具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性分析

宋云霞, 周彬

具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性分析

宋云霞, 周 彬†

(哈尔滨工业大学 航天学院，哈尔滨 150001)

摘 要: 首先,针对具有多个时滞的积分时滞系统,建立新的基于线性矩阵不等式的稳定性条件. 该条件与正整数k有关,给出$k=1$时该条件与现有结果间的关系. 该关系表明所提出条件在$k\geqslant 2$时的保守性比现有结果小;然后,基于所提出的稳定性条件,进一步研究具有参数不确定性的积分时滞系统的鲁棒稳定性问题,建立基于线性矩阵不等式的充分条件;最后,利用所提出方法,研究具有多个离散时滞和分布时滞的积分时滞系统的稳定性问题. 数值算例结果表明了所提出稳定性判据的有效性.

关键词: 积分时滞系统；稳定性；鲁棒稳定性；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0469

引用格式: 宋云霞,周彬. 具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 562-568.

Stability analysis of integral delays systems with multiple time-delays

SONG Yun-xia, ZHOU Bin†

(School of Astronautics，Harbin Institute of Technology，Harbin 150001，China)

Abstract: This paper investigates the stability analysis of integral delay systems with multiple delays. A new stability condition in terms of linear matrix inequalities (LMIs) indexed by a positive integer k is provided. When $k=1$, the relationship between this condition and an existing result is revealed, which shows that the proposed condition with $k\geqslant 2$ can be less conservative than the existing ones. Based on the proposed stability condition, the robust stability problem for perturbed integral delay systems is investigated, and the results are expressed using LMIs. By using the proposed method, the stability analysis of integral time-delay systems with multiple discrete and distributed time delays are studied. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the established results.

Keywords: integral delay systems；stability；robust stability；linear matrix inequalities (LMIs)

0 引 言

时滞常常出现在网络化控制、电力系统广域控制等领域[1-2]. 时滞的存在往往会导致系统性能下降,甚至破坏系统的稳定性[3-5]. 另外,积分时滞系统在时滞系统的稳定性分析中有着重要作用. 如在一些时滞系统的稳定性分析中,积分时滞系统作为模型转换带来的附加动态,其稳定性是原时滞系统渐近稳定的必要条件[6];一类积分时滞系统的稳定性是无限维预估反馈控制器安全实现的必要条件[7];在中立型时滞系统的稳定性分析中,D算子对应的积分时滞系统的稳定性是原中立型时滞系统渐近稳定的必要条件[8]. 因此,积分时滞系统作为一类特殊的时滞系统,近年来受到了学者们的广泛关注.

目前,国内外学者对积分时滞系统的研究已经取得了一定的成果. 如文献[9]最早提出了积分时滞系统的Lyapunov稳定性定理;基于文献[9]的研究成果,文献[10]通过构造具体的Lyapunov-Krasovskii泛函得到了基于LMIs的指数稳定性条件;针对一类具有解析核的积分时滞系统,文献[11]给出了时滞相关稳定性条件和解的指数估计. 一般而言,多个时滞项的引入会显著增加积分时滞系统的稳定性分析难度. 针对具有多重时滞的积分时滞系统,文献[12]利用Jensen不等式给出了保证指数稳定性的充分条件. 文献[13]通过引入独立松弛权重矩阵的手段降低了文献[12]所给条件的保守性. 然而,这些稳定性条件的保守性仍然较大. 最近几年,国内外涌现出一些具有较低保守性的时滞系统稳定性判据的分析方法. 如复杂积分型不等式方法[14-15],自由加权矩阵

收稿日期: 2021-03-21；**录用日期:** 2021-11-26.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61773140).
责任编委: 徐胜元.
†通讯作者. E-mail: binzhou@hit.edu.cn.

法[16-17]等. 但是,据了解,关于具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性结论目前还比较少,亟需进一步研究和讨论.

基于上述分析,本文将考虑具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性问题. 本文的主要内容如下:受文献[18-20]的启发,本文将从频域的角度对具有多个时滞的积分时滞系统进行稳定性分析,并建立一族新的基于LMIs的稳定性条件. 该条件与正整数k有关,且其保守性随着正整数k的增大先减小后趋于不变. 基于所提出的稳定性条件,进一步研究具有参数不确定性的积分时滞系统的鲁棒稳定性分析问题,并建立基于LMIs的充分条件. 最后,将所提出方法用于具有多个离散时滞和分布时滞的积分时滞系统的稳定性研究.

1　预备知识

在本文中,$I_n(0_n)$和$0_{n\times p}$分别表示维数为$n\times n$的单位(零)矩阵和维数为$n\times p$的零矩阵. 符号$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{Z}^+$、$\overline{\boldsymbol{C}^+}$、$\boldsymbol{R}^n$、$\boldsymbol{R}^{n\times m}$和$\boldsymbol{S}^n$分别为复数集合、实数集合、正整数集合、复闭右半平面、n维实向量集合、维数为$n\times m$的实矩阵集合和维数为$n\times n$的实对称矩阵集合. 对于$h>0$,$\mathscr{C}\{[-h,0],\ \boldsymbol{R}^n\}$表示将区间$[-h,0]$映射到$\boldsymbol{R}^n$的连续向量函数空间. 对于任意方阵$P$, P^{T}、P^{H}、$\rho(\cdot)$和$\det(P)$分别为方阵P的转置、共轭转置、谱半径和行列式. $\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$表示对角线元素分别为$p_1,p_2,\ldots,p_n$的对角矩阵. 对于任意矩阵$M$, 设$M^{\{0\}}=1, M^{\{p\}}\triangleq M^{\{p-1\}}\otimes M$,其中$\otimes$为Kronecker积. 对于任意$z\in\boldsymbol{C}$,令$|z|$为$z$的模. 对于任意$k\in\boldsymbol{Z}^+$,设

$$L_k=[I_k\quad 0_{k\times 1}],\ R_k=[0_{k\times 1}\quad I_k]. \tag{1}$$

对于任意$z_i\in\boldsymbol{C}$,设

$$z_i^{[k]}=[1\quad z_i\quad \ldots\quad z_i^{k-1}]^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

考虑如下积分时滞系统:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\int_{-r_i}^{0}x(t+\tau)\mathrm{d}\tau,\ t\geqslant 0. \tag{3}$$

其中: $A_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}(i=1,2,\ldots,N)$为定常系数矩阵; $r_i>0$为常数; $r=\max\{r_i\}$; $\varphi(\theta)\in\mathscr{C}\{[-r,0],\boldsymbol{R}^n\}$为系统(3)的初始条件, $x(t)=x(t,\varphi)(t\geqslant 0)$为系统在初始条件$x(t)=\varphi(t)(t\in[-r,0])$下的解.

对于上述形式的积分时滞系统, Hale[21]建立了如下稳定性结论.

引理1[21]　积分时滞系统(3)是指数稳定的,当且仅当

$$\det\Big(I_n-\sum_{i=1}^{N}A_i\int_{-r_i}^{0}\mathrm{e}^{\tau s}\mathrm{d}\tau\Big)\neq 0,\ \forall s\in\overline{\boldsymbol{C}^+}.$$

为了给出本文的主要结论,引入下面的引理.

引理2[22]　对于具有适当维数的实矩阵X、Y和正定矩阵Q,有如下不等式成立:

$$XY+Y^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\leqslant XQX^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}Q^{-1}Y. \tag{4}$$

2　主要结果

2.1　基于LMIs的稳定性条件

针对具有多个时滞的积分时滞系统(3),本节将建立基于LMIs的稳定性条件. 为了表达方便,定义

$$\begin{aligned}&\varOmega_k(P_{k,1},P_{k,2},\ldots,P_{k,N})=\\&\mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_k-\mathcal{B}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{B}_k+\\&\sum_{l=2}^{N}(\mathcal{C}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{C}_{k,l}-\mathcal{D}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{D}_{k,l}).\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_k=L_k^{\{N-1\}}\otimes I_n,\\&\mathcal{C}_{k,l}=L_k^{\{N+1-l\}}\otimes I_{(k+1)^{l-2}n},\\&\mathcal{D}_{k,l}=L_k^{\{N-l\}}\otimes R_k\otimes I_{(k+1)^{l-2}n},\\&\mathcal{A}_k=\sum_{i=2}^{N}L_k^{\{N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{i-2\}}\otimes r_iA_i+\\&\quad L_k^{\{N-1\}}\otimes r_1A_1.\end{aligned}$$

下面给出本文的主要结论.

定理1　若存在正整数k,正定矩阵$P_{k,1}\in\boldsymbol{S}^{k^{N-1}n}$和矩阵$P_{k,l}\in\boldsymbol{S}^{k^{N+1-l}(k+1)^{l-2}n}$, $l=2,3,\ldots,N$,使得如下不等式成立:

$$\varOmega_k(P_{k,1},P_{k,2},\ldots,P_{k,N})<0_{(k+1)^{N-1}n}, \tag{6}$$

则积分时滞系统(3)是指数稳定的.

证明　对于任意$z_i\in\boldsymbol{C}$且$|z_i|\leqslant 1, i=1,2,\ldots,N-1$,定义

$$\begin{aligned}&\tilde{z}_k\triangleq z_{N-1}^{[k]}\otimes z_{N-2}^{[k]}\otimes\ldots\otimes z_1^{[k]}\otimes I_n,\\&A(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})\triangleq\\&r_1A_1+r_2A_2z_1+\ldots+r_NA_Nz_{N-1}.\end{aligned}$$

由式(1)和(2),得到

$$L_kz_i^{[k+1]}=z_i^{[k]},\ R_kz_i^{[k+1]}=z_iz_i^{[k]}. \tag{7}$$

将式(6)的左右两端分别乘以$\tilde{z}_{k+1}^{\mathrm{H}}$和$\tilde{z}_{k+1}$,然后再利用式(7)得到

$$\begin{aligned}&0>\\&A^{\mathrm{H}}(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})\tilde{z}_k^{\mathrm{H}}P_{k,1}\tilde{z}_kA(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})-\\&\tilde{z}_k^{\mathrm{H}}P_{k,1}\tilde{z}_k+\sum_{j=2}^{N}(1-|z_{j-1}|^2)f_z^{\mathrm{H}}P_{k,j}f_z,\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$f_z = z_{N-1}^{[k]} \otimes \ldots \otimes z_{j-1}^{[k]} \otimes z_{j-2}^{[k+1]} \otimes \ldots \otimes z_1^{[k+1]} \otimes I_n.$$

由式(8),对于$|z_i| \leqslant 1, i=1,2,\ldots,N-1$,有

$$A^{\mathrm{H}}(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})\tilde{z}_k^{\mathrm{H}} P_{k,1}\tilde{z}_k A(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})- \tilde{z}_k^{\mathrm{H}} P_{k,1}\tilde{z}_k < 0. \tag{9}$$

由于$\tilde{z}_k$列满秩且$P_{k,1}$正定,由式(9),有

$$\rho(A(z_1,z_2,\ldots,z_{N-1})) < 1, \tag{10}$$

或

$$\rho(\widetilde{A}(z_1,z_2,\ldots,z_N)) < 1, \tag{11}$$

其中

$$\widetilde{A}(z_1,z_2,\ldots,z_N) = r_1A_1z_1 + r_2A_2z_2 + \ldots + r_NA_Nz_N,$$

且z_i满足$|z_i| \leqslant 1, i=1,2,\ldots,N$.

对于任意$s \in \overline{\boldsymbol{C}^+}$和$r_i>0, i=1,2,\ldots,N$,均有不等式[23]

$$\Big|\frac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}\Big| \leqslant 1$$

成立. 因此,不妨令$z_i = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}$并代入式(11),得到

$$\rho\Big(\sum_{i=1}^N r_iA_i\frac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}\Big) < 1,\ \forall s \in \overline{\boldsymbol{C}^+}. \tag{12}$$

则有

$$\det\Big(I_n - \sum_{i=1}^N r_iA_i\frac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}\Big) = \det\Big(I_n - \sum_{i=1}^N A_i\int_{-r_i}^0 \mathrm{e}^{\tau s}\mathrm{d}\tau\Big) \neq 0,\quad \forall s \in \overline{\boldsymbol{C}^+}.$$

由引理1可知,积分时滞系统(3)是指数稳定的. □

2.2 与已有结论的关系

本节将揭示定理1与现有结论间的关系. 首先介绍文献[13]中的主要结论. 为了表达方便,定义

$$\varPsi_1(Q_1,Q_2,\ldots,Q_N) \triangleq -\operatorname{diag}\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_N\}+ \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} r_1A_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ r_1A_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} Q_i \begin{bmatrix} r_1A_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ r_1A_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

引理3[13] 若存在正定矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_N \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$使得如下不等式成立:

$$\varPsi_1(Q_1,Q_2,\ldots,Q_N) < 0,$$

则积分时滞系统(3)是指数稳定的.

定理1中,令

$$k=1,$$
$$P_{1,1} = \sum_{i=1}^N Q_i,$$
$$P_{1,2} = Q_2,$$
$$P_{1,3} = \operatorname{diag}\{Q_3, 0_n\} \in \boldsymbol{S}^{2n},$$
$$P_{1,4} = \operatorname{diag}\{Q_4, 0_n, \ldots, 0_n\} \in \boldsymbol{S}^{4n},$$
$$\vdots$$
$$P_{1,N-1} = \operatorname{diag}\{Q_{N-1}, 0_n, \ldots, 0_n\} \in \boldsymbol{S}^{2^{N-3}n},$$
$$P_{1,N} = \operatorname{diag}\{Q_N, 0_n, \ldots, 0_n\} \in \boldsymbol{S}^{2^{N-2}n},$$

可得到如下结论.

命题1 令$\varOmega_1(P_{1,1},P_{1,2},\ldots,P_{1,N})$如式(5)定义,$\varPsi_1(Q_1,Q_2,\ldots,Q_N)$如式(13)定义,有

$$H_N\varOmega_1(P_{1,1},\ldots,P_{1,N})H_N^{\mathrm{T}} = \varPsi_1(Q_1,\ldots,Q_N),$$

其中

$$H_N = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(2^{N-1}-1)n} & \\ 0_{n\times 2^0 n} & I_n & 0_{n\times(2^{N-1}-2^0-1)n} \\ 0_{n\times 2^1 n} & I_n & 0_{n\times(2^{N-1}-2^1-1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{n\times 2^{N-2} n} & I_n & 0_{n\times(2^{N-1}-2^{N-2}-1)n} \end{bmatrix}.$$

由命题1可知,引理3可看作是定理1在$k=1$时的特例. 另外,当$k \geqslant 2$时,定理1具有比引理3更小的保守性.

注1 文献[13]中的引理3是通过构造Lyapunov-Krasovskii泛函的方法得到的. 由于引理3可看作是定理1在$k=1$时的特例,可以利用文献[13]所构造Lyapunov-Krasovskii泛函给出定理1在$k=1$时的时域解释. 然而,对于$k \geqslant 2$时的情形,目前尚未找到与定理1相关的Lyapunov-Krasovskii泛函. 该问题还需进一步研究.

注2 文献[13]已证明引理3比文献[10]中的结论保守性更低. 因此,由引理1可知,定理1具有更低的保守性.

2.3 鲁棒稳定性分析

考虑如下具有参数不确定性的积分时滞系统:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N (A_i+\Delta A_i)\int_{-r_i}^0 x(t+\tau)\mathrm{d}\tau,\ t \geqslant 0. \tag{14}$$

其中: $A_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$为定常矩阵; $\Delta A_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$为不确定矩阵,且具有如下形式:

$$[\Delta A_1\ \ \Delta A_2\ \ \ldots\ \ \Delta A_N] = A_0E[B_1\ \ B_2\ \ \ldots\ \ B_N]. \tag{15}$$

其中: $A_0\in\boldsymbol{R}^{n\times p}$; $B_1,B_2,\dots,B_N\in\boldsymbol{R}^{q\times n}$为已知的常数矩阵; $E\in\boldsymbol{R}^{p\times q}$为范数有界的不确定矩阵, 且满足$E^{\mathrm{T}}E\leqslant\rho^2 I_q$, ρ为已知参数.

为了表达方便, 定义

$$Y_k=L_k^{\{N-1\}}\otimes r_1B_1+\sum_{i=2}^{N}(L_k^{\{N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{i-2\}}\otimes r_iB_i).$$

有如下结论.

定理2 若存在正整数k, 正定矩阵$X_k\in\boldsymbol{S}^{k^{N-1}}$, 正定矩阵$P_{k,1}\in\boldsymbol{S}^{k^{N-1}n}$, 矩阵$P_{k,l}\in\boldsymbol{S}^{k^{N+1-l}(k+1)^{l-2}n}$, $l=2,3,\dots,N$, 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{k1}+\varPi_k+\mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_k & \mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\\ \mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_k & -\mathcal{X}_k+\mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\end{bmatrix}<0, \tag{16}$$

则系统(14)是鲁棒指数稳定的. 其中

$$\mathcal{A}_{k0}=I_{k^{N-1}}\otimes A_0,$$
$$\mathcal{X}_k=X_k\otimes I_p,$$
$$\varPi_k=\rho^2Y_k^{\mathrm{T}}(X_k\otimes I_q)Y_k,$$
$$\varOmega_{k1}=\sum_{l=2}^{N}(\mathcal{C}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{C}_{k,l}-\mathcal{D}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{D}_{k,l})-\mathcal{B}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{B}_k.$$

证明 定理2的证明类似于文献[18]中定理3的证明. 利用Schur补引理[24]和合同变换, 式(16)等价于

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{k1}+\varPi_k+\mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_k & \mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\\ \mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_k & -\mathcal{X}_k+\mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\varOmega_{k1}+\varPi_k & 0_{(k+1)^{N-1}n\times k^{N-1}p} & \mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\\ 0_{k^{N-1}p\times(k+1)^{N-1}n} & -\mathcal{X}_k & \mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1}\\ P_{k,1}\mathcal{A}_k & P_{k,1}\mathcal{A}_{k0} & -P_{k,1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\varOmega_{k1}+\varPi_k & \mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1} & 0_{(k+1)^{N-1}n\times k^{N-1}p}\\ P_{k,1}\mathcal{A}_k & -P_{k,1} & P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\\ 0_{k^{N-1}p\times(k+1)^{N-1}n} & \mathcal{A}_{k0}^{\mathrm{T}}P_{k,1} & -\mathcal{X}_k\end{bmatrix}=$$
$$\varSigma_k+G_k\mathcal{X}_k^{-1}G_k^{\mathrm{T}}\rho^2M_k(X_k\otimes I_q)M_k^{\mathrm{T}}<0. \tag{17}$$

其中

$$\varSigma_k=[\varOmega_{k1},\mathcal{A}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1},P_{k,1}\mathcal{A}_k,-P_{k,1}],$$
$$G_k=\begin{bmatrix}0_{(k+1)^{N-1}n\times k^{N-1}p}\\ P_{k,1}\mathcal{A}_{k0}\end{bmatrix},$$
$$M_k=\begin{bmatrix}Y_k^{\mathrm{T}}\\ 0_{k^{N-1}n\times k^{N-1}q}\end{bmatrix}.$$

由式(15), 得到

$$\Delta\mathcal{A}_k\triangleq\sum_{i=2}^{N}(L_k^{\{N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{i-2\}}\otimes r_i\Delta A_i)+L_k^{\{N-1\}}\otimes r_1\Delta A_1=$$
$$(I_{k^{N-1}}\otimes A_0)(I_{k^{N-1}}\otimes E)Y_k. \tag{18}$$

根据引理2, 由式(17), 得到

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{k1} & (\mathcal{A}_k+\Delta\mathcal{A}_k)^{\mathrm{T}}P_{k,1}\\ P_{k,1}(\mathcal{A}_k+\Delta\mathcal{A}_k) & -P_{k,1}\end{bmatrix}=$$
$$\varSigma_k+G_k(I_{k^{N-1}}\otimes E)M_k^{\mathrm{T}}+M_k(I_{k^{N-1}}\otimes E^{\mathrm{T}})G_k^{\mathrm{T}}\leqslant$$
$$\varSigma_k+G_k(X_k^{-1}\otimes I_p)G_k^{\mathrm{T}}+$$
$$M_k(I_{k^{N-1}}\otimes E^{\mathrm{T}})\mathcal{X}_k(I_{k^{N-1}}\otimes E)M_k^{\mathrm{T}}\leqslant$$
$$\varSigma_k+G_k\mathcal{X}_k^{-1}G_k^{\mathrm{T}}+\rho^2M_k(X_k\otimes I_q)M_k^{\mathrm{T}}<0. \tag{19}$$

利用Schur补引理[24], 由式(19), 得到

$$0>$$
$$(\mathcal{A}_k+\Delta\mathcal{A}_k)^{\mathrm{T}}P_{k,1}(\mathcal{A}_k+\Delta\mathcal{A}_k)-\mathcal{B}_k^{\mathrm{T}}P_{k,1}\mathcal{B}_k+$$
$$\sum_{l=2}^{N}(\mathcal{C}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{C}_{k,l}-\mathcal{D}_{k,l}^{\mathrm{T}}P_{k,l}\mathcal{D}_{k,l}).$$

由定理1可知, 系统(14)是指数稳定的. □

令定理2中的$k=1$, 可得到如下结论.

推论1 若存在正定矩阵$X_1\in\boldsymbol{S}^n$, 正定矩阵$P_{1,1}\in\boldsymbol{S}^n$和矩阵$P_{1,l}\in\boldsymbol{S}^{2^{l-2}n}$, $l=2,3,\dots,N$, 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{11}+\varPi_1+\mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}P_{1,1}\mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}P_{1,1}A_0\\ A_0^{\mathrm{T}}P_{1,1}\mathcal{A}_1 & -\mathcal{X}_1+A_0^{\mathrm{T}}P_{1,1}A_0\end{bmatrix}<0,$$

则系统(14)是鲁棒指数稳定的. 其中

$$\varPi_1=\rho^2Y_1^{\mathrm{T}}(X_1\otimes I_q)Y_1,$$
$$\varOmega_{11}=\sum_{l=2}^{N}(\mathcal{C}_{1,l}^{\mathrm{T}}P_{1,l}\mathcal{C}_{1,l}-\mathcal{D}_{1,l}^{\mathrm{T}}P_{1,l}\mathcal{D}_{1,l})-\mathcal{B}_1^{\mathrm{T}}P_{1,1}\mathcal{B}_1.$$

3 结果推广

所提出方法还可以用于更加复杂的积分时滞系统的稳定性研究. 下面考虑同时具有多个离散时滞和分布时滞的积分时滞系统, 有

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\int_{-r_i}^{0}x(t+\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^{N}C_ix(t-h_i). \tag{20}$$

其中: $A_i,C_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $r_i>0$, $h_i>0$, $i=1,2,\dots,N$. 对于系统(20), 利用定理1的方法可以得到如下稳定性结论.

定理3 若存在正整数k, 正定矩阵$Q_{k,1}\in\boldsymbol{S}^{k^{2N-1}n}$和矩阵$Q_{k,l}\in\boldsymbol{S}^{k^{2N+1-l}(k+1)^{l-2}n}$, $l=2,3,\dots,2N$, 使得如下不等式成立:

$$\varPhi_k(Q_{k,1},Q_{k,2},\dots,Q_{k,2N})<0_{(k+1)^{2N-1}n}, \tag{21}$$

则积分时滞系统(20)是指数稳定的, 其中

$$\varPhi_k(Q_{k,1},Q_{k,2},\dots,Q_{k,2N})=$$

$$\mathfrak{A}_k^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{A}_k-\mathfrak{B}_k^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{B}_k+\sum_{l=2}^{2N}(\mathfrak{C}_{k,l}^{\mathrm{T}}Q_{k,l}\mathfrak{C}_{k,l}-\mathfrak{D}_{k,l}^{\mathrm{T}}Q_{k,l}\mathfrak{D}_{k,l}),\quad(22)$$

$$\mathfrak{A}_k=L_k^{\{2N-1\}}\otimes r_1A_1+\sum_{i=2}^{N}L_k^{\{2N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{i-2\}}\otimes r_iA_i+\sum_{i=1}^{N}L_k^{\{N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{N+i-2\}}\otimes C_i,$$

$$\mathfrak{B}_k=L_k^{\{2N-1\}}\otimes I_n,$$

$$\mathfrak{C}_{k,l}=L_k^{\{2N+1-l\}}\otimes I_{(k+1)^{l-2}n},$$

$$\mathfrak{D}_{k,l}=L_k^{\{2N-l\}}\otimes R_k\otimes I_{(k+1)^{l-2}n}.$$

证明 根据定理1的证明过程,由式(22),得到

$$\rho(\overline{A}(z_1,z_2,\dots,z_{2N}))<1,\quad(23)$$

其中

$$\overline{A}(z_1,z_2,\dots,z_{2N})=r_1A_1z_1+r_2A_2z_2+\dots+r_NA_Nz_N+C_1z_{N+1}+C_2z_{N+2}+\dots+C_Nz_{2N},$$

且 z_i 满足 $|z_i|\leqslant 1, i=1,2,\dots,2N$. 令 $z_i=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}$, $i=1,2,\dots,N$; $z_i=\mathrm{e}^{-h_is}, i=N+1,N+2,\dots,2N$. 代入式(23),得到

$$\rho\Big(\sum_{i=1}^{N}r_iA_i\frac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}+\sum_{i=1}^{N}C_i\mathrm{e}^{-h_is}\Big)<1,\quad\forall s\in\overline{\boldsymbol{C}^+}.\quad(24)$$

则有

$$\det\Big(I_n-\sum_{i=1}^{N}r_iA_i\frac{1-\mathrm{e}^{-r_is}}{r_is}-\sum_{i=1}^{N}C_i\mathrm{e}^{-h_is}\Big)=\det\Big(I_n-\sum_{i=1}^{N}A_i\int_{-r_i}^{0}\mathrm{e}^{\tau s}\mathrm{d}\tau-\sum_{i=1}^{N}C_i\mathrm{e}^{-h_is}\Big)\neq 0,\quad\forall s\in\overline{\boldsymbol{C}^+}.$$

因此,积分时滞系统(20)是指数稳定的. □

类似地,考虑如下具有参数不确定性的积分时滞系统:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}(A_i+\Delta A_i)\int_{-r_i}^{0}x(t+\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^{N}(C_i+\Delta C_i)x(t-h_i),\ t\geqslant 0,\quad(25)$$

其中 $\Delta A_i,\Delta C_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为不确定矩阵,且具有如下形式:

$$[\Delta A_1\ \ \dots\ \ \Delta A_N\ \ \Delta C_1\ \ \dots\ \ \Delta C_N]=A_0E[B_1\ \ \dots\ \ B_N\ \ B_{N+1}\ \ \dots\ \ B_{2N}].\quad(26)$$

其中: $A_0,B_1,\dots,B_N$ 和 E 的意义同上; $D_1,\dots,D_N\in\boldsymbol{R}^{q\times n}$ 为已知的常数矩阵. 根据定理3,有如下结论.

推论2 若存在正整数 k, 正定矩阵 $W_k\in\boldsymbol{S}^{k^{2N-1}}$ 和 $Q_{k,1}\in\boldsymbol{S}^{k^{2N-1}n}$, 矩阵 $Q_{k,l}\in\boldsymbol{S}^{k^{2N+1-l}(k+1)^{l-2}n}$, $l=2,3,\dots,2N$, 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Phi_{k1}+\pi_k+\mathfrak{A}_k^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{A}_k & \mathfrak{A}_k^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{A}_{k0}\\ \mathfrak{A}_{k0}^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{A}_k & \mathfrak{A}_{k0}^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{A}_{k0}-\mathcal{W}_k\end{bmatrix}<0,\quad(27)$$

则积分时滞系统(25)是鲁棒指数稳定的. 其中

$$\mathfrak{A}_{k0}=I_{k^{2N-1}}\otimes A_0,$$

$$\mathcal{W}_k=W_k\otimes I_p,$$

$$\pi_k=\rho^2\overline{Y}_k^{\mathrm{T}}(W_k\otimes I_q)\overline{Y}_k,$$

$$\Phi_{k1}=\sum_{l=2}^{2N}(\mathfrak{C}_{k,l}^{\mathrm{T}}Q_{k,l}\mathfrak{C}_{k,l}-\mathfrak{D}_{k,l}^{\mathrm{T}}Q_{k,l}\mathcal{D}_{k,l})-\mathfrak{B}_k^{\mathrm{T}}Q_{k,1}\mathfrak{B}_k,$$

$$\overline{Y}_k=L_k^{\{2N-1\}}\otimes r_1B_1+\sum_{i=2}^{N}L_k^{\{2N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{i-2\}}\otimes r_iB_i+\sum_{i=1}^{N}L_k^{\{N-i\}}\otimes R_k\otimes L_k^{\{N+i-2\}}\otimes B_{i+N}.$$

4 数值仿真

例1 考虑积分时滞系统(3),其中 $N=3$, 定常系数矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -13 & 2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

根据文献[10]和文献[13]中的结论和定理1分别计算最大允许的 r_3 值(记为 $\overline{r}_3$). 结果如表1所示.

表1 利用不同方法计算的 $\overline{r}_3$

方法	文献[10]	文献[13]	定理1
$r_1=0.1$, $r_2=0.1$	0.2764	0.3853	0.3853($k=1$) 0.4653($k=2$) 0.4653($k=3$)
$r_1=0.1$, $r_2=0.2$	0.1398	0.2789	0.2789($k=1$) 0.3899($k=2$) 0.3899($k=3$)
$r_1=0.1$, $r_2=0.3$	无解	0.1782	0.1782($k=1$) 0.2957($k=2$) 0.2957($k=3$)

由表1可见,对于给定的r_1和r_2,r_3会随着k值的增大先增大,最后不变. 这表明定理1给出的稳定性条件的保守性会随着k值的增大而逐渐变小,最后趋于不变. 另外,对比文献[10],文献[13]与定理1的结果可见,定理1在$k=1$时所允许的$\bar{r}_3$值与文献[13]相同,比文献[10]所允许的$\bar{r}_3$值大;在$k=2,3$时,运用定理1可得到比文献[10]和文献[13]更大的$\bar{r}_3$值. 因此,与文献[10]和文献[13]的结果相比,本文的定理1在$k=2$时已具有更低的保守性.

例2 考虑具有不确定性的积分时滞系统(14),其中$N=2$,且[25]

$$A_1=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.2\\ -0.1 & -1.1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 2 & 0.1\end{bmatrix}.$$

对于系统(14),选取$E=I_2,U_1=U_2=I_2,\rho=0.1$. 通过计算可知,不确定矩阵$\Delta A_1$和$\Delta A_2$分别满足$\|\Delta A_1\|\leqslant 0.1,\|\Delta A_2\|\leqslant 0.1$. 下面分别利用定理2和文献[25]中的结论寻找最大允许的r_2值(记为$\bar{r}_2$). 结果如表2所示.

表2 利用不同方法计算的$\bar{r}_2$

方法	文献[25]	定理2
$r_1=0.1$	0.5617	$1.6621(k=1)$
		$1.7849(k=2)$
		$1.7853(k=3)$
		$1.7853(k=4)$
$r_1=0.2$	0.5271	$1.3638(k=1)$
		$1.4311(k=2)$
		$1.4314(k=3)$
		$1.4314(k=4)$
$r_1=0.3$	0.4633	$1.0276(k=1)$
		$1.0484(k=2)$
		$1.0485(k=3)$
		$1.0485(k=4)$

由表2可见,对于给定的r_1、r_2,会随着k值的增大先增长最后趋于不变. 由本算例可见,定理2在$k=3$时可得到r_2的最大值(在当前考虑的精确度下). 另外,定理2在$k=1,2,3$时均能够得到比文献[25]更大的$\bar{r}_2$值. 因此,与文献[25]的结果相比,定理2(或推论1)具有更低的保守性.

例3 当积分时滞系统(20)选取文献[26]中的例2参数时,有

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ -0.2 & -0.3\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.5 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0.2 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ -0.1 & -0.2\end{bmatrix}.$$

与例1、例2类似,通过求解线性矩阵不等式(21),计算r_2的最大值. 当$k=1$时,运用定理3求得r_2的最大值为0.8909,而文献[26]给出的最大时滞上界为0.695. 因此,与文献[26]的结论相比,定理3在$k=1$时已具有更小的保守性.

5 结论

本文研究了具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性问题. 通过从频域的角度对积分时滞系统进行研究,建立了保守性更低的稳定性和鲁棒稳定性条件. 利用所提出的稳定性条件,进一步建立了具有多个离散和分布时滞的积分时滞系统的LMIs条件.

参考文献(References)

[1] 陈军, 徐胜元, 张保勇. 线性时滞系统稳定性最新研究综述[J]. 信息与控制, 2020, 49(1): 36-46.
(Chen J, Xu S Y, Zhang B Y. Surveyon recent results in stability of linear time-delay systems[J]. Information and Control, 2020, 49(1): 36-46.)

[2] 李旭光, 张颖伟, 冯琳. 时滞系统的完全稳定性研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(7): 1153-1170.
(Li X G, Zhang Y W, Feng L. Survey on complete stability study for time-delay systems[J]. Control and Decision, 2018, 33(7): 1153-1170.)

[3] 毛卫华, 邓飞其, 万安华. 随机Markov跳跃时滞系统的鲁棒$H\infty$指数滤波器设计[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 501-510.
(Mao W H, Deng F Q, Wan A H. Robust $H\infty$ exponential filtering for stochastic Markovian jump time-varying delay systems[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(4): 501-510.)

[4] 李晓蒙, 赵占山, 张静, 等. 一类时变时滞系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2016, 31(11): 2090-2094.
(Li X M, Zhao Z S, Zhang J, et al. Stability criteria for a class of time-varying delay systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(11): 2090-2094.)

[5] 练红海, 肖伸平, 陈刚, 等. 时滞乘积型Lyapunov泛函的时变时滞系统稳定性新判据[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 1017-1024.
(Lian H H, Xiao S P, Chen G, et al. New criteria for stability time-varying delay systems based on delay-product-type Lyapunov functionals[J]. Control and

Decision, 2020, 35(4): 1017-1024.)
[6] Kharitonov V, Melchor-Aguilar D. Additional dynamics for general class of time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 1060-1064.
[7] 刘青松. 基于嵌套-伪预估器反馈的时滞控制系统输入时滞补偿[J]. 自动化学报, 2021, 47(10): 2464-2471. (Liu Q S. Nested-pseudo predictor feedback based input delay compensation for time-delay control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(10): 2464-2471.)
[8] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to functional differential equations[M]. Berlin: Springer, 1993: 255-296.
[9] Melchor-Aguilar D, Kharitonov V, Lozano R. Stability conditions for integral delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(1): 1-15.
[10] Melchor-Aguilar D. On stability of integral delay systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(7): 3578-3584.
[11] Mondie S, Melchor-Aguilar D. Exponential stability of integral delay systems with a class of analytic kernels[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(2): 484-489.
[12] Melchor-Aguilar D. Exponential stability of some linear continuous time difference systems[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(1): 62-68.
[13] Zhou B, Li Z Y. Stability analysis of integral delay systems with multiple delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(1): 188-193.
[14] Long F, Zhang C K, He Y, et al. Stability analysis for delayed neural networks via a novel negative-definiteness determination method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, DOI: 10.1109/TCYB.3031087.
[15] Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Further robust stability analysis for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality[J]. Information Sciences, 2017, 409/410: 139-150.
[16] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. An extended reciprocally convex matrix inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2017, 85: 481-485.
[17] Chen J, Park J H, Xu S Y. Stability analysis for neural networks with time-varying delay via improved techniques[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(12): 4495-4500.
[18] Song Y X, Michiels W, Zhou B, et al. Strong stability analysis of linear delay-difference equations with multiple time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(8): 3741-3748.
[19] Zhou B. On strong stability and robust strong stability of linear difference equations with two delays[J]. Automatica, 2019, 110: 108610.
[20] Bliman P A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2004, 42(6): 2016-2042.
[21] Hale J K. Theory of functional differential equations[M]. New York: Springer, 1977: 272-314.
[22] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H/sup infinity/control theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(3): 356-361.
[23] Gu K Q, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston: Birkhäuser, 2003: 84-87.
[24] Fuzhen Z. The schur complement and its applications[M]. Springer Science & Business Media, 2006: 34-36.
[25] Melchor-Aguilar D. Further results on exponential stability of linear continuous time difference systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(19): 10025-10032.
[26] Melchor-Aguilar D. Exponential stability of linear continuous time difference systems with multiple delays[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(10): 811-818.

作者简介

宋云霞 (1991−), 女, 博士生, 从事时滞系统稳定性的研究, E-mail: songyx_123@163.com;

周彬 (1981−), 男, 教授, 博士生导师, 从事线性和非线性控制理论及应用等研究, E-mail: binzhou@hit.edu.cn.

(责任编辑: 魏 冰)