对于概率犹豫模糊元 q 而言,总有 $0\leqslant\gamma^i\leqslant 1,i=1,2,\ldots,l$ 和 $0\leqslant s(q)\leqslant 1$ 成立. 以此为基础,进一步推导可得

$$\begin{cases}0\leqslant 2|s(q)-0.5|\leqslant 1;\\ 0\leqslant 2\displaystyle\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i\leqslant 1.\end{cases}\tag{12}$$

因此,定义6 所要求的条件1)能够被 $E_3(q)$ 满足.

2) 因为 $\alpha\neq 0,1-\alpha\neq 0$ 和 $p^i\neq 0,i=1,2,\ldots,l$, 从条件 $E_3(q)=0$ 出发,可知下列方程组必定成立:

$$\begin{cases}|s(q)-0.5|=0.5;\\ |\gamma^i-0.5|=0.5,\ i=0,1,\ldots,l.\end{cases}\tag{13}$$

求解以上方程组可得 $\gamma^i=0$ 或1, $\forall i=0,1,\ldots,l$, 这意味着 $q=\{0|1\}$ 或 $\{1|1\}$. 反之,也可以从条件 $q=\{0|1\}$ 或 $\{1|1\}$ 出发,推导出 $E_3(q)=0$. 因此,定义6所要求的条件2)能够被 $E_3(q)$ 满足.

3) 因为 $\alpha\neq 0,1-\alpha\neq 0$ 和 $p^i\neq 0,\forall i=1,2,\ldots,l$, 从条件 $E_3(q)=1$ 出发,可知下列方程组必定成立:

$$\begin{cases}|s(q)-0.5|=0;\\ |\gamma^i-0.5|=0,\ i=0,1,\ldots,l.\end{cases}\tag{14}$$

求解以上方程组可得 $\gamma^i=0.5,\forall i=0,1,\ldots,l$, 这意味着 $q=\{0.5|1\}$. 反之,也可以从条件 $q=\{0.5|1\}$ 出发,推导出 $E_3(q)=1$ 成立. 因此,定义6所要求的条件3)能够被 $E_3(q)$ 满足.

4) 因为 $q^c=\{1-\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l\}$, 所以可做如下推导:

$$E_3(q^c)=1-2\alpha|0.5-s(q)|-$$
$$2(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|0.5-\gamma^i|p^i=E_3(q).\tag{15}$$

因此,定义6所要求的条件4)能够被 $E_3(q)$ 满足.

5) 式(11) 可以表示为如下形式:

$$E_3(q)=1-\alpha|s(q)-s(q^c)|-(1-\alpha)d_1(q,q^c).\tag{16}$$

因为 $\alpha\in(0,1)$, 根据式(16),很容易得出 $E_3(q)$ 的值与 q 和 q^c 之间的距离测度负相关,同时也与 q 和 q^c 之间的伪距离测度负相关的结论. □

总之,式(11)所给出的混合型概率犹豫模糊熵测度能够满足定义6所要求的所有公理性条件. 事实上,式(11)所示的混合型概率犹豫模糊熵测度结构清晰,物理意义明确,便于拓展应用.

2.3　混合型熵测度的拓展形式

根据混合型熵测度 $E_3(q)$ 的构造方法,采用广义的距离测度概念,可构建如下广义的混合型熵测度:

$$E_4(q)=1-2\alpha|s(q)-0.5|-$$
$$(1-\alpha)\Big(\sum_{i=1}^{l}|2\gamma^i-1|^{\lambda}p^i\Big)^{\frac{1}{\lambda}},\tag{17}$$

其中常量 $\lambda>0$. 如果采用三角函数 $\sin(x)$ 作为生成函数,则可构建如下形式的混合型熵测度:

$$E_5(q)=\alpha\sin[\pi s(q)]+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}\sin(\pi\gamma^i)p^i.\tag{18}$$

如果采用 $f(x)=-x\log(x)-(1-x)\log(1-x)$ 作为生成函数,则混合型熵测度也可表述为

$$E_6(q)=\alpha f[s(q)]+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}f(\gamma^i)p^i.\tag{19}$$

在式(17)～(19)中,参数 $\alpha\in(0,1)$ 是权衡系数,而得分函数 $s(q)$ 被作为一个变量进行处理,反映概率犹豫模糊元所表达的整体偏好.

2.4　概率犹豫模糊熵测度比较分析

为了对本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵测度的合理性和有效性进行说明,现将其用于10个概率犹豫模糊元的熵测度计算,并将计算结果列于表1和表2中. 根据表1中的计算结果和表2对这10个概率犹豫模糊元的排序结果,现对不同的概率犹豫模糊熵测度进行如下比较分析.

表 1 不同概率犹豫模糊熵测度的计算结果 ($\alpha = 0.5, \lambda = 2$)

犹豫模糊元	E_{P_1}	E_{P_2}	E_{Su}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$q_1 = \{0.7\|0.2, 0.9\|0.8\}$	0.5515	0.4660	0.4816	0.28	0.28	0.28	0.2712	0.4174	0.5678
$q_2 = \{0.6\|0.9, 0.9\|0.1\}$	0.9208	0.9027	0.9324	0.74	0.74	0.74	0.7119	0.9023	0.9357
$q_3 = \{0.6\|0.1, 0.9\|0.9\}$	0.5192	0.4300	0.4524	0.26	0.26	0.26	0.2492	0.3852	0.5383
$q_4 = \{0.4\|0.5, 0.6\|0.5\}$	0.9710	0.9618	1	0.8	1	0.9	0.9	0.9755	0.9855
$q_5 = \{0.2\|0.5, 0.8\|0.5\}$	0.7219	0.6509	1	0.4	1	0.7	0.7	0.7939	0.8610
$q_6 = \{0.1\|0.5, 0.9\|0.5\}$	0.4690	0.3709	1	0.2	1	0.6	0.6	0.6545	0.7345
$q_7 = \{0.0\|0.5, 1.0\|0.5\}$	0	0	1	0	1	0.5	0.5	0.5	0.5
$q_8 = \{0.4\|0.4, 0.6\|0.6\}$	0.9710	0.9618	0.9984	0.8	0.96	0.88	0.88	0.9745	0.9849
$q_9 = \{0.4\|0.3, 0.6\|0.7\}$	0.9710	0.9618	0.9936	0.8	0.92	0.86	0.86	0.9716	0.9832
$q_{10} = \{0.4\|0.2, 0.6\|0.8\}$	0.9710	0.9618	0.9856	0.8	0.88	0.84	0.84	0.9667	0.9803

表 2 不同概率犹豫模糊元的排序情况 ($\alpha = 0.5, \lambda = 2$)

不同的熵测度	概率犹豫模糊元排序情况
E_1, E_{P_1}, E_{P_2}	$q_7 < q_6 < q_3 < q_1 < q_5 < q_2 < q_{10} = q_9 = q_8 = q_4$
E_2, E_{Su}	$q_3 < q_1 < q_2 < q_{10} < q_9 < q_8 < q_7 = q_6 = q_5 = q_4$
E_3, E_4, E_5	$q_3 < q_1 < q_7 < q_6 < q_5 < q_2 < q_{10} < q_9 < q_8 < q_4$
E_6	$q_7 < q_3 < q_1 < q_6 < q_5 < q_2 < q_{10} < q_9 < q_8 < q_4$

1) 文献[13]和文献[14]中所提的概率犹豫模糊熵测度E_{P_1}和E_{P_2}与距离熵测度E_1具有同样的排序结果. 他们同时认为概率犹豫模糊元q_4、q_8、q_9和q_{10}的熵是相同的,这说明这3种熵测度在本质上是相同的. 事实上,可将概率犹豫模糊熵测度E_{P_1}重新表述为

$$E_{P_1} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{i=1}^{l} g_1(\gamma^i)p^i, \tag{20}$$

式(20)采用函数$g_1(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$作为生成函数. 同样,可将概率犹豫模糊熵测度$E_{P_2}$重新表述为

$$E_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}\sum_{i=1}^{l} g_2(\gamma^i)p^i, \tag{21}$$

式(21)采用函数$g_2(x) = x\mathrm{e}^{1-x} + (1-x)\mathrm{e}^x - 1$为生成函数. 通过式(20)和(21)的重新表述,可以清晰地看出熵测度E_{P_1}和E_{P_2}确实只考虑了个体不确定性. 熵测度E_{P_1}、E_{P_2}和E_1对概率犹豫模糊元q_4、q_8、q_9和q_{10}无法区分,是因为这些概率犹豫模糊元所包含的隶属度具有互补关系,而且都是0.4和0.6.

2) 文献[13]和文献[14]中所提的概率犹豫模糊熵测度E_{Su}和伪距离熵测度E_2具有同样的排序结果. 他们同时认为概率犹豫模糊元q_4、q_5、q_6和q_7的熵是相同的,这说明这两种熵测度在本质上是相同的. 这里,熵测度E_{Su}采用的表达式为

$$E_{Su} = 1 - 4[s(q) - 0.5]^2, \tag{22}$$

其中函数$s(q)$表示q的得分函数. 本质上,式(22)和(10)表示的都是q的整体不确定性,是伪距离熵的不同表达形式. 伪距离熵测度对概率犹豫模糊元q_4、q_5、q_6和q_7无法区分,是因为这些犹豫模糊元具有相同的得分值0.5.

3) 表1中所有概率犹豫模糊熵测度都认可的严格序关系为$q_3 < q_1 < q_2 < q_4$,这是基本共识.

4) 表1中争议最大的是关于概率犹豫模糊元$q_7 = \{0.0|0.5, 1.0|0.5\}$的熵. 熵测度$E_{P_1}$、$E_{P_2}$和$E_1$认为$q_7$的熵是0;而熵测度$E_{Su}$和$E_2$认为$q_7$的熵是1,这两种观点都是不合理的. 对于概率犹豫模糊元$q_7 = \{0.0|0.5, 1.0|0.5\}$所表达意义的直观解释是:一个专家组内刚好有一半的人认为某个观点是正确的,而另一半的人则认为这个观点是错误的. 所以,概率犹豫模糊元$q_7 = \{0.0|0.5, 1.0|0.5\}$的熵既不可能是0,也不可能是1. 而本文正是出于这样的考虑提出了混合型熵测度,当$\alpha = 0.5$时,混合型熵测度$E_3 \sim E_6$都认为$q_7 = \{0.0|0.5, 1.0|0.5\}$的熵是0.5.

5) 根据表2,混合型熵测度$E_3 \sim E_6$具有最好的区分能力,能将这10个概率犹豫模糊元分出一个严格的序关系. 特别地,混合型熵测度E_3、E_4和E_5取得了一致的排序结果. 从计算和排序结果上可以看出:混合型熵测度能够综合距离熵测度和伪距离熵测度的优点,同时克服它们的缺点.

6) 不论从区分能力上,还是从合理性上看,本文所提出的混合型熵测度$E_3 \sim E_6$都是非常优秀的,而且结构简单,物理意义清晰,易于拓展应用.

3 混合型概率犹豫模糊交叉熵

概率犹豫模糊交叉熵测度主要用于测量两个概率犹豫模糊元之间的差异程度.

3.1 公理性定义

本文在综合考虑两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度和整体区分度的基础上,提出如下概率犹豫模糊交叉熵测度的公理性定义.

定义7 假设$q_1=\{\gamma_1^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$和$q_2=\{\gamma_2^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$是两个经规范化处理的概率犹豫模糊元,$q_1^c=\{1-\gamma_1^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$和$q_2^c=\{1-\gamma_2^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$是其补集,则$q_1$与$q_2$之间的交叉熵测度应满足以下5个公理性条件:

1) $0\leqslant C(q_1,q_2)\leqslant 1$;

2) $C(q_1,q_2)=0$当且仅当$q_1=q_2$;

3) $C(q_1,q_2)=1$当且仅当$q_1=\{0|1\}$或$\{1|1\}$,$q_2=q_1^c$;

4) $C(q_1,q_2)=C(q_2,q_1)$,$C(q_1,q_2)=C(q_1^c,q_2^c)$;

5) $C(q_1,q_2)$的值与q_1和q_2之间的距离测度正相关,同时也与q_1和q_2之间的伪距离测度正相关.

事实上,可以直接使用两个概率犹豫模糊元之间的距离测度作为它们之间的交叉熵测度,即

$$C_1(q_1,q_2)=\sum_{i=1}^{l}\left|\gamma_1^i-\gamma_2^i\right|p^i. \tag{23}$$

然而,式(23)所示的交叉熵测度并不能完全满足定义7所要求的公理性条件. 当$q=\{0|0.3,1|0.7\}$时,有$q^c=\{1|0.3,0|0.7\}$,根据式(23)计算可得$C_1(q,q^c)=1$. 显然,这与定义7所要求的公理性条件3)相矛盾.

同样地,也可使用两个概率犹豫模糊元之间的伪距离测度作为它们之间的交叉熵测度,即

$$C_2(q_1,q_2)=|s(q_1)-s(q_2)|. \tag{24}$$

然而,式(24)所示的交叉熵测度也不能完全满足定义7所要求的公理性条件. 当$q_1=\{0.4|0.5,0.6|0.5\}$,$q_2=\{0.2|0.5,0.8|0.5\}$时,根据式(24)计算可得$C_2(q_1,q_2)=0$. 显然,这与定义7所要求的公理性条件2)相矛盾.

显然,式(23)和(24)所给出的概率犹豫模糊交叉熵测度都无法完全满足定义7所要求的公理性条件. 从本质上讲,式(23)给出的交叉熵测度是对两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度进行的加权平均;而式(24)给出的交叉熵测度是对两个概率犹豫模糊元之间的整体区分度的度量. 因此,可在两个概率犹豫模糊元所反映的个体区分度与整体区分度之间进行恰当权衡,提出如下混合型概率犹豫模糊交叉熵测度.

3.2 混合型概率犹豫模糊交叉熵测度

混合型概率犹豫模糊交叉熵测度是对两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度与整体区分度的综合权衡. 数学上,可将其表示为$C_1(q_1,q_2)$和$C_2(q_1,q_2)$之间的凸组合,即

$$\begin{aligned}&C_3(q_1,q_2)=\alpha C_2(q_1,q_2)+(1-\alpha)C_1(q_1,q_2)=\\&\alpha|s(q_1)-s(q_2)|+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|p^i,\end{aligned} \tag{25}$$

其中参数$\alpha\in(0,1)$是权衡系数. 现在对混合型交叉熵测度的合理性给出如下定理和证明.

定理2 式(25)给出的混合型概率犹豫模糊交叉熵测度能够满足定义7所要求的所有公理性条件.

证明 假设$q_1=\{\gamma_1^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$和$q_2=\{\gamma_2^i|p^i,i=1,2,\dots,l\}$是两个经概率分裂算法规范化处理的概率犹豫模糊元.

1) 根据式(2)给出的得分函数和由式(5)给出的海明距离测度,推导可得

$$\begin{cases}0\leqslant|s(q_1)-s(q_2)|\leqslant 1,\\0\leqslant\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|p^i\leqslant 1.\end{cases} \tag{26}$$

进一步,考虑到$\alpha\in(0,1)$,可知定义7所要求的公理化条件1)能够被$C_3(q_1,q_2)$满足.

2) 因为$\alpha\neq 0,1-\alpha\neq 0$和$p^i\neq 0,\forall i=1,2,\dots,l$,从条件$C_3(q_1,q_2)=0$出发,推导可知下列方程组必定成立:

$$\begin{cases}|s(q_1)-s(q_2)|=0;\\|\gamma_1^i-\gamma_2^i|=0,\ i=0,1,\dots,l.\end{cases} \tag{27}$$

进一步,推导可得$\gamma_1^i=\gamma_2^i,i=0,1,\dots,l$,这意味着$q_1=q_2$必定成立. 反过来,从条件$q_1=q_2$出发,也能够推导出$C_3(q_1,q_2)=0$成立. 因此,定义7所要求的公理化条件2)能够被$C_3(q_1,q_2)$满足.

3) 因为$\alpha\neq 0,1-\alpha\neq 0$和$p^i\neq 0,\forall i=1,2,\dots,l$,从条件$C_3(q_1,q_2)=1$出发,推导可知下列方程组必定成立:

$$\begin{cases}|s(q_1)-s(q_2)|=1;\\|\gamma_1^i-\gamma_2^i|=1,\ i=0,1,\dots,l.\end{cases} \tag{28}$$

从以上方程组推导可得$\gamma_1^i=0,\gamma_2^i=1,i=1,\dots,l$或$\gamma_1^i=1,\gamma_2^i=0,i=1,\dots,l$. 这意味着$q_1=\{0|1\}$或$\{1|1\}$,$q_2=q_1^c$成立. 反之,从条件$q_1=\{0|1\}$或$\{1|1\}$,$q_2=q_1^c$出发,也可以推导出$C_3(q_1,q_2)=1$成立. 因此,定义7所要求的公理化条件3)能够被$C_3(q_1,q_2)$满足.

4) 根据式 (25) 对称性结构易知 $C_3(q_1,q_2) = C_3(q_2,q_1)$. 同时,根据式(25)推导可得

$$C_3(q_1^c,q_2^c)= \alpha|s(q_1^c)-s(q_2^c)|+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma_2^i-\gamma_1^i|p^i= \alpha|s(q_2)-s(q_1)|+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma_2^i-\gamma_1^i|p^i= C_3(q_1,q_2). \tag{29}$$

因此,定义7所要求的条件4)能够被$C_3(q_1,q_2)$满足.

5) 因为$\alpha\in(0,1)$,根据式(25)易知,混合型交叉熵测度$C_3(q_1,q_2)$与概率犹豫模糊元q_1和q_2之间的距离测度正相关,同时也与q_1和q_2之间的伪距离测度正相关. □

可见,由式(25) 给出的混合型交叉熵测度能够满足定义7 所要求的所有公理性条件.

3.3 混合型交叉熵测度拓展研究

本节首先对混合型熵测度和混合型交叉熵测度之间的关系进行研究.

定理3 由式(11)给出的混合型概率犹豫模糊熵测度能够从式(25)给出的混合型交叉熵测度推导出来,其相互关系为

$$E_3(q)=1-C_3(q,q^c). \tag{30}$$

证明 假设$q=\{\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l\}$为需要考虑的概率犹豫模糊元,$q^c=\{1-\gamma^i|p^i,i=1,2,\ldots,l\}$是其补集,根据式(25)推导可得

$$C_3(q,q^c)= \alpha|s(q)-s(q^c)|+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-(1-\gamma^i)|p^i= 2\alpha|s(q)-0.5|+2(1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}|\gamma^i-0.5|p^i= 1-E_3(q). \tag{31}$$

根据上式可知,式(11)给出的混合型概率犹豫模糊熵测度可由式(25)给出的混合型概率犹豫模糊交叉熵测度推导出来. □

根据式(25)所示的混合型交叉熵测度的构造方法,可以给出如下广义的混合型交叉熵测度:

$$C_4(q_1,q_2)=\alpha|s(q_1)-s(q_2)|+ (1-\alpha)\Big(\sum_{i=1}^{l}|\gamma_1^i-\gamma_2^i|^{\lambda}p^i\Big)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{32}$$

其中:常量$\lambda>0$,参数$\alpha\in(0,1)$是权衡系数. 如果采用三角函数$\cos x$作为生成函数,则可将式(25)所示的混合型交叉熵测度重新表述为

$$C_5(q_1,q_2)=1-\alpha\cos\Big[\frac{s(q_1)-s(q_2)}{2}\pi\Big]- (1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}\cos\Big(\frac{\gamma_1^i-\gamma_2^i}{2}\pi\Big)p^i. \tag{33}$$

类似地,也可采用熵函数$f(x)=-x\log(x)-(1-x)\log(1-x)$作为生成函数,将式(25)所示的混合型交叉熵测度表述为

$$C_6(q_1,q_2)=1-\alpha f\Big[\frac{1}{2}+\frac{s(q_1)-s(q_2)}{2}\Big]- (1-\alpha)\sum_{i=1}^{l}f\Big(\frac{1}{2}+\frac{\gamma_1^i-\gamma_2^i}{2}\Big)p^i. \tag{34}$$

事实上,拓展形式的混合型交叉熵测度(如式(32)～(34)所示)与拓展形式的混合型熵测度(如式(17)～(19)所示)具有一一对应的推导关系.

4 实例分析

在日新月异的军事变革中,传统的作战模式日益呈现出以下3 个致命缺陷: 1)高性能的武器系统数量稀少且非常昂贵,研发和维修成本极高; 2)低效的采办流程使得新装备的研发周期过长,无法快速适应战场需求; 3)作战体系过度依赖集中式的指挥控制结构,关键节点容易受到打击,呈现出极大的脆弱性. 为适应未来作战需求,美国国防部高级研究计划局于2019年9月提出了“马赛克战”的作战概念. 所谓马赛克战就是综合集成大量低成本、低复杂度的作战模块,形成具有高度弹性的作战网络,在作战中动态协调具有高度自适应能力的可组合作战模块,从而使整个作战网络更具生存能力.

马赛克战可将作战网络中的任何单节点的关键目标值降至最低. 当作战体系中的某个作战模块被敌方摧毁时,整个网络能快速响应,自动激活替补作战模块,自主形成虽有部分功能降级但仍能相互链接、适应战场需求的作战体系. 无人机集群作战的灵感源自于自然界中鱼群、鸟群、蜂群等低等群居生物的集群行为,它通过简单的局部交互自主涌现出整体的协同作战行为;它依靠大量低成本、速度快、适应能力强、易于携带和投射的无人机,极易形成规模优势,是适应未来战争需求的一种低成本的颠覆性作战模式. 无人机集群作战能够大量使用低成本的无人机携带各种类型的作战任务模块,组成前沿作战编队,能有效提高海陆空网电等各领域的作战效能,非常符合马赛克战的核心思想,且作战效能高,生存能力强,成本可控[16].

假设在当前作战体系中,有3个无人机集群x_i

$(i=1,2,3)$ 可用作替补作战模块. 战前准备中, 军事专家组依据如表3所示的评估指标体系对这3个替补作战模块进行了综合评估, 评估值以概率犹豫模糊元的形式给出, 最终评估结果如表4所示. 为进行必要的对比分析, 表4所用的数据来自文献[16], 由相应的概率语言决策矩阵改编而成. 本文目标是根据表4所示的概率犹豫模糊决策矩阵对这3个替补作战模块 $x_i\,(i=1,2,3)$ 进行综合排序.

表 3 无人机集群作战效能评估指标体系

评估指标	指标含义
预警探测能力 c_1	用于完成战场侦察、敌情预警等作战任务, 由目标检测、定位和跟踪能力构成
情报处理能力 c_2	为实现数据共享、态势感知和智能决策等功能, 由数据传输能力和分布式计算能力构成
辅助决策能力 c_3	为有效应对瞬息万变的战场环境, 无人机集群应具有一定的学习适应能力和群内态势共享能力
协同作战能力 c_4	在协同作战中, 为了提高战场生存率和使用经济性, 无人机集群应具有一定的快速重组能力和抗毁能力

表 4 概率犹豫模糊决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$\{0.375\|0.4, 0.500\|0.6\}$	$\{0.250\|0.20, 0.50\|0.80\}$	$\{0.375\|0.2, 0.50\|0.8\}$	$\{0.375\|0.4, 0.625\|0.6\}$
x_2	$\{0.375\|0.8, 0.625\|0.2\}$	$\{0.25\|0.25, 0.375\|0.5, 0.5\|0.25\}$	$\{0.125\|0.25, 0.25\|0.5, 0.375\|0.25\}$	$\{0.375\|0.8, 0.500\|0.2\}$
x_3	$\{0.375\|0.6, 0.500\|0.4\}$	$\{0.375\|0.75, 0.50\|0.25\}$	$\{0.375\|0.33, 0.5\|0.34, 0.625\|0.33\}$	$\{0.500\|0.8, 0.750\|0.2\}$

4.1 属性权重向量求解

在评估值确定的条件下, 属性权重对这3个替补作战模块的最终排序结果具有重要影响. 当属性权重信息完全未知时, 可采用熵权法确定属性权重向量, 基本步骤如下.

step 1: 基于混合型概率犹豫模糊熵测度, 各属性评估信息的平均熵可计算为

$$E_j=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}E(q_{ij}),\ j=1,2,3,4. \tag{35}$$

显然, 在平均熵 $E_j(j=1,2,3,4)$ 的计算上, 本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵测度都可以应用.

step 2: 根据信息熵理论, $E_j(j=1,2,3,4)$ 的值越小, 相应属性包含的确定性评估信息越多, 关于该属性的评价信息越有价值. 因此, 各属性的权重可以计算为

$$w_j=\frac{1-E_j}{\sum\limits_{j=1}^{4}(1-E_j)},\ j=1,2,3,4. \tag{36}$$

为便于对比分析, 这里将本文所提出的混合型熵测度用于属性权重计算, 并将计算结果与文献[16]的计算结果进行比较, 如表5所示.

表 5 属性权重向量及排序情况 $(\alpha=0.5,\lambda=2)$

方法	权重向量 $\boldsymbol{w}$	权重排序
文献[16]	(0.173 6, 0.242 5, 0.402 2, 0.181 7)	$w_3>w_2>w_4>w_1$
E_3	(0.217 4, 0.259 7, 0.305 6, 0.217 4)	$w_3>w_2>w_1=w_4$
E_4	(0.211 9, 0.271 5, 0.295 1, 0.221 5)	$w_3>w_2>w_1>w_4$
E_5	(0.144 7, 0.235 9, 0.448 4, 0.171 1)	$w_3>w_2>w_4>w_1$
E_6	(0.136 6, 0.229 7, 0.469 0, 0.164 7)	$w_3>w_2>w_4>w_1$

由表5可知: 尽管本文所提出的混合型熵测度对属性权重向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3,w_4)^{\mathrm{T}}$ 的计算结果并不一致, 但都认为最重要的属性是 c_3; 混合型熵测度 E_5 和 E_6 对各属性重要性的排序结果与文献[16]完全一致; 混合型熵测度 E_3 和 E_4 对各属性重要性的排序结果与文献[16]的排序结果基本一致.

4.2 替补作战模块排序

基于混合型概率犹豫模糊交叉熵测度, 采用TOPSIS法对替补作战模块进行优劣排序, 基本步骤如下.

step 1: 根据文献[16], 可将替补作战模块的正理想解确定为 $q_j^+=\{1|1\}, j=1,2,3,4$; 将负理想解确定为 $q_j^-=\{0|1\}, j=1,2,3,4$.

step 2: 基于混合型概率犹豫模糊交叉熵测度, 将替补作战模块 $x_i(i=1,2,3)$ 与正负理想解的综合区分度分别计算为

$$C_i^+=\sum_{j=1}^{4}w_jC(q_{ij},q_j^+),\ i=1,2,3; \tag{37}$$

$$C_i^-=\sum_{j=1}^{4}w_jC(q_{ij},q_j^-),\ i=1,2,3. \tag{38}$$

显然, 在综合区分度的计算中, 可使用本文所提出的每个混合型概率犹豫模糊交叉熵测度.

step 3: 将替补作战模块 $x_i\,(i=1,2,3)$ 与正理想解的相对贴近度计算为

$$\mathrm{CI}(x_i)=\frac{C_i^-}{C_i^++C_i^-},\ i=1,2,3. \tag{39}$$

显然, 相对贴近度 $\mathrm{CI}(x_i)(i=1,2,3)$ 的值越大, 相应的替补作战模块越优秀.

step 4: 按照相对贴近度 $\mathrm{CI}(x_i)(i=1,2,3)$ 的值

对替补作战模块进行优劣排序.

为便于比对分析,这里采用文献[16]的属性权重向量,即令$\boldsymbol{w}=(0.1736,0.2425,0.4022,0.1817)^{\mathrm{T}}$. 然后,基于本文所提出的混合型概率犹豫模糊交叉熵测度对替补作战模块进行优劣排序,并将计算结果与文献[16]的计算结果相比较,结果如表6所示.

表 6 方案排序向量及排序情况($\alpha=0.5,\lambda=2$)

方法	排序值	方案排序
文献[16]	$(0.4737,0.3379,0.4733)$	$x_1>x_3>x_2$
C_3	$(0.4737,0.3379,0.4733)$	$x_1>x_3>x_2$
C_4	$(0.4740,0.3407,0.4736)$	$x_1>x_3>x_2$
C_5	$(0.4512,0.2277,0.4506)$	$x_1>x_3>x_2$
C_6	$(0.4455,\ 0.2041,\ 0.4459)$	$x_3>x_1>x_2$

由表6可知:每个混合型交叉熵测度都认为替补作战模块x_2为最差,而认为x_1与x_3的差别不大;混合型交叉熵测度C_3、C_4和C_5能得到与文献[16]完全一致的排序结果;特别地,混合型交叉熵测度C_3得到的排序值也与文献[16]相一致.

5 结 论

本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵测度能够综合反映概率犹豫模糊元所具有的个体不确定性和整体不确定性,具有结构简单、物理意义清晰、区分能力强等优势;所提出的混合型概率犹豫模糊交叉熵测度克服了已有交叉熵测度的设计缺陷,能够综合反映两个概率犹豫模糊元之间的个体区分度和整体区分度,且具有自然的对称性;基于混合型概率犹豫模糊熵测度和交叉熵测度设计的多属性决策方法能够对无人机集群作战效能进行有效评估. 数值和理论结果表明,本文所提出的混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度能够成对设计、互为印证,能够在权重求解、价值排序、信息融合和偏好决策等方面具有重要应用价值.

参考文献(References)

[1] 徐泽水, 张申. 概率犹豫模糊决策理论与方法综述[J]. 控制与决策, 2021, 36(1): 42-51.
(Xu Z S, Zhang S. An overview of probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods[J]. Control and Decision, 2021, 36(1): 42-51.)

[2] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

[3] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.

[4] Zeng W Y, Li D Q, Yin Q. Group decision making approach of weighted hesitant fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 527-534.

[5] Fang B, Han B, Wen C H. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision-making based on new distance measure[J]. Control and Decision, 2022, 37(3): 729-736.

[6] 徐泽水, 赵华. 犹豫模糊集理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 168-197.
(Xu Z S, Zhao H. Hesitant fuzzy sets theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2018: 168-197.)

[7] Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.

[8] Zhu F, Xu J C, Liu Y M, et al. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision method based on signed distance and cross entropy[J]. Control and Decision, 2020, 35(8): 1977-1986.

[9] Fang B, Han B, Zhu J. Multi-attribute decision-making based on the reconciled hesitant fuzzy information[J]. Control and Decision, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0328.

[10] Lin M W, Zhan Q S, Xu Z S. Decision making with probabilistic hesitant fuzzy information based on multiplicative consistency[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2020, 35(8): 1233-1261.

[11] Wu X L, Liao H C, Xu Z S, et al. Probabilistic linguistic MULTIMOORA: A multicriteria decision making method based on the probabilistic linguistic expectation function and the improved Borda rule[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3688-3702.

[12] Farhadinia B, Xu Z S. Information measures for hesitant fuzzy sets and their extensions[M]. Singapore: Springer, 2019: 69-100.

[13] Su Z, Xu Z S, Zhao H, et al. Entropy measures for probabilistic hesitant fuzzy information[J]. IEEE Access, 2019, 7: 65714-65727.

[14] Farhadinia B, Aickelin U, Khorshidi H A. Uncertainty measures for probabilistic hesitant fuzzy sets in multiple criteria decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2020, 35(11): 1646-1679.

[15] Xiang N, Dou Y J, Jiang J, et al. Autonomous emergency decision-making of combat module under mosaic warfare[J]. Journal of Command and Control, 2020, 6(3): 223-228.

[16] Liu H B, Jiang L, Xu Z S. Entropy measures of probabilistic linguistic term sets[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2018, 11(1): 45.

作者简介

方冰(1980−), 男, 讲师, 博士, 从事信息融合、军事运筹、模糊决策、数学优化等研究, E-mail: bingfang_ch@163.com;

韩冰(1976−), 男, 副教授, 博士, 从事军事运筹、建模与仿真、作战实验等研究, E-mail: hbgfy126.com.

(责任编辑: 李君玲)