

控制与决策

Control and Decision

非连续混合自时延多智能体系统的饱和分布式控制

汤泽, 王佳枫, 王艳, 丰建文

引用本文:

汤泽, 王佳枫, 王艳, 丰建文. 非连续混合自时延多智能体系统的饱和分布式控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(3): 670–680.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1410>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

状态时延和全状态约束下的多智能体系统自适应事件触发控制

Adaptive event-triggered control for multi-agent systems with state time-delays and full state constraints

控制与决策. 2022, 37(4): 892–902 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1046>

多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems

控制与决策. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

符号网络下一类非线性二分一致性系统的跟踪控制

Tracking control for one class of nonlinear bipartite consensus systems under signed network

控制与决策. 2022, 37(7): 1909–1914 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1390>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

非连续混合自时延多智能体系统的饱和分布式控制

汤泽^{1†}, 王佳枫¹, 王艳¹, 丰建文²

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122; 2. 深圳大学 数学与统计学院, 广东 深圳 518061)

摘要: 研究一类非连续混合自时延多智能体系统的全局指数一致性问题. 首先, 利用具有时变控制增益的分布式负反馈控制器实现智能体之间状态信息交互. 考虑到实际系统运行环境与节省控制成本, 增设外部饱和环节将控制信号幅值限制在一个合理的范围内, 从而提出利用高斯误差函数以及微分中值定理来近似模拟饱和效应, 以此降低控制信号的不平滑度. 随后, 利用 Filippov 微分包含理论和测度选择定理将多智能体系统的非线性动力学函数映射为 Filippov 集值函数, 再通过广义 Halanay 不等式和 Lyapunov 稳定性定理给出该多智能体系统的指数一致性判定条件及其最大容许时延. 最后, 通过数值仿真验证所提出控制策略的有效性.

关键词: 非连续多智能体系统; 混合自时延; 非平滑分布式控制; 时变控制增益; 饱和策略

中图分类号: TP273

文献标志码: A



DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1410

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

引用格式: 汤泽, 王佳枫, 王艳, 等. 非连续混合自时延多智能体系统的饱和分布式控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 670-680.

Consensus of discontinuous multi-agent systems with hybrid self-delays via saturated distributed control

TANG Ze^{1†}, WANG Jia-feng¹, WANG Yan¹, FENG Jian-wen²

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen 518061, China)

Abstract: This paper investigates the globally and exponentially consensus problem for a kind of multi-agent systems with discontinuous dynamics and hybrid self-delays. Through implementing the distributed negative feedback control strategy with time-varying control gain, the communication of state information among agents is achieved. Since it is impossible for the amplitude of the control signal to reach infinite in practical applications, the saturation strategy is utilized to limit the control effect into certain reasonable ranges. In order to reduce the non-smoothness of control signal, the Gaussian error function and the differential mean value theorem are jointly taken to simulate the saturation effect. Furthermore, the Filippov differential inclusion and the measure selection theorem are utilized to deal with discontinuous differential equations. Then the exponentially consensus criteria and the admissible delay are derived by applying the generalized Halanay inequality and the Lyapunov stability theorem. Finally, the effectiveness of the proposed control strategy is verified by numerical simulation.

Keywords: discontinuous multi-agent systems; hybrid self-delay; non-smooth distributed control; time-varying control gain; saturation strategy

0 引言

近些年, 随着信息科学的飞速发展, 多智能体系统理论在众多领域得到了广泛的应用, 如无人驾驶、网络智能通信、智能电网、协同式机器人等^[1-2]. 相较于其他的多智能体系统群体性行为, 一致性问题在生产实践中普遍存在并具有广泛应用, 进而成为近年来

研究多智能体系统的热点话题, 如智能机器人一致性跟踪、无人机编队控制、网络分布式通讯等^[3-4]. 具体的, 多智能体一致性指各个智能体利用其自身本质状态信息和邻接智能体的状态信息, 完成初态更新, 并使得各个状态分量收敛至共同值^[5].

在过去的十几年中, 对于多智能体系统一致性的

收稿日期: 2021-08-11; 录用日期: 2021-11-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61803180, 61873171, 61973138); 江苏省自然科学基金项目(BK20180599); 中国博士后科学基金项目(2021T140280, 2020M681484); 江苏省博士后科学基金项目(2021K408C).

责任编辑: 关新平.

[†]通讯作者. E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn.

研究已经有了很多基础理论框架,并相应地提出了诸多有效的控制策略,例如牵制控制、脉冲控制、分布式控制、容错控制、滑模控制等^[6-10].目前,大部分研究工作通过定义转换式 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ (其中 $x_i(t)$ 表示第 i 个智能体的状态变量)将平衡点 $s(t)$ 转移到原点.这就将多智能体的一致性问题的研究转化为多智能体误差系统的稳定性问题^[11-12],这一思路也促使许多学者对不同动力学系统稳定性进行研究.例如Lu等^[13]通过设计单一脉冲控制器,研究了有向通信拓扑作用下复杂网络全局同步与指数同步问题.随后,在文献[14]中,多智能体一致性问题被充分研究,并且提出了有效的分布式自适应跟踪控制策略,同时考虑到信道拥塞,将控制器的运行方式设置为间歇运行.此外,文献[15]提出了一种基于观测器的固定时间分布式控制策略,实现了二阶多智能体系统在有限时间内的全局一致.

大量先前的关于非线性多智能体系统一致性的研究工作只考虑了动力学函数为连续的情况,由此提出的线性化非线性动力学函数相关方法,例如Lipschitz条件、NCF条件、QUAD条件等^[16-18],将不再适用于非连续情况.另一方面,为了加快多智能体系统一致收敛的速度,也有学者研究了实现指数一致性的控制策略,例如文献[19]对具有有向动态通信拓扑的非线性多智能体系统的指数一致性问题进行了详细的研究.但是对于非连续多智能体系统的指数一致性问题,还没有引起广泛的关注.众所周知,大量物理模型包含非连续函数,因此,在实际工程中非连续微分方程广泛存在,特别是在机械与电气工程领域,很多经典的工程问题都是以右端不连续微分方程进行建模分析.此外,由于通信传输能力有限以及存在信道拥塞,时延现象也是多智能体系统研究中非常值得考虑的问题之一^[20].注意到先前的研究工作譬如文献[21-23],大部分只考虑系统存在单一时延的情况,然而,由于实际系统的不确定性与工业运行环境的复杂性,研究系统存在多个自时延的情况很有必要.

事实上,基于多智能体系统各智能体之间有限的信息交互,分布式控制策略已被广泛地应用^[8,24-25].但是,这些研究工作大多都默认将控制增益设置为常量,这样在很大程度上降低了控制的灵活性,还可能使得多智能体系统实现全局一致的动态性能下降.为此,文献[26-27]设计了具有时变控制增益的分布式控制器,但对于时变参数的限制条件均较为苛刻,这无疑增加了控制难度和控制成本.因此,

研究一种限制宽泛的时变分布式控制策略将变得异常必要.再者,考虑到经济成本与执行器有限的输入阈值,必须对控制信号的幅值加以限制,为此,有部分学者提出了基于饱和策略的控制方法.文献[28]研究了存在马尔科夫跳变参数和输入饱和的随机非线性多智能体系统的领导跟随指数一致性的可解性问题.随后,文献[29]充分讨论了基于相对位置和相对速度测度的饱和策略的二阶多智能体有限时间一致性问题.然而,由饱和策略的限幅作用造成的控制信号不平滑度加剧的现象常常容易被忽略.

据作者所知,利用饱和分布式控制策略实现非连续混合自时延多智能体系统一致性的相关问题还未得到广泛关注和深入探究,因其具有重要的理论价值和实际应用潜力,研究此类问题十分必要.

基于上述讨论,本文的主要工作包括如下4个方面:

1) 相比于文献[19,22],本文考虑了一类具有非连续动力学函数和混合自时延的非线性多智能体系统模型,该系统模型同时考虑多种不确定因素对多智能体系统造成的影响,从而有效地增强模型的普适性;

2) 不同于文献[26-27]中设计的分布式控制器,本文提出一种非平滑分布式负反馈控制策略,并为该控制器设计时变控制增益,仅要求其在任一控制域内的积分平均值存在下界,从而拓宽了该控制策略的诸多限制条件,有效降低控制难度和控制成本;

3) 区别于以往提出的饱和策略^[28-29],本文有效结合高斯误差函数与微分中值定理近似模拟饱和效应,从而有效限制控制信号的幅值,同时降低其不平滑度,提高控制效率;

4) 利用Filippov微分包含与测度选择定理处理智能体的非连续动力学函数,并通过广义Halanay不等式和Lyapunov稳定性定理最终给出该多智能体系统实现全局指数一致性的判定条件及其最大容许时延.

1 准备工作

1.1 图论

为了便于进行系统分析,引入数学图论来描述智能体之间的通讯拓扑关系. $G = G(H, E, A)$ 表示有向图.其中: $H = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ 表示点集, $E \subseteq H \times H$ 表示边集.若 $(h_i, h_j) \in E$,则表示节点 h_i 可以接收到 h_j 的状态更新信息,并称 h_j 为 h_i 的邻接节点. $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ 表示邻接矩阵,当 $(h_j, h_i) \in E$ 时, $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0$.如果存在某个节点,它到其

余任一节点都存在有向通路,则称有向图 G 具有生成树,该节点为生成树的根节点.定义有向图 G 的拉普拉斯矩阵

$$P = R - A,$$

其中 $R \triangleq \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_N), r_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ 表示第 i 个节点的入度,称 R 为入度矩阵.

1.2 模型介绍

本文考虑包含 N 个智能体的非连续混合自时延多智能体系统指数一致性问题,其动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & Bx_i(t) + D_1 f_1(t, x_i(t)) + D_2 f_2(t, \check{x}_i(t - \tau_s)), \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i(t) = [x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t)]^T \in R^n$ 表示第 i 个智能体的状态向量;非线性动力学函数 $f_1(\cdot, \cdot) : R^+ \times R^n \rightarrow R^n, f_2(\cdot, \cdot) : R^+ \times R^{n \times s} \rightarrow R^n$ 为非连续向量值函数,其刻画了每个孤立智能体的本质动力学性态; $\check{x}_i(t - \tau_s) = [x_i^T(t - \tau_1), x_i^T(t - \tau_2), \dots, x_i^T(t - \tau_s)] \in R^{n \times s}$ 体现了该系统混合自时延的特性;常数矩阵 B 为状态内联矩阵,半正定矩阵 D_1, D_2 则表示时延配置矩阵用以具体配置非时延项 $f_1(t, x_i(t))$ 与时延项 $f_2(t, \check{x}_i(t - \tau_s))$,此类矩阵可将状态自时延 $x_i^j(t - \tau_s)$ 自由分配,即可任意指定各个状态分量存在自时延的拓扑分布.

由于通信带宽的限制与传输拥塞现象的存在,本文在系统建模时考虑动力学函数为非连续以及存在混合自时延的情况,这导致一般的Lipschitz条件、QUAD条件、扇形条件等^[16-18]用来处理连续非线性动力学函数的传统方法不再适用.由此,本文将提出一类广义的Lipschitz条件.

1.3 定理、引理与假设

定义1^[30] 对于非线性非连续向量值函数 $f(t, y(t))$ 的Filippov集值映射定义如下:

$$F\{f\}(t, y(t)) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{M(\varpi)=0} \text{clo}[f(B(y(t), \delta) \setminus \varpi)].$$

其中: $\text{clo}(\Theta)$ 表示集合 Θ 的闭凸包, $M(\varpi)$ 表示集合 ϖ 的勒贝格测度, $B(y(t), \delta) = \{z \in R^n : \|z - y(t)\| \leq \delta\}$.

据此,式(1)在Filippov意义下的解,在 $t \in [0, \infty)$ 区间内几乎处处满足如下微分包含:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) \in & Bx_i(t) + D_1 F\{f_1(t, x_i(t))\} + \\ & D_2 F\{f_2(t, \hat{x}_i(t - \tau_s))\}. \end{aligned}$$

定义2 如果非连续函数 $g(\cdot)$ 满足以下两个条

件,则称 $g(\cdot) \in \tilde{g}$:

1) 除了在一个可数点集 $\{\Delta_m\}(m = 1, 2, \dots)$ 外,连续可微.

2) 在可数点集 $\{\Delta_m\}$ 上,只包含有限个第一类间断点.

注1 基于定义1,如果存在非线性非连续函数 $g(\cdot) \in \tilde{g}$,则可进一步得到关系式

$$\begin{aligned} F\{g\}(y_i) = & \\ & [\min\{g^-(y_i), g^+(y_i)\}, \max\{g^-(y_i), g^+(y_i)\}], \end{aligned}$$

其中

$$F\{g\}(y) \triangleq [F\{g\}(y_1), F\{g\}(y_2), \dots, F\{g\}(y_n)]^T.$$

对于式(1),如果 $v_i(t)$ 与 $\hat{v}_i(t - \tau_s)$ 是其的解,则根据测度选择定理,存在可测函数

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) \in & F\{f_1(t, v_i(t))\}, \\ \zeta_i(t - \tau_s) \in & F\{f_2(t, \hat{v}_i(t - \tau_s))\}, \end{aligned}$$

在 $t \in [0, \infty)$ 区间内几乎处处满足下式:

$$\dot{v}_i(t) = Bv_i(t) + D_1 \gamma_i(t) + D_2 \zeta_i(t - \tau_s).$$

定义3^[31] 定义函数 $V(x)$ 的广义梯度

$$\partial V(x) = \text{co}\{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla V(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin \Psi \cup \Omega_V\}.$$

其中: $\text{co}(\cdot)$ 表示凸包, ∇ 表示梯度微分算子, $\Psi \subset R^n$ 表示零测度集,函数 $V(x)$ 的不可微点集由 Ω_V 表示.那么, $V(x)$ 关于函数 f 在点 x 处的集值Lie导数定义为 $L_f\{V(x)\} = \{b \in R | \exists h \in F\{f\}(x), h^T \zeta = b, \forall \zeta \in \partial V(x)\}$.

定义4^[5] 当系统中所有智能体的状态向量满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, N$ 时,则称多智能体系统(1)达到全局一致.不失一般性,本文选取第1个智能体作为参考节点,其动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & Bx_1(t) + D_1 f_1(t, x_1(t)) + \\ & D_2 f_2(t, \check{x}_1(t - \tau_s)). \end{aligned} \quad (2)$$

若 $x_1(t)$ 为孤立节点,则其无法接收其他智能体的状态更新信息,但可以将自身的状态信息传送给其他智能体,也就是说 $a_{1j} = 0, j = 1, 2, \dots, N$.通过定义误差向量 $e_i(t) \triangleq x_i(t) - x_1(t)$,系统达到全局一致的判定条件可等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$.

引理1^[30] 根据定义1,可以得到如下Filippov集值映射相关的重要性质:

1) 一致性: 函数 $f(x) : R^n \rightarrow R^N$ 在定义域范围内连续,则 $F\{f\}(x) = \{f(x)\}$.

2) 求和变换: $f_1(y), f_2(y) : R^n \rightarrow R^N$ 在定义域范围内是局部有界,则 $F\{f_1 + f_2\}(y) \subseteq F\{f_1\}(y) +$

$F\{f_2\}(y)$. 这同样适用于全局连续的情况.

3) 乘积变换: 若在定义域范围内非线性函数 $f_1(y) : R^n \rightarrow R^N, f_2(y) : R^n \rightarrow R^M$ 均局部有界, 则 $F\{(f_1, f_2)^T\}(y) \subseteq F\{f_1\}(y) \times F\{f_2\}(y)$. 这同样适用于全局连续的情况.

4) 矩阵变换: 若在定义域范围内非线性函数 $f(y) : R^n \rightarrow R^N, Z(x) : R^n \rightarrow R^{n \times N}$ 分别局部有界与连续, 则 $F\{Z(x)f\}(y) = Z(x)F\{f\}(y)$.

引理2^[32] 存在正常数 $\alpha > \beta > 0$, 对于任意的实数 $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 满足以下不等式:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |r_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |r_i|^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

引理3^[34] 基于图论, 若智能体 **1** 为根节点, 拉普拉斯矩阵的底层拓扑可划分如下:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{N-1}^T \\ U & \tilde{P} \end{bmatrix}.$$

其中: $U \in R^{N-1}$ 为常值列向量, $\mathbf{0}_{N-1}$ 为零列向量, $\tilde{P} \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ 为非奇异 M 矩阵^[33].

引理4^[34] 当多智能体系统存在以智能体 **1** 为根节点的生成树时, 则存在一个正定对角矩阵 $\Lambda \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ 使得 $\Lambda \tilde{P} + \tilde{P}^T \Lambda > 0$ 成立, $\Lambda = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}), \xi \triangleq (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})^T = (\tilde{P}^{-1})^T \mathbf{1}_{N-1} (\mathbf{1}_{N-1} \in R^{N-1})$. 为便于后续理论推导, 记 $\xi_{\max} = \max_{1 \leq m \leq N-1} \xi_m, \xi_{\min} = \min_{1 \leq m \leq N-1} \xi_m, \lambda_{\min}$ 表示矩阵 $\Lambda \tilde{P} + \tilde{P}^T \Lambda$ 的最小特征值.

引理5^[19] 考虑以下广义 Halanay 不等式:

$$\dot{Y}(t) \leq -\mu(t)Y(t) + \nu(t) \left[\sup_{0 < q \leq \tau} Y(t-q) \right].$$

其中: $Y(t) \geq 0$ 是正标量值函数, 函数 $\mu(t) : R^+ \rightarrow R$ 与 $\nu(t) : R^+ \rightarrow R^+$ 满足可积并且有界.

接着, 定义变量 $\pi(t) \triangleq \mu(t) - \nu(t), \hat{T}_m(t_0, T) \triangleq [t_0 + mT, t_0 + (m+1)T)$.

若对于任意的区间 $\hat{T}_m (m = 0, 1, 2, \dots), \pi(t)$ 的积分平均值 $\bar{\pi}_m \triangleq \frac{1}{T} \int_{\hat{T}_m(t_0, T)} \pi(t) dt$ 满足

$$\hat{\pi} + \nu_{\max} > \nu_{\max} e^{\tau\sigma},$$

则可以保证 $Y(t)$ 能达到指数稳定. 最大可容许时延

$$\tau = \frac{1}{\sigma} \ln \left(1 + \frac{\hat{\pi}}{\nu_{\max}} \right).$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \inf_m \bar{\pi}_m, \nu_{\max} = \sup_t |\nu(t)|, \\ \sigma &= \max_m \left(\sup_{t \in \hat{T}_m(t_0, T)} |\bar{\pi}_m - \pi(t)| \right). \end{aligned}$$

假设1 假设通信拓扑 G 包含一个有向生成树, 且智能体 **1** 为根节点.

假设2 对于非连续混合自时延多智能体系统 (1), 若非连续动力学函数满足 $f_1(\cdot) \in \tilde{g}, f_2(\cdot) \in \tilde{g}, 0 \in F\{f_1(0)\}, 0 \in F\{f_2(0)\}$. 基于定义1与测度选择定理, 对于任意的 $\alpha_1(t) \in F\{f_1(t, h_1(t))\}, \beta_1(t) \in F\{f_1(t, h_2(t))\}, \alpha_2(t - \tau_s) \in F\{f_2(t, \check{h}_1(t - \tau_s))\}, \beta_2(t - \tau_s) \in F\{f_2(t, \check{h}_2(t - \tau_s))\}$, 假设存在正值常数 m_0, m_1, m_2, l 使得下列式子成立:

$$\|\alpha_1(t) - \beta_1(t)\| \leq m_1 \|h_1(t) - h_2(t)\| + l, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &(h_1(t) - h_2(t))^T (\alpha_2(t - \tau_s) - \beta_2(t - \tau_s)) \leq \\ &m_1 \sum_{s=1}^S \|h_1(t - \tau_s) - h_2(t - \tau_s)\|^2 + \\ &m_0 \|h_1(t) - h_2(t)\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

注2 一般而言, 将非线性动力系统中非线性函数进行线性化时, 通常会假设非线性函数满足全局 Lipschitz 条件^[16]、QUAD 条件^[17] 或扇形条件^[18] 等. 然而, 当动力学函数非连续时, 这些传统的线性化手段都将不再适用. 因此, 本文引入 Filippov 集值映射理论, 将有限个间断点映射到对应集合中, 即将不连续函数转化成 Filippov 集值函数, 然后利用测度选择定理挑选出可测函数以获得非连续微分方程在 Filippov 意义下的解. 又因为选择可测函数的不唯一性, 导致出现式 (3) 中选择误差 l 的现象, 即尽管在 $h_1(t) = h_2(t)$ 时, $\alpha_1(t)$ 也不一定等于 $\beta_1(t)$. 基于式 (3) 进一步分析, 可以得到

$$0 \leq \frac{\|\alpha_1(t) - \beta_1(t)\|}{\|h_1(t) - h_2(t)\|} \leq m_1 + \frac{l}{\|h_1(t) - h_2(t)\|}.$$

这意味着 $f_1(\cdot)$ 连续可微部分的导数将被限制在一个可变上界区间 $\left[0, m_1 + \frac{l}{\|h_1(t) - h_2(t)\|} \right]$. 而对于式 (4), 由于存在乘积效应, 当 $h_1(t) = h_2(t)$ 时, 不等式可以取到等号. 特别地, 当 $\tau_s = 0$ 时, 该假设则转换成一般非线性函数处理形式.

2 一致性分析及控制器设计

为了实现非连续混合自延迟多智能体系统 (1) 的全局指数一致性, 本节将设计一种非平滑分布式负反馈控制器, 基于分布式通信拓扑, 实现各智能体之间的信息交互以及状态更新. 考虑到实际工程应用环境中控制信号的幅值不能过大, 针对控制器增设了外部饱和环节, 同时为了降低控制信号的不平滑度, 即减少开关器件的启合突变, 利用高斯误差函数以及微分中值定理近似模拟饱和效应. 最后通过广义 Halanay 不等式与 Lyapunov 稳定性定理得到多智能体系统达到指数一致性的判定条件, 及其最大可容许时延上界.

首先,基于定义4可以得到多智能体误差系统

$$\dot{e}_i(t) = Be_i(t) + D_1(f_1(t, x_i(t)) - f_1(t, x_1(t))) + D_2(f_2(t, \check{x}_i(t - \tau_s)) - f_2(t, \check{x}_1(t - \tau_s))). \quad (5)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N, s = 1, 2, \dots, S$. 通过定义误差向量 $e_i(t)$, 可以将研究多智能体系统的全局指数一致性问题, 转换成误差系统的指数稳定性问题, 便于下文直接利用 Lyapunov 稳定性定理进行系统分析.

针对误差系统(5), 设计如下具有时变控制增益的非平滑分布式负反馈控制器:

$$u_i(t) = \rho(t) \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) - k \cdot \text{sign}(e_i(t)). \quad (6)$$

其中: k 为正值常数; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数; 时变控制强度 $\rho(t) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 有界且分段连续, 其反映系统运行过程中智能体之间耦合强度的变化情况.

假设3 在任一控制域内, 控制增益 $\rho(t)$ 的积分平均值存在下界, 即

$$\bar{\rho}_m \triangleq \frac{1}{T} \int_{mT}^{(m+1)T} \rho(t) dt \geq \bar{\rho} > 0, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

考虑到系统实际的运行环境以及控制成本, 必须对控制信号加以限幅, 进而对控制器加上饱和策略

$$\text{sat}(u_i^j(t)) = \begin{cases} \bar{u}_i^j \text{sign}(u_i^j(t)), & |u_i^j(t)| > \bar{u}_i^j; \\ u_i^j(t), & |u_i^j(t)| \leq \bar{u}_i^j. \end{cases} \quad (8)$$

其中: $\bar{u}_i^j > 0$ 为预设的控制器输出阈值, $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n$.

从上述饱和策略的函数结构可以预见到, 由于存在拐点 $|u_i^j(t)| = \bar{u}_i^j$, 将导致控制信号的不平滑度加剧. 由此, 执行器输入信号发生突变的频率将会增加, 从而加剧工件的磨损, 降低了控制效果甚至导致系统不稳定. 考虑到上述情况, 本文将引入如下高斯误差函数来近似模拟饱和效应^[35], 从而降低控制信号的不平滑度:

$$g(u_i^j(t)) = \bar{u}_i^j \times \text{erf}(\Pi u_i^j(t)). \quad (9)$$

其中

$$\text{erf}(\Pi u_i^j(t)) = \int_0^{\Pi u_i^j(t)} e^{-t^2} dt,$$

$\text{erf}(\cdot)$ 表示高斯误差函数, $\Pi = \sqrt{\pi}/2\bar{u}_i^j$.

又考虑到高斯误差函数结构的复杂性, 难以直接应用至分布式控制器(6), 本文进而利用微分中值定理来简化上述饱和函数形式^[36]. 首先定义函数

$$\delta_i^j = \text{sat}(u_i^j(t)) - g(u_i^j(t)). \quad (10)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n$. 易知 δ_i^j 有界, 即 $\|\Delta_i\| \leq \bar{\Delta}_i$ ($\Delta_i = [\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n]^T$). 随后, 对函数

$g(u_i^j(t))$ 应用微分中值定理, 即存在常数 $\kappa_i^j \in (0, 1)$ 满足如下结论:

$$g(u_i^j(t)) - g(u_{i0}^j(t)) = g'(\varpi_i^j(t))(u_i^j(t) - u_{i0}^j(t)). \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \varpi_i^j(t) &= \kappa_i^j u_i^j(t) + (1 - \kappa_i^j) u_{i0}^j(t), \\ g'(\varpi_i^j(t)) &= \left. \frac{\partial g(u_i^j(t))}{\partial (u_i^j(t))} \right|_{u_i^j(t) = \varpi_i^j(t)} = \\ &= \frac{-\frac{\pi}{(4\bar{u}_i^j)^2} (\varpi_i^j(t))^2}{e^{-\frac{\pi}{(4\bar{u}_i^j)^2} (\varpi_i^j(t))^2}}. \end{aligned}$$

从高斯误差函数的表达式不难得到 $g(0) \equiv 0$. 令 $u_{i0}^j(t) = 0$, 进而将式(11)转换成下式:

$$g(u_i^j(t)) = g'(\varpi_i^j(t)) u_i^j(t). \quad (12)$$

结合式(10)与(12), 最终得到改进的饱和策略

$$\text{sat}(u_i^j(t)) = \delta_i^j + g'(\varpi_i^j(t)) u_i^j(t). \quad (13)$$

最后, 将式(13)转换为如下向量形式:

$$\text{sat}(u_i(t)) = \Delta_i + G'(\varpi_i(t)) u_i(t), \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} G'(\varpi_i(t)) &= \text{diag}(g'(\varpi_i^1(t)), g'(\varpi_i^2(t)), \\ &\dots, g'(\varpi_i^n(t))). \end{aligned}$$

注3 从表达式 $g'(\varpi_i^j(t)) = e^{-\frac{\pi}{(4\bar{u}_i^j)^2} (\varpi_i^j(t))^2}$ 中不难得到如下结论:

$$0 < \lambda_{\min}(G'(\varpi_i(t))) \leq \lambda_{\max}(G'(\varpi_i(t))) \leq 1,$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot), \lambda_{\max}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小、最大特征值. 利用高斯误差函数和微分中值定理, 将传统的饱和策略(8)转换成如(14)所示的形式. 具体而言, 通过挑选不同的 $G'(\varpi_i(t))$ 矩阵, 可以将控制信号的每个分量都以一定比例加以限幅, 其中 Δ_i 用来近似补偿真实饱和与模拟饱和之间的误差. 因此, 与传统的饱和策略相比^[28-29], 本文提出的控制方法可以有效降低控制信号的不平滑度, 同时提高控制的灵活性.

基于饱和策略(14)以及分布式控制器(6), 得到如下受控多智能体误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= Be_i(t) + D_1(f_1(t, x_i(t)) - f_1(t, x_1(t))) + \\ &D_2(f_2(t, \check{x}_i(t - \tau_s)) - f_2(t, \check{x}_1(t - \tau_s))) + \\ &\Delta_i + G'(\varpi_i(t)) \rho(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t) + \\ &kG'(\varpi_i(t)) \text{sign}(e_i(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

为了便于系统分析, 利用 Kronecker 积与引理3, 将式(15)转换成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \\ &(I_{N-1} \otimes B)e(t) + (I_{N-1} \otimes D_1)(H_1^{x_i} - H_1^{x_1}) + \\ &(I_{N-1} \otimes D_2)(H_2^{\check{x}_i(t-\tau_s)} - H_2^{\check{x}_1(t-\tau_s)}) + \end{aligned}$$

$$\Delta - \rho(t)(\tilde{P} \otimes I_n)G'(\varpi(t))e(t) - kG'(\varpi(t))\text{sign}(e(t)). \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_2^T(t), e_3^T(t), \dots, e_N^T(t)]^T, \\ H_1^{x_i} &= [f_1^T(t, x_2(t)), f_1^T(t, x_3(t)), \dots, f_1^T(t, x_N(t))]^T, \\ H_1^{x_1} &= \mathbf{1}_{N-1} \otimes f_1(t, x_1(t)), \\ H_2^{\check{x}_i(t-\tau_s)} &= [f_2^T(t, \check{x}_2(t-\tau_s)), f_2^T(t, \check{x}_3(t-\tau_s)), \dots, f_2^T(t, \check{x}_N(t-\tau_s))]^T, \\ H_2^{\check{x}_1(t-\tau_s)} &= \mathbf{1}_{N-1} \otimes f_2(t, \check{x}_1(t-\tau_s)), \\ \Delta &= \mathbf{1}_{N-1} \otimes \Delta_i, \\ G'(\varpi(t)) &= \text{diag}(g'(\varpi_2^1), \dots, g'(\varpi_2^n), g'(\varpi_3^1), \dots, g'(\varpi_3^n), \dots, g'(\varpi_N^1), \dots, g'(\varpi_N^n)). \end{aligned}$$

根据定义1与引理1,可以得到

$$\begin{aligned} F\{\dot{e}(t)\} \subseteq & (I_{N-1} \otimes B)F\{e(t)\} + \{\Delta\} + \\ & (I_{N-1} \otimes D_1)F\{(H_1^{x_i} - H_1^{x_1})\} + \\ & (I_{N-1} \otimes D_2)F\{(H_2^{\check{x}_i(t-\tau_s)} - H_2^{\check{x}_1(t-\tau_s)})\} - \\ & k \cdot G'(\varpi(t))F\{\text{SIGN}(e(t))\} - \\ & \rho(t)(\tilde{P} \otimes I_n)G'(\varpi(t))F\{e(t)\}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\text{SIGN}(e(t)) = [\text{SIGN}^T(e_2(t)), \text{SIGN}^T(e_3(t)), \dots, \text{SIGN}^T(e_N(t))]^T$ 为集值函数. $\text{SIGN}(e_i^j(t)) (i = 2, 3, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n)$ 定义为如下集合:

$$\text{SIGN}(e_i^j(t)) = \begin{cases} \{-1\}, & e_i^j(t) < 0; \\ (-1, 1), & e_i^j(t) = 0; \\ \{1\}, & e_i^j(t) > 0. \end{cases}$$

定理1 对于非连续混合自时延多智能体系统(1),若各项参数满足假设1~假设3,在非平滑分布式负反馈控制器(6)与改进饱和策略(14)的作用下,有如下条件成立:

$$\begin{cases} \frac{\xi_{\max} \tilde{\Delta}_{\max} + l \tilde{\lambda}_{D_1}^A}{\varphi} \leq k, \\ \frac{\bar{\rho} \xi_{\max}^{-1} \tilde{\lambda}_g \lambda_{\min} + 2 \tilde{\lambda}_B}{2 m_1 \tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma > 1. \end{cases} \tag{18}$$

则该非连续混合自时延多智能体系统可实现全局指数一致.此外,该多智能体系统实现一致性的最大容许时延为

$$\tilde{\tau} \triangleq \max_{1 \leq s \leq S} \tau_s = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\bar{\rho} \xi_{\max}^{-1} \tilde{\lambda}_g \lambda_{\min}}{2 m_1 \tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma \right).$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma &= \sup_{m, t \geq 0} |\rho(t) - \bar{\rho}_m| \xi_{\max}^{-1} \tilde{\lambda}_g \lambda_{\min}; \\ \gamma &= \frac{-2(m_0 \tilde{\lambda}_{D_2} + \tilde{\lambda}_B) - m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1}}{2 m_1 \tilde{\lambda}_{D_2}}, \end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}_{D_1}^A$ 、 $\tilde{\lambda}_B$ 、 $\tilde{\lambda}_{D_2}$ 、 φ 分别为矩阵 $\Lambda \otimes D_1$ 、 B 、 D_2 和 $(\Lambda \otimes I_n)G'(\varpi(t))$ 的最大特征值; $\tilde{\lambda}_g$ 为矩阵 $G'(\varpi(t))$ 的最小特征值.

证明 选取Lyapunov函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t)(\Lambda \otimes I_n)e(t). \tag{19}$$

为便于后续的推导,基于式(19)得到关系式

$$\xi_{\max}^{-1} V(t) \leq \frac{1}{2} e^T(t)e(t) \leq \xi_{\min}^{-1} V(t). \tag{20}$$

首先,根据定义3与引理1,计算 $V(t)$ 关于时间 t 的集合值Lie导数

$$\begin{aligned} L_f(V(t)) \subseteq & F\{e^T(t)(\Lambda \otimes B)e(t)\} + \\ & F\{e^T(t)(\Lambda \otimes D_1)(H_1^{x_i} - H_1^{x_1})\} + \\ & F\{e^T(t)(\Lambda \otimes D_2)(H_2^{\check{x}_i(t-\tau_s)} - H_2^{\check{x}_1(t-\tau_s)})\} - \\ & F\{ke^T(t)(\Lambda \otimes I_n)G'(\varpi(t))\text{SIGN}(e(t))\} - \\ & F\{\rho(t)e^T(t)(\Lambda \tilde{P} \otimes I_n)G'(\varpi(t))e^T(t)\} + \\ & F\{e^T(t)(\Lambda \otimes I_n)\Delta\}. \end{aligned} \tag{21}$$

根据注1,在时间 $t \in [0, \infty)$ 内必存在可测函数满足 $X_1(t) \in F\{H_1^{x_i}\}$, $Y_1(t) \in F\{H_1^{x_1}\}$, $X_2(t-\tau_s) \in F\{H_2^{\check{x}_i(t-\tau_s)}\}$, $Y_2(t-\tau_s) \in F\{H_2^{\check{x}_1(t-\tau_s)}\}$. 由此可得

$$\begin{aligned} L_f(V(t)) = & e^T(t)(\Lambda \otimes B)e(t) + e^T(t)(\Lambda \otimes I_n)\Delta + \\ & e^T(t)(\Lambda \otimes D_1)(X_1(t) - Y_1(t)) + \\ & e^T(t)(\Lambda \otimes D_2)(X_2(t-\tau_s) - Y_2(t-\tau_s)) - \\ & ke^T(t)(\Lambda \otimes I_n)G'(\varpi(t))\text{SIGN}(e(t)) - \\ & \rho(t)e^T(t)(\Lambda \tilde{P} \otimes I_n)G'(\varpi(t))e^T(t) = \\ & L_f^{(1)}(V(t)) + L_f^{(2)}(V(t)) + L_f^{(3)}(V(t)). \end{aligned} \tag{22}$$

基于假设2,可进一步得到

$$\begin{aligned} L_f^{(1)}(V(t)) = & e^T(t)(\Lambda \otimes D_2)(X_2(t-\tau_s) - Y_2(t-\tau_s)) \leq \\ & m_0 e^T(t)(\Lambda \otimes D_2)e(t) + \\ & m_1 \sum_{s=1}^S e^T(t-\tau_s)(\Lambda \otimes D_2)e(t-\tau_s) \leq \\ & 2m_0 \tilde{\lambda}_{D_2} V(t) + 2m_1 \tilde{\lambda}_{D_2} \sup_{-\tilde{\tau} \leq q < 0} (V(t+q)). \end{aligned} \tag{23}$$

随后,根据引理2、假设2以及式(20)可以得到

$$L_f^{(2)}(V(t)) =$$

$$\begin{aligned}
 & e^T(t)(\Lambda \otimes I_n)\Delta - \\
 & ke^T(t)(\Lambda \otimes I_n)G'(\varpi(t))\text{SIGN}(e(t)) + \\
 & e^T(t)(\Lambda \otimes D_1)(X_1(t) - Y_1(t)) \leq \\
 & \xi \sum_{i=2}^N \|e_i^T(t)\| \|\Delta_i\| - \varphi ke^T(t)\text{SIGN}(e(t)) + \\
 & \tilde{\lambda}_{D_1}^A \|e^T(t)\| \|X_1(t) - Y_1(t)\| \leq \\
 & \xi_{\max} \bar{\Delta}_{\max} \sum_{i=2}^N \|e_i(t)\| - \varphi k \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^n |e_i^j(t)| + \\
 & m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} e^T(t)e(t) + l \tilde{\lambda}_{D_1}^A \|e^T(t)\| \leq \\
 & (\xi_{\max} \bar{\Delta}_{\max} + l \tilde{\lambda}_{D_1}^A) \sum_{i=2}^N \|e_i(t)\| + \\
 & m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} V(t) - \varphi k \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^n |e_i^j(t)| \leq \\
 & (\xi_{\max} \bar{\Delta}_{\max} + l \tilde{\lambda}_{D_1}^A - \varphi k) \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^n |e_i^j(t)| + \\
 & m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} V(t) \leq \\
 & m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} V(t), \\
 & L_f^{(3)}(V(t)) = \\
 & e^T(t)(\Lambda \otimes B)e(t) - \\
 & \rho(t)e^T(t)(\Lambda \tilde{P} \otimes I_n)G'(\varpi(t))e^T(t) \leq \\
 & 2\tilde{\lambda}_B V(t) - \frac{1}{2} \lambda_g \rho(t) e^T(t)(\Lambda \tilde{P} \otimes \tilde{P}^T \Lambda) \leq \\
 & 2\tilde{\lambda}_B V(t) - \frac{1}{2} \lambda_g \lambda_{\min} \rho(t) e^T(t)e(t) \leq \\
 & (2\tilde{\lambda}_B - \xi_{\max}^{-1} \lambda_g \lambda_{\min} \rho(t))V(t). \tag{25}
 \end{aligned}$$

综合上述结论(22)~(25)可得

$$\begin{aligned}
 & L_f(V(t)) \leq \\
 & (2m_0 \tilde{\lambda}_{D_2} + m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} + 2\tilde{\lambda}_B - \\
 & \xi_{\max}^{-1} \lambda_g \lambda_{\min} \rho(t))V(t) + \\
 & 2m_1 \tilde{\lambda}_{D_2} \sup_{-\tau \leq q < 0} (V(t+q)) = \\
 & -\mu(t)V(t) + \nu(t) \sup_{-\tilde{\tau} \leq q < 0} (V(t+q)). \tag{26}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \mu(t) = \\
 & \xi_{\max}^{-1} \lambda_g \lambda_{\min} \rho(t) - 2m_0 \tilde{\lambda}_{D_2} - m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} - 2\tilde{\lambda}_B, \\
 & \nu(t) = 2m_1 \tilde{\lambda}_{D_2}.
 \end{aligned}$$

根据假设3,时变控制参数在任一控制域内的积分均值满足 $\bar{\rho}_m \triangleq \frac{1}{T} \int_{mT}^{(m+1)T} \rho(t)dt \geq \bar{\rho} > 0$,据引理5可得

$$\hat{\pi} = \bar{\rho} \xi_{\max}^{-1} \lambda_g \lambda_{\min} - 2m_0 \tilde{\lambda}_{D_2} -$$

$$m_1 \tilde{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1} - 2\tilde{\lambda}_B - 2m_1 \tilde{\lambda}_{D_2},$$

$$\sigma = \sup_{m,t \geq 0} |\rho(t) - \bar{\rho}_m| \xi_{\max}^{-1} \lambda_g \lambda_{\min}.$$

根据定理条件(18),易知下式成立:

$$\hat{\pi} + (1 - e^{\tilde{\tau}\sigma}) \sup_t |\nu(t)| > 0.$$

综上,多智能体误差系统(5)在非光滑分布式控制器(6)及改进的饱和策略(14)的作用下,能够达到全局指数稳定.这意味着非连续混合自时延非线性多智能体系统(1),在各项参数满足定理1所给条件时可以实现全局指数一致,且其最大可容许时延为 $\tilde{\tau}$. □

注4 区别于一般的分析连续多智能体系统指数一致性问题^[19],本文利用广义的Lipschitz条件 ($\|\alpha_1(t) - \beta_1(t)\| \leq m_1 \|h_1(t) - h_2(t)\| + l$) 将非连续的非线性动力学函数进行线性化处理.同时,为了处理非连续微分方程,利用Filippov集值映射理论将有限间断点映射到对应集合中.然后利用Filippov微分包含与测度选择定理得到其在Filippov意义下的解.最后结合广义Halanay不等式与Lyapunov稳定性定理,得到一致性判定条件与最大可容许时延.

注5 一般而言,在研究非线性动力学系统有限时间稳定与指数收敛问题时,所设计的控制器通常会包含 $-p \cdot \text{sign}(e_i(t))|e_i(t)|^q$ ($q \in [0, 1]$) 项.其中,当 $q = 1$ 时,其为典型的线性控制器,可以用来解决系统渐近稳定问题;当 $q \in (0, 1)$ 时,控制器则为连续控制,可以有效地应用于连续系统^[37-38];当考虑到系统存在非连续动力学性态时,通常取 $q = 0$,由于存在符号函数,其转变为非连续控制器.通过应用Filippov微分包含与测度选择定理,这类控制器的有效性可以得到保证^[39].本文研究非连续混合时延多智能体系统的指数一致性问题,利用广义Lipschitz条件线性化非连续性非线性动力学函数 $f(\cdot)$.由于测度选择定理所得可测函数的不唯一性,造成式(3)出现选择误差 l ,因此在设计分布式控制器(6)时,加入 $-k \cdot \text{sign}(e_i(t))$ 项进行误差补偿.控制参数 k 在满足定理条件(18)的前提下,不可过大或过小(过大会导致动态过程振荡剧烈,过小则会造成多智能体系统达到全局一致的时间增加).

注6 在控制器(6)中,求和项 $\rho(t) \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$ 体现了分布式控制思想,这意味着第 i 个控制器 $u_i(t)$ 只需节点 $x_i(t)$ 局部拓扑信息即可,也就是与其有直接通信的智能体状态信息.通常而言,对于一般的分布式控制器,控制增益通常设置为常数^[24-25],

然而,为了增加控制灵活度同时提高控制效果,本文为该分布式控制器设计了一类时变控制增益. 相较于文献[26-27],本文对于时变控制增益 $\rho(t)$ 的限制较为宽泛,只需要其在任意控制域内,积分均值 $\bar{\rho}_m$ 存在下限 $\bar{\rho}$,如假设3所述,降低控制难度的同时便于理论验证. 这类时变控制增益具有很强的普适性,可应用于不同工况. 例如控制增益信号经脉冲调制由一般的方波信号转变为其他波形(半波正弦信号、三角波信号),具体可描述为“开关模式”的间歇控制. 又如控制增益信号在控制域内受多个外部周期干扰. 针对此部分,将会在数值仿真中通过实例进一步验证.

注7 目前,现有的关于多智能体系统存在时延的研究工作,大部分只考虑了单一自时延的情形^[21-23]. 然而,考虑到实际工作环境,多智能体系统存在多个自时延的情况十分普遍. 因此,本文在多智能体系统建模时全面考虑了具有混合自时延情形 $\hat{x}_i(t - \tau_s)(s = 1, 2, \dots, S)$. 特别地,若令 $S = 1$,则可以相应地得到现有工作中的相关结论^[21-23]. 因此,本文考虑的系统模型更具有一般性.

注8 与文献[26-27]相比,本文提出的分布式控制策略对时变控制增益 $\rho(t)$ 的限制比较宽泛,其可适用于多种实际工况. 特别地,若考虑控制增益受到如下两种外部周期扰动:

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho + \varepsilon_1(t), & t \in [mT, mT + \varsigma T^\varepsilon); \\ \rho + \varepsilon_2(t), & t \in [mT + \varsigma T^\varepsilon, (m+1)T), \end{cases}$$

其中:正值常数 ρ 为初始控制增益, $\varepsilon_i(t)(i = 1, 2)$ 为周期函数(周期为 T_i^ε)用来刻画周期扰动, T^ε 为 T_i^ε 的最小公倍数. 假设 $n = \frac{T}{T^\varepsilon}$ (n 为正整数),则 $\varsigma \leq n$ (ς 的取值决定了在一个控制域内两种周期干扰各自的作用时间). 根据定理1,容易得到在此工况下,多智能体系统(1)实现指数一致的条件为

$$\begin{cases} \frac{\xi_{\max} \bar{\Delta}_{\max} + l \bar{\lambda}_{D_1}^A}{\varphi k} \leq 1; \\ \frac{(\rho + \bar{\varepsilon}) \xi_{\max}^{-1} \bar{\lambda}_g \lambda_{\min} + 2 \bar{\lambda}_B}{2 m_1 \bar{\lambda}_{D_2}} + \gamma > 1. \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \varsigma \bar{\varepsilon}_1 + (n - \varsigma) \bar{\varepsilon}_2, \\ \bar{\varepsilon}_i &= \frac{1}{T^\varepsilon} \int_t^{t+T^\varepsilon} \varepsilon_i(t) dt. \end{aligned}$$

同时得到最大容许时延

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{(\rho + \bar{\varepsilon}) \xi_{\max}^{-1} \bar{\lambda}_g \lambda_{\min}}{2 m_1 \bar{\lambda}_{D_2}} + \gamma \right).$$

该部分结论可作为定理1的另一种特殊情形,其有效性将通过仿真实例进行验证,而其证明过程也可以根

据定理1得到,在此不再赘述.

3 数值仿真

在本节中,通过选取不同类型的 $\rho(t)$ (半波正弦信号、三角波信号、周期扰动)验证上文所得一致判定条件与最大容许时延估算式的有效性.

考虑由4个智能体构成的多智能体系统,每个智能体都有3个状态分量,具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i^1(t) = -1.3x_i^1(t) + 0.21x_i^1(t - \tau_1) + 0.1\text{sign}(x_i^1(t - \tau_1)), \\ \dot{x}_i^2(t) = -1.5x_i^2(t) + 0.21x_i^2(t - \tau_2) + 0.1\text{sign}(x_i^2(t - \tau_2)), \\ \dot{x}_i^3(t) = -2.4x_i^3(t) + 0.21x_i^3(t) + 0.1x_i^3(t). \end{cases}$$

取第1个智能体 $x_1(t)$ 为参考节点,由此可以得到 $B = \text{diag}(-1.3, -1.5, -2.4)$, $D_1 = \text{diag}(0, 0, 1)$, $D_2 = \text{diag}(1, 1, 0)$. $S = 2$,动力学函数 $f(z) = 0.21z + 0.1\text{sign}(z)$ (即 $m_1 = 0.21, l = 0.2$). 取 $m_0 = 0.1$.

分布式控制矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

根据引理3可以得到

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

则 $A = \text{diag}(0.875, 0.5625, 0.125)$, $\lambda_{\min} = 1.6344$, $\xi_{\max} = 0.875, \xi_{\min} = 0.125$. 通信拓扑如图1所示.

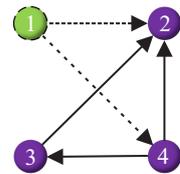


图1 通信拓扑

配置饱和策略参数,对所有控制信号都加以限幅20%, 30%, 50%, 即 $G(\varpi_i(t)) = \text{diag}(0.2, 0.3, 0.5)$, $i = 1, 2, 3, 4$. 补偿项 $\Delta_i = [0.101, 0.021, 0.093]^T$, 取 $\bar{\Delta}_{\max} = 0.1$, 负反馈增益取 $k = 0.27$.

综上所述可以得到: $\bar{\lambda}_{D_1}^A = 0.125, \bar{\lambda}_B = -1.2, \bar{\lambda}_{D_2} = 1, \varphi = 0.4375, \bar{\lambda}_g = 0.2$. 上述参数满足

$$\frac{\xi_{\max} \bar{\Delta}_{\max} + l \bar{\lambda}_{D_1}^A}{\varphi k} = 0.952 \leq 1.$$

同时得到

$$\gamma = \frac{-2(m_0 \bar{\lambda}_{D_2} + \bar{\lambda}_B) - m_1 \bar{\lambda}_{D_1}^A \xi_{\min}^{-1}}{2 m_1 \bar{\lambda}_{D_2}} = 22.83.$$

随后,通过配置不同类型的时变控制增益 $\rho(t)$, 分别验证本文所提出的一致判定条件与最大容许时延估算式的有效性.

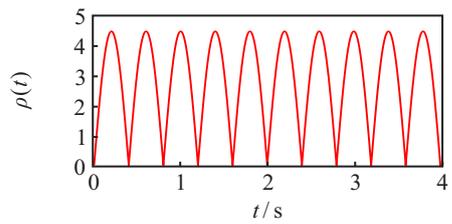
1) $\rho(t)$ 为半波正弦信号,幅值为4.5,周期为0.4, 则 $\bar{\rho}_m = 2.86$. 取 $\bar{\rho} = 2.5$, 参数满足

$$\frac{\bar{\rho}\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma = 1.2475 > 1.$$

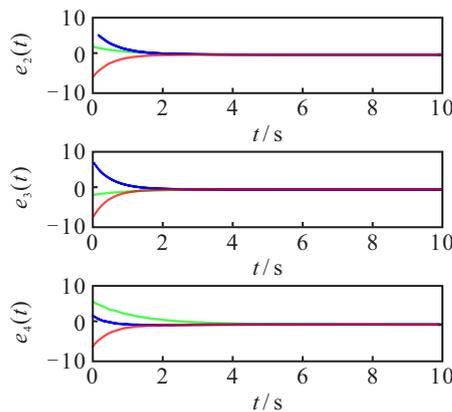
最大容许时延

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\bar{\rho}\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma \right) = 0.361.$$

令 $\tau_1 = 0.12, \tau_2 = 0.24$. 仿真结果如图2所示.



(a) $\rho(t)$ 为半波正弦信号



(b) 系统误差演化图

图2 $\rho(t)$ 为半波正弦信号时系统状态误差演化情况

2) $\rho(t)$ 为三角波信号,幅值为7.2,周期为0.3, 则 $\bar{\rho}_m = 3.6$. 取 $\bar{\rho} = 3.2$, 参数满足

$$\frac{\bar{\rho}\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma = 1.8701 > 1.$$

最大容许时延

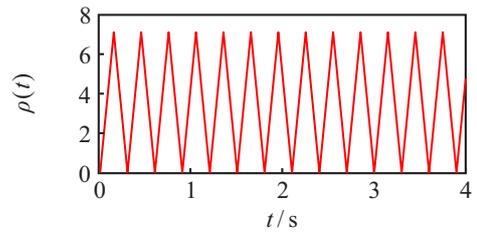
$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\bar{\rho}\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma \right) = 0.465.$$

令 $\tau_1 = 0.23, \tau_2 = 0.15$. 仿真结果如图3所示.

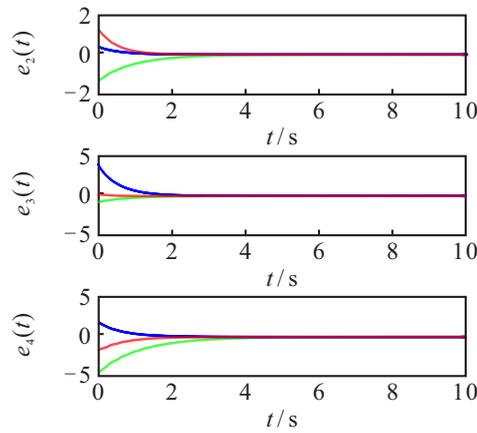
3) 为了验证注8所述,考虑 $\rho(t)$ 受到外部周期干扰, 有

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_0 + \rho_1\varepsilon(t), & t \in [mT, (m + \varsigma)T); \\ \rho_0 + \rho_2\varepsilon(t), & t \in [(m + \varsigma)T, (m + 1)T). \end{cases}$$

不失一般性,假设在整个控制域内存在持续的外部周期干扰,即 $T^\varepsilon = T$. 选取 $T = 0.2, \rho_0 = 2.8, c_1 = 0.2, c_2 = 1.2, \varsigma = 0.65$. $\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^4 \sin(30n\pi t)$.



(a) $\rho(t)$ 为三角波信号



(b) 系统误差演化图

图3 $\rho(t)$ 为三角波信号时系统状态误差演化情况

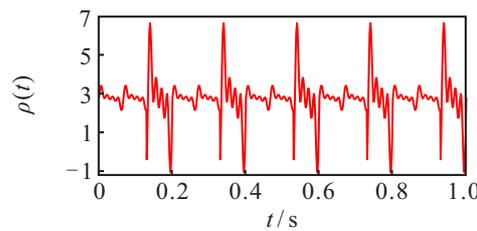
根据注8, $\rho + \bar{\varepsilon} = \rho_0 = 2.8$. 上述参数满足

$$\frac{(\rho + \bar{\varepsilon})\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma = 1.5143 > 1.$$

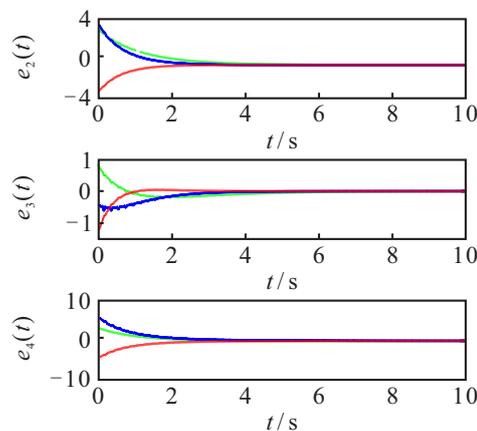
最大容许时延

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{(\rho + \bar{\varepsilon})\xi_{\max}^{-1}\lambda_g\lambda_{\min} + 2\tilde{\lambda}_B}{2m_1\tilde{\lambda}_{D_2}} + \gamma \right) = 0.692.$$

令 $\tau_1 = 0.52, \tau_2 = 0.48$. 仿真结果如图4所示.



(a) $\rho(t)$ 受外部周期干扰



(b) 系统误差演化图

图4 $\rho(t)$ 受外部周期干扰时系统状态误差演化情况

从图2(b)、图3(b)、图4(b)可以很直观地看到系统误差都随时间趋于0,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, i = 2, 3, 4$. 由于考虑 $\rho(t)$ 受外部周期干扰的情况,导致图4(b)中误差演化曲线出现短暂的小幅振荡,最终收敛至0. 综上,数值仿真结果验证了在不同工况下,本文所设计的分布式控制策略的有效性,以及所得一致性判定条件与最大容许时延估算式正确性.

4 结论

本文研究了一类具有非连续动力学性态与混合自时延的非线性多智能体系统的指数一致性问题. 首先,通过Filippov集值映射将有限个间断点映射到对应集合,然后使用Filippov微分包含与测度选择定理得到非连续微分方程在Filippov意义下的解. 随后,设计了一种非平滑分布式负反馈控制策略以实现智能体之间状态信息交互. 同时,为模拟实际工程应用环境,增设外部饱和环节对控制信号进行限幅,并利用高斯误差函数与微分中值定理模拟饱和效应以降低控制信号的不平滑度. 随后,基于广义Lipschitz条件、广义Halanay不等式与Lyapunov稳定性定理得到了指数一致性判定条件与最大容许时延. 最后,数值仿真结果充分验证了本文所得理论的有效性. 未来研究工作的重点为探究非连续混合时延多智能体系统在多重随机干扰影响下,分布式控制器的鲁棒性、控制参数 k 的自适应更新以及优化非连续动力学函数的处理方法.

参考文献(References)

- [1] Consolini L, Morbidi F, Prattichizzo D, et al. Leader-follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1343-1349.
- [2] Lee G, Chwa D. Decentralized behavior-based formation control of multiple robots considering obstacle avoidance[J]. Intelligent Service Robotics, 2018, 11(1): 127-138.
- [3] 董新民, 丁超, 陈勇, 等. 完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 870-876.
(Dong X M, Ding C, Chen Y, et al. Fully distributed finite-time tracking of heterogeneous multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 870-876.)
- [4] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [5] Hong Y G, Hu J P, Gao L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. Automatica, 2006, 42(7): 1177-1182.
- [6] Song Q, Cao J D, Yu W W. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(9): 553-562.
- [7] Tang Z, Park J H, Wang Y, et al. Distributed impulsive quasi-synchronization of Lur'e networks with proportional delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(8): 3105-3115.
- [8] Li Z K, Duan Z S, Xie L H, et al. Distributed robust control of linear multi-agent systems with parameter uncertainties[J]. International Journal of Control, 2012, 85(8): 1039-1050.
- [9] 王巍, 王丹, 彭周华. 不确定非线性多智能体系统的分布式容错协同控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1303-1308.
(Wang W, Wang D, Peng Z H. Fault-tolerant control for synchronization of uncertain nonlinear multiagent systems[J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1303-1308.)
- [10] 刘凡, 杨洪勇, 杨怡泽, 等. 带有不匹配干扰的多智能体系统有限时间积分滑模控制[J]. 自动化学报, 2019, 45(4): 749-758.
(Liu F, Yang H Y, Yang Y Z, et al. Finite-time integral sliding-mode control for multi-agent systems with mismatched disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2019, 45(4): 749-758.)
- [11] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [12] 张冬梅, 俞立. 线性时滞系统稳定性分析综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 841-849.
(Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 841-849.)
- [13] Lu J Q, Ho D W C, Cao J D, et al. Single impulsive controller for globally exponential synchronization of dynamical networks[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 581-593.
- [14] Zhang P, Xue H F, Gao S, et al. Distributed adaptive consensus tracking control for multi-agent system with communication constraints[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2021, 32(6): 1293-1306.
- [15] Tian B L, Lu H C, Zuo Z Y, et al. Fixed-time leader-follower output feedback consensus for second-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(4): 1545-1550.
- [16] Tang Z, Park J H, Feng J W. Impulsive effects on quasi-synchronization of neural networks with parameter mismatches and time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(4): 908-919.
- [17] Liu X W, Chen T P. Synchronization analysis for nonlinearly-coupled complex networks with an asymmetrical coupling matrix[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2008, 387(16/17): 4429-4439.

- [18] Chen T P, Liu X W, Lu W L. Pinning complex networks by a single controller[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54(6): 1317-1326.
- [19] Jia Q, Han Z Y, Tang W K S. Synchronization of multi-agent systems with time-varying control and delayed communications[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2019, 66(11): 4429-4438.
- [20] 伍益明, 丁佳骏, 何熊熊, 等. 通信时延下多智能体系统的安全一致性控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1039-1045.
(Wu Y M, Ding J J, He X X, et al. Secure consensus control for multi-agent systems under communication delay[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(8): 1039-1045.)
- [21] Liu X W, Chen T P. Synchronization of nonlinear coupled networks via aperiodically intermittent pinning control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(1): 113-126.
- [22] Zhang Z M, He Y, Wu M, et al. Exponential synchronization of neural networks with time-varying delays via dynamic intermittent output feedback control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(3): 612-622.
- [23] Cai S M, Zhou P P, Liu Z R. Pinning synchronization of hybrid-coupled directed delayed dynamical network via intermittent control[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2014, 24(3): 033102.
- [24] Meng W C, Yang Q M, Sarangapani J, et al. Distributed control of nonlinear multiagent systems with asymptotic consensus[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(5): 749-757.
- [25] Ren C C, Nie R, He S P. Finite-time positiveness and distributed control of Lipschitz nonlinear multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(15): 8080-8092.
- [26] Yu W W, Ren W, Zheng W X, et al. Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2107-2115.
- [27] Wang R, Dong X W, Li Q D, et al. Distributed adaptive time-varying formation for multi-agent systems with general high-order linear time-invariant dynamics[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(10): 2290-2304.
- [28] Sakthivel R, Sakthivel R, Kaviarasan B, et al. Leader-following exponential consensus of input saturated stochastic multi-agent systems with Markov jump parameters[J]. Neurocomputing, 2018, 287: 84-92.
- [29] Zhao Y, Duan Z S, Wen G H. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with saturated control protocols[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(3): 312-319.
- [30] Filippov A F. Differential equations with discontinuous righthand sides: Control systems[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
- [31] Lu W L, Chen T P. Almost periodic dynamics of a class of delayed neural networks with discontinuous activations[J]. Neural Computation, 2008, 20(4): 1065-1090.
- [32] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] Dong Z Y, Wang X, Zhang X. A nonsingular M-matrix-based global exponential stability analysis of higher-order delayed discrete-time Cohen-Grossberg neural networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 385: 125401.
- [34] Li Z K, Wen G H, Duan Z S, et al. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1152-1157.
- [35] Ma J J, Zheng Z Q, Li P. Adaptive dynamic surface control of a class of nonlinear systems with unknown direction control gains and input saturation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(4): 728-741.
- [36] Chen M, Tao G, Jiang B. Dynamic surface control using neural networks for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 26(9): 2086-2097.
- [37] Hong Y G, Wang J K, Cheng D Z. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2006, 51(5): 858-862.
- [38] Khoo S, Xie L H, Man Z H. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2009, 14(2): 219-228.
- [39] Liu X Y, Park J H, Jiang N, et al. Nonsmooth finite-time stabilization of neural networks with discontinuous activations[J]. Neural Networks, 2014, 52: 25-32.

作者简介

汤泽(1989-), 男, 副教授, 博士, 从事多智能体协同控制、复杂网络同步控制等研究, E-mail: tangze0124@jiangnan.edu.cn;

王佳枫(1997-), 男, 硕士生, 从事多智能体系统分布式控制的研究, E-mail: 6201905042@stu.jiangnan.edu.cn;

王艳(1979-), 女, 教授, 博士生导师, 从事网络化控制系统、工业互联网控制等研究, E-mail: wangyan@jiangnan.edu.cn;

丰建文(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂网络同步控制、微分动力系统研究, E-mail: fengjw@szu.edu.cn.

(责任编辑: 齐 霖)