

控制与决策

Control and Decision

新冠肺炎传播动力学建模及预测

于振华, 黄山阁, 卢思, 高红霞

引用本文:

于振华, 黄山阁, 卢思, 高红霞. 新冠肺炎传播动力学建模及预测[J]. *控制与决策*, 2023, 38(3): 699–705.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1092>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

数据驱动的突发疫情传染扩散参数动态更新策略

A dynamic design strategy of epidemic spreading parameters based on data driven

控制与决策. 2023, 38(2): 555–561 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1028>

一类具有饱和发生率的时滞恶意病毒传播模型的分岔控制策略

Bifurcation control strategy of malicious virus spreading model with time delays and saturated incidence rate

控制与决策. 2022, 37(7): 1903–1908 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1712>

基于精细积分法的无偏非齐次灰色模型构建

An unbiased non-homogeneous grey model based on high precise direct integration method

控制与决策. 2022, 37(11): 3058–3064 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0783>

基于自然梯度提升的空间物体轨道状态预测误差不确定性估计方法

Uncertainty estimation approach in orbital prediction error of space objects based on natural gradient boosting

控制与决策. 2022, 37(12): 3289–3296 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0720>

一种具有非线性动力学模型的智能电网快速分布式控制

A fast distributed control of smart grids with nonlinear dynamic model

控制与决策. 2021, 36(8): 1849–1854 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1696>

新冠肺炎传播动力学建模及预测

于振华[†], 黄山阁, 卢思, 高红霞

(西安科技大学 计算机科学与技术学院, 西安 710054)

摘要: 为了深入研究新冠肺炎传播趋势和传播风险, 根据新冠肺炎的传播特点, 考虑政府管控和个人防护等措施, 在经典传染病 SIR 模型的基础上, 引入低风险群体, 提出一种新冠肺炎传播动力学模型 SLIR, 并对模型的平衡点、稳定性和分岔等复杂动力学行为进行分析, 揭示新冠肺炎传播机理. 为了提高该模型的疫情预测精度, 以美国新冠肺炎的真实数据为基础, 使用最小二乘法对模型参数进行分段估计. 最后利用该模型对美国新冠肺炎进行预测和分析, 仿真结果表明, 相比于传统 SIR 模型, 该模型能较好地对美国疫情发展趋势做出预测, 官方公布的实际数据也可进一步验证模型的有效性. SLIR 模型可以有效仿真新冠肺炎传播, 并为政府选择合适的防控措施提供技术支持.

关键词: 新冠肺炎; 非线性动力学; 传染病模型; 参数估计; 平衡点; 分岔

中图分类号: TP399

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1092

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 于振华, 黄山阁, 卢思, 等. 新冠肺炎传播动力学建模及预测[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 699-705.

Nonlinear dynamics modeling and epidemic forecast of COVID-19

YU Zhen-hua[†], HUANG Shan-ge, LU Si, GAO Hong-xia

(College of Computer Science & Technology, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: To study the spreading trend and risk of COVID-19, according to the characteristics of COVID-19, this paper proposes a new transmission dynamic model named SLIR(susceptible-low-risk-infected-recovered), based on the classic SIR model by considering government control and personal protection measures. The equilibria, stability and bifurcation of the model are analyzed to reveal the propagation mechanism of COVID-19. In order to improve the prediction accuracy of the model, the least square method is employed to estimate the model parameters based on the real data of COVID-19 in the United States. Finally, the model is used to predict and analyze COVID-19 in the United States. The simulation results show that compared with the traditional SIR model, this model can better predict the spreading trend of COVID-19 in the United States, and the actual official data has further verified its effectiveness. The proposed model can effectively simulate the spreading of COVID-19 and help governments choose appropriate prevention and control measures.

Keywords: COVID-19; non-linear dynamics; epidemic model; parametric estimation; equilibrium; bifurcations

0 引言

新型冠状病毒肺炎(Corona Virus Disease 2019, COVID-19), 以下简称新冠肺炎, 截至 2021 年 3 月 31 日全球累计确诊病例为 128 760 892 例, 累计死亡人数为 2 814 376, 受疫情影响的国家和地区已达 200 多个, 给人类的生活和健康带来了巨大危害, 也给世界各国的经济带来了巨大损失. 在传染病领域, 为了研究其传播规律, 制定有效防控措施, 学者们通常建立数学模型对传染病进行研究和分析. 因此, 为深入研究新冠肺炎的传播规律, 预测其传播趋势, 可以通过建立新冠肺炎数学模型, 研究其传播过程, 分析感染

人数的变化规律, 探索制止疫情蔓延的手段, 这对于疫情有效防控与防治具有重要的理论和实际意义.

传染病模型发展至今, 已有许多学者提出了如 SIR(susceptible-infected-recovered)、SIRS(susceptible-infected-recovered-susceptible)、SEIR(susceptible-exposed-infected-recovered) 等经典的传染病模型^[1-3]. 目前, 针对新冠肺炎特点, 也建立了相应的模型对其进行研究. 在经典的 SIR 模型基础上, Ram 等^[4]提出了一个修正的年龄结构 SIR 模型, 通过研究发现, 人口年龄分布对疾病传播和死亡率有显著影响; Cooper 等^[5]改变了 SIR 模型中的恒定人口参数,

收稿日期: 2021-06-23; 录用日期: 2021-12-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61873277, 62006184); 陕西省重点研发计划项目(2019GY-056).

责任编辑: 王燕舞.

[†]通讯作者. E-mail: zhenhua_yu@163.com.

将其运用到美国社区新冠疫情的传播上,推断出采取强有力控制措施可以有效遏止新冠在所调查的社区中传播;Jia等^[6]在SIR模型基础上加入了修饰器 $\pi(t)$,使用蒙特卡洛方法对参数进行估计,分析了意大利的基本再生数和疫情峰值,并对疫情持续时间做出预测;Lymperopoulos^[7]将社交网络的神经元机制与SIR模型结合,构建出用于新冠的神经动力学模型,通过仿真验证了模型的有效性;Lux^[8]从社会动力学的角度运用SIR模型对欧洲新冠肺炎进行分析,并对疫情的基本再生数进行讨论,提出了防止疫情蔓延的条件;Jahanshahi等^[9]运用分阶的SIRD模型对23个国家的每日实验时间序列进行分析,提出了运用多重分式方法可以更有效地预测感染总数的结论.在对SIR模型的改进方面,可以从疫情的不同侧重面(如年龄层^[4]、特定区域^[5,8-9]等)或对模型本身^[6-7]进行改进.SIR模型的局限性在于其适用性受到限制,只能在疫情暴发阶段且有足够数据时可用,同时模型的群体划分较为简单,可能无法应对变化较为复杂的传染病类型.

SEIR模型相对于SIR模型考虑到了潜伏者群体.孙皓宸等^[10]重新定义新冠肺炎患者的传染能力,将其引入到SEIR模型中,提出针对校园的数字接触追踪防控措施;Bongolan等^[11]修正了SEIR模型种群同质性的缺陷,对新冠数据进行年龄组划分,并在模型中添加检疫(Q-SEIR)的影响,为菲律宾政府应对新冠疫情提供了一定程度的参考;Raslan^[12]利用分数阶导数的概念改进了SEIR模型,模型预测结果与实际报告数据吻合较好,通过研究预防措施对模型行为的影响,得出隔离期应足够长以达到预期效果的结论;Saikia等^[13]利用SEIR模型对印度新冠疫情进行了分析,发现一个关键日的存在,并借助logistic方程对现有数据进行建模,与SEIR模型进行比较,为印度新冠疫情控制提供了参考;López等^[14]在SEIR模型中加入了随机修正机制,论证了保持社交距离和个人非药物干预对消除封锁的必要性;李盈科等^[15]讨论了关于新冠肺炎的基本再生数、潜伏期和代间隔等几个重要流行病学参数的研究进展和估计方法,同时还对两个动力学模型进行了分析;Batabyal^[16]结合新冠病毒的季节性传播,对经典SEIR模型进行了扩展,并通过引入Tikhonov正则化,研究了模型的全局存在解;Musa等^[17]运用数学模型对尼日利亚的新冠肺炎进行了分析,并从公众意识的角度提出了对疫情防控的相关建议;Lacitignola等^[18]在SEIR模型的基础上把意识作为一个时间相关变量,采用Z-控制方法检测意识随时间呈现的趋势,进一步探讨了意识

在传染病管理中的作用;Yarsky^[19]运用SEIR模型预测新冠肺炎在美国的传播以及对医院重新开放和医院资源利用的影响,并通过遗传算法产生了具有良好一致性的模型和可用的数据;Giordano等^[20]考虑了感染的8个阶段,研究表明采取限制性的社交距离与广泛检测和追踪接触者相结合的方法能够使疫情快速结束.在对SEIR模型的改进中,可以针对模型的群体同质性^[11]、单一感染性^[10]、免疫缺失^[14]等模型缺陷进行改进,也可以将其他统计和数学方法与模型结合^[12,17-20]进行改进.此类模型对群体状态的划分更加细致,反映出更多群体状态的变化趋势,但部分模型过于复杂,难以对其动力学行为进行分析和验证,无法在动力学的基础上更好地了解疫情的动态传播过程;在对数据的获取上,部分群体的数据难以统计,缺少现实依据.此外,以上大多数模型的参数仅进行了一次拟合,采取固定取值,没有考虑疫情发展过程的动态变化,无法准确预测出疫情的整体发展状况.

针对新冠肺炎传播的规律和特点,本文在SIR模型原有的易感染者S(susceptible)、感染者I(Infected)、治愈者R(recovered)3个群体的基础上,新加入低风险群体L(low-risk),建立新的SLIR模型.与现有的新冠肺炎模型相比,本文重点对SLIR模型的平衡点、稳定性及分岔进行分析及证明,进一步揭示新冠肺炎的传播规律.SLIR模型参数应随环境、政府管控措施、居民自我防护措施等因素动态变化,在实际数据的基础上通过最小二乘法对模型参数进行分段估计,从而提高对疫情预测的准确性.最后利用该模型对美国疫情的传播趋势进行模拟仿真、预测与分析.官方公布的实际数据也可验证本文的仿真结果,说明SLIR模型可以对新冠肺炎的传播趋势起到一定的预警和预测作用.

1 SLIR模型假设和建立

1.1 模型假设

考虑到新冠肺炎疫情的特点,建立一个SLIR模型.此模型将人群分为易感染者(S)、低风险群体(L)、感染者(I)、治愈者(R)4个群体.其中:易感染者(S)指不采取任何保护措施的群体,该群体在与感染者密切接触时,会有一定概率被病毒感染;低风险群体(L)指采取保护措施(如佩戴口罩、减少外出等)的群体,该群体感染病毒的概率会大大降低;感染者(I)指已经被病毒感染的群体;治愈者(R)指感染新冠病毒后被治愈的群体.新模型提出以下假设.

1) 在模型中: $S(t)$ 、 $L(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 分别表示 t 时刻S、L、I、R四个状态群体占总人口的比例,为简化计算,令模型总人口数守恒,故对任意时刻 t 均有

$$S(t) + L(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

2) 根据新冠疫情传播规律, 易感染者和低风险群体均可能被感染者携带的病毒感染.

3) 为了反映出现实中的人口流动, 假设模型人口进入率为 μ_1 , 人口退出率为 μ_2 . 为简化计算, 保持模型总人口恒定, 令人口进入率与退出率相同, 即 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

4) 通过与感染者接触, 易感染者 S 以感染率 α 变成感染者, 低风险群体 L 以感染率 β 变成感染者, α, β 为正常数, 为不同群体感染率.

5) 在政府相关管控措施和公共卫生宣传的影响下, 居民自我保护意识增强, 易感染者 S 会以转化率 δ 转化为低风险群体 L .

6) 受医疗卫生水平影响, 感染者 I 在接受相关治疗后, 以治愈率 γ 变为治愈者 R .

基于上述假设, 模型的状态转移图如图 1 所示.

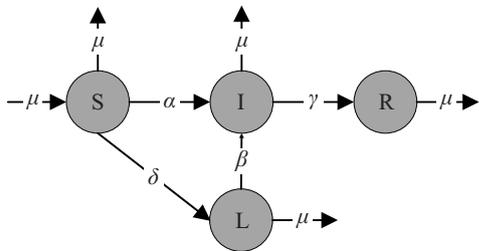


图 1 SLIR 状态转移

1.2 模型假设

根据上面的状态转移过程, 有如下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) - \delta S(t) - \mu S(t) + \mu, \\ \frac{dL(t)}{dt} = \delta S(t) - \beta L(t)I(t) - \mu L(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) + \beta L(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

由于 $S(t) + L(t) + I(t) + R(t) = 1$, 且方程组 (1) 中的前 3 个方程不含 R , 实际上只需讨论前 3 个方程即可^[21], 将其简化为如下微分动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) - \delta S(t) - \mu S(t) + \mu, \\ \frac{dL(t)}{dt} = \delta S(t) - \beta L(t)I(t) - \mu L(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) + \beta L(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t). \end{cases} \quad (2)$$

由于 S, L, I, R 四个群体的数目皆为正数, 系统 (2) 满足初始条件 $S(t) \geq 0, L(t) \geq 0, I(t) \geq 0$, 其状态空间 $\Omega = \{(S(t), L(t), I(t)) : S(t) \geq 0, L(t) \geq 0, I(t)$

$\geq 0\}$. 由于 Ω 为正不变集, 只需考虑初始条件处于 Ω 内的解, 其在 Ω 内具有存在性及唯一性.

令系统 (2) 的微分方程右端为 0, 通过计算得出系统 (2) 中的无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E_{e1}^*, E_{e2}^* .

$$E_0 = \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}, \frac{\delta}{\mu + \delta}, 0 \right), \quad (3)$$

$$E_{e1}^* = (S_1^*, L_1^*, I_1^*), \quad (4)$$

$$E_{e2}^* = (S_2^*, L_2^*, I_2^*). \quad (5)$$

其中

$$S_1^* = \frac{\alpha\beta\mu + (\gamma + \mu)[\mu(\alpha - \beta) - \beta\delta] + M}{2\alpha\mu(\alpha - \beta)}, \quad (6)$$

$$L_1^* = \frac{\alpha\beta\mu + (\gamma + \mu)[\mu(\alpha - \beta) - \beta\delta] + M}{2\beta\mu(\alpha - \beta)}, \quad (7)$$

$$I_1^* = \frac{\alpha\beta\mu - (\gamma + \mu)[\mu(\alpha + \beta) + \beta\delta] - M}{2\alpha\beta(\gamma + \mu)}, \quad (8)$$

$$S_2^* = \frac{\alpha\beta\mu + (\gamma + \mu)[\mu(\alpha - \beta) - \beta\delta] - M}{2\alpha\mu(\alpha - \beta)}, \quad (9)$$

$$L_2^* = \frac{\alpha\beta\mu + (\gamma + \mu)[\mu(\alpha - \beta) - \beta\delta] - M}{2\beta\mu(\alpha - \beta)}, \quad (10)$$

$$I_2^* = \frac{\alpha\beta\mu - (\gamma + \mu)[\mu(\alpha + \beta) + \beta\delta] + M}{2\alpha\beta(\gamma + \mu)}, \quad (11)$$

$$M = [[\alpha\mu(\gamma + \mu + \beta) - \beta(\delta + \mu)(\gamma + \mu)]^2 + 4\alpha\beta^2\delta\mu(\gamma + \mu)]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

根据系统 (2) 和再生矩阵法^[22-23], 有如下公式:

$$\begin{cases} F_I = \alpha S(t)I(t) + \beta L(t)I(t), \\ V_I = \gamma I(t) + \mu I(t). \end{cases} \quad (13)$$

$$(F \cdot V^{-1})_{E_0} = \frac{dF_I}{dI} \cdot \left(\frac{dV_I}{dI} \right)^{-1} = \frac{\alpha\mu + \beta\delta}{\mu + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma + \mu} = \frac{\alpha\mu + \beta\delta}{(\mu + \delta)(\gamma + \mu)}.$$

故

$$R_0 = \rho((F \cdot V^{-1})_{E_0}) = \frac{\alpha\mu + \beta\delta}{(\mu + \delta)(\gamma + \mu)}. \quad (15)$$

基本再生数 R_0 是刻画传染病传播规模的一个重要参量, 它表示在易感者群体中, 引入的感染者在其平均感染周期内所能感染的人数期望. $R_0 < 1$ 时, 疫情将逐渐减缓至结束.

2 SLIR 模型动力学行为分析

2.1 平衡点及其稳定性分析

定理 1 当且仅当 $R_0 < 1$ 时, 系统 (2) 在无病平衡点 E_0 处渐近稳定.

证明 系统 (2) 在无病平衡点 E_0 处的雅可比 (Jacobi) 矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\delta - \mu & 0 & -\alpha S^* \\ \delta & -\mu & -\beta L^* \\ 0 & 0 & \alpha S^* + \beta L^* - \mu - \gamma \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中: $S^* = \frac{\mu}{\delta + \mu}, L^* = \frac{\delta}{\delta + \mu}$.

通过计算可知 J_{E_0} 的特征根为 $-\mu, -\delta, -\mu, \frac{\alpha\mu + \beta\delta - (\delta + \mu)(\gamma + \mu)}{\delta + \mu}$, 根据 Lyapunov 定理, 当 J_{E_0} 的所有特征根均小于零时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处渐近稳定. 因为所有未知参数均大于零, 故 $\frac{\alpha\mu + \beta\delta - (\delta + \mu)(\gamma + \mu)}{\delta + \mu} < 0$, 即 $R_0 = \frac{\alpha\mu + \beta\delta}{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)} < 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处渐近稳定. \square

定理2 当 $R_0 > 1$ 时, 系统在地方病平衡点 E_e^* 处局部渐近稳定.

证明 由于系统(2)的地方病平衡点 E_{e1}^* 与 E_{e2}^* 在性质和数值上相似, 本文重点分析其中一个地方病平衡点 E_{e1}^* .

令 $E_e^* = E_{e1}^*$, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处的雅可比(Jacobi)矩阵为

$$J_{E_e^*} = \begin{bmatrix} -\delta - \mu - \alpha I_e^* & 0 & -\alpha S_e^* \\ \delta & -\mu - \beta I_e^* & -\beta L_e^* \\ \alpha I_e^* & \beta I_e^* & \alpha S_e^* + \beta L_e^* - \mu - \gamma \end{bmatrix}. \quad (17)$$

其中: $S_e^* = S_1^*, L_e^* = L_1^*, E_e^* = E_1^*$. 其特征方程为 $a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. (18)

其中

$$\begin{cases} a_3 = 1, \\ a_2 = (\alpha + \beta)I_e^* + \delta + 2\mu, \\ a_1 = \left[\frac{\alpha\beta\mu}{\gamma + \mu} + \alpha(\gamma + 2\mu) + \frac{3}{2}\beta\mu \right] I_e^* + \mu(\delta + \mu), \\ a_0 = \beta I_e^* (\alpha\mu - (\gamma + \mu)(2\delta + \mu)) + I_e^* (\gamma + \mu) (\alpha\mu + \beta\delta + \beta\mu) + \mu(\delta + \mu)(\gamma + \mu - \beta L_e^* - \alpha S_e^*). \end{cases} \quad (19)$$

根据 Routh-Hurwitz 判定准则, 有

$$\Delta_1 = a_2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2. \quad (20)$$

由于每个未知量均为大于零的自然数, 当 $R_0 > 1$ 时, 通过计算易得出 $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0, \Delta = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$ 恒成立, 则根据 Routh-Hurwitz 稳定性判定准则可知, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处渐近稳定. \square

2.2 分岔分析

定理3 当 $R_0 = 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处发生跨临界分岔.

证明 当 $R_0 = 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处雅可比矩阵的特征方程变为

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda = 0. \quad (21)$$

显然 $\lambda = 0$ 是此特征方程的一个特征根, 故 E_0 为非双曲平衡点.

由于 $R_0 > 1$ 时, E_0 为不稳定焦点, E_e^* 为稳定结点. 当 $R_0 < 1$ 时, E_0 变为稳定结点, E_e^* 变为不稳定焦点, 平衡点发生稳定性突变. \square

基本再生数 R_0 是影响新冠肺炎持续传播的一个重要因素. 若一个国家的基本再生数 R_0 近似于 1, 则该国采取的管制措施将尤为重要. 若政府采取消极的疫情管控措施, 会使感染率 α 升高, 则 $R_0 > 1$, 疫情将会一直持续下去; 若政府采取积极的疫情管控措施, 使感染率 α 降低, 则有 $R_0 < 1$, 疫情将最终消亡.

3 基于 SLIR 模型的疫情预测与分析

3.1 参数估计

在现有的模型中, 模型参数的取值通常是人为直接设定或根据经验给定的, 没有充分考虑疫情传播实际情况. 为了有效预测新冠肺炎的发展趋势, 本文将以现实数据为依据, 对 SLIR 模型中的参数进行估计.

SLIR 模型一共有 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ 五个未知参数. 在人口增长速率 μ 方面, 根据美国联邦人口普查局(U.S. Census Bureau)公布的 2018~2019 年的人口调查显示^[24], 美国全年人口增长率为 0.53%, 因此 μ 取固定值, 即人口日增长速率为 $\mu \approx 0.00001448$. 其余 4 个参数将根据真实感染数据进行非线性最小二乘参数估计.

采用平均相对误差(MRE)对模型的拟合和预测效果进行评估. 令 I 为感染实际值, \hat{I} 为模型感染估计值, N 为总天数, I_i 为第 i 天的感染人数, 则 MRE 的数学表达式为

$$\text{MRE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{I}_i - I_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

通过对霍普金斯大学给出的美国全国 2020 年 11 月 1 日至 2021 年 2 月 28 日新冠肺炎数据进行统计, 本文将疫情分为 2020 年 11 月、2020 年 12 月、2021 年 1 月、2021 年 2 月及以后 4 个阶段, 分别对每个阶段使用最小二乘法进行参数估计. 对于 11 月 L 群体的初值问题, 参考了纽约时报的口罩调查^[25], 通过对口罩佩戴率地图的统计, 将低风险群体 L 的初值定为 0.4505, 感染者 I 与治愈者 R 的初值均按照官方发布

表1 模型各阶段参数定义和估计值

参数	定义	取值			
		第1阶段(2020-11)	第2阶段(2020-12)	第3阶段(2021-01)	第4阶段(2021-02)
α	易感群体感染率	0.164 212 00	0.134 844 52	0.149 801 95	0.097 122 32
β	低风险群体感染率	0.010 325 80	0.047 440 93	0.049 050 24	0.010 392 82
γ	治愈率	0.064 543 63	0.071 402 80	0.084 885 76	0.055 498 83
δ	转化率	0.000 100 31	0.000 974 22	0.000 981 86	0.000 274 86
μ	人口进入和退出率	0.000 014 48	0.000 014 48	0.000 014 48	0.000 014 48

表2 模型各阶段拟合与预测误差

符号	定义	取值			
		第1阶段	第2阶段	第3阶段	第4阶段
MRE ₁	拟合相对平均误差	1.776	0.923	0.981	0.258
MRE ₂	预测相对平均误差	2.588	1.649	6.566	#

的实际数据取值. 模型各个阶段参数估计如表1所示,对疫情的拟合与预测误差如表2所示.

3.2 疫情预测

将表1中第1阶段参数代入系统(2),对2020年11月数据进行拟合仿真,并对12月的疫情进行预测,将预测曲线与12月份真实数据对比,预测效果良好,其中拟合阶段相对平均误差为1.776%,预测阶段相对平均误差为2.588%,其仿真及预测结果如图2所示.

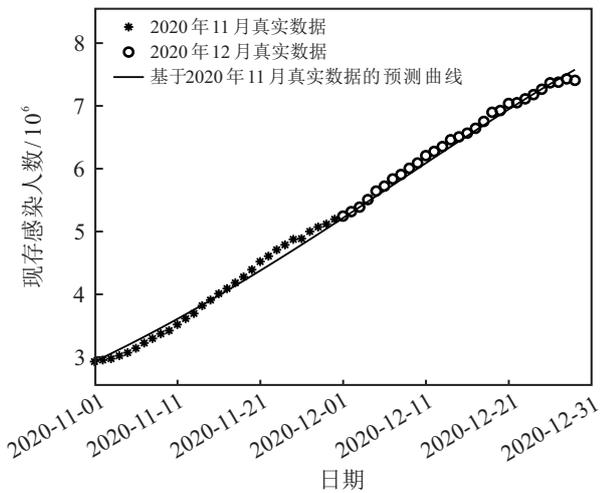


图2 2020年11月疫情数据仿真及2020年12月疫情预测

就美国2020年11月的疫情仿真结果而言,易感感染率 α 的值为0.164 212,处于一个较高的水平,这正好符合美国举行总统大选导致人口聚集以及政府重新开放国际航班^[25]的现实情况,政府采取相对宽松的疫情管控政策,导致感染人数近乎直线上升.

考虑到美国总统大选对疫情的影响以及11月下旬政府管控措施调整等因素,本文以12月份数据为基础进行第2阶段预测.将表1中第2阶段的参数代入系统(2),对2020年12月数据进行仿真,并对2021年1月的疫情进行预测,通过将预测曲线与2021年1月新冠真实数据对比可知,预测效果良好,拟合阶段

相对平均误差为0.923%,预测阶段相对平均误差为1.649%,其结果如图3所示.

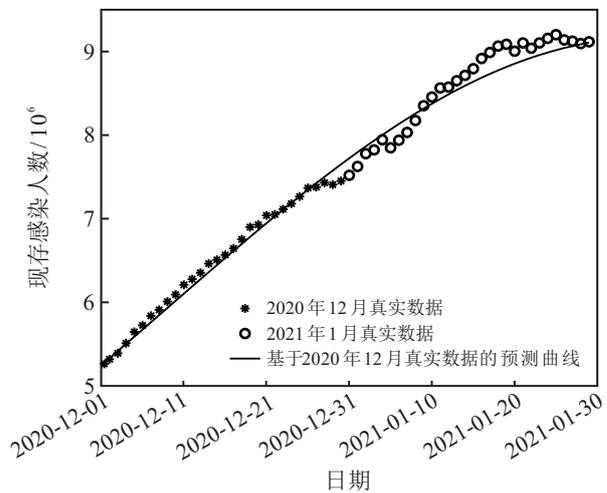


图3 2020年12月疫情数据仿真及2021年1月疫情预测

由模型拟合结果可知,美国2020年12月的易感感染率 α 取值为0.134 845,较上一月的感染率有所下降,符合美国在2020年11月下旬对于出入境政策收紧的现实情况^[26].

在对美国2021年1月的疫情拟合中,考虑到美国大选结束后政府交接^[27]的问题会导致疫情再次出现波动,故重新对1月数据进行拟合.模型拟合和预测结果如图4所示,其在拟合阶段相对平均误差为0.981%,预测阶段相对平均误差为6.566%.通过模型拟合和预测结果可知,美国2021年1月的易感染率为0.149 802,较上一月有所提升;在对拐点的预测方面,模型预测拐点出现在2月6日,峰值感染人数为9 387 410,与真实情况相比,拐点出现时间误差为一周左右,峰值人数误差为2.080%,偏差较小.由仿真结果及误差数值可以看出,该模型基于美国1月份新冠数据拟合出的预测曲线对2月份疫情进行预测时发生了一定程度上的偏差.

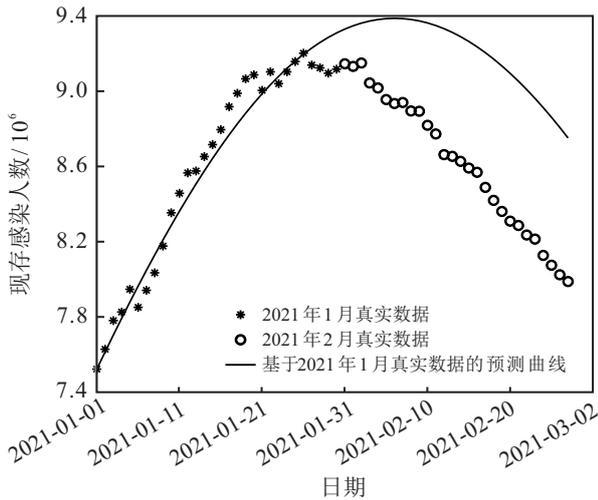


图4 2021年1月疫情数据仿真以及2021年2月疫情预测

对于上一阶段,模型预测的数据整体偏高,本文认为预测阶段的偏差是由于美国新政府完成交接后采取了一系列严格的管控措施^[27],感染率会有所下降.故在模型第4阶段中,以美国2021年2月份新冠数据为基础,重新进行最小二乘法参数估计,模型拟合平均相对误差仅为0.258%.由拟合结果可知,正如上文对美国新政策的分析,在严格的管控策略下,美国2021年2月疫情的易感感染率仅为0.097 122,较1月份有较大幅度的下降.

最后将4个阶段预测曲线集成得到美国疫情的整体预测曲线,如图5所示.

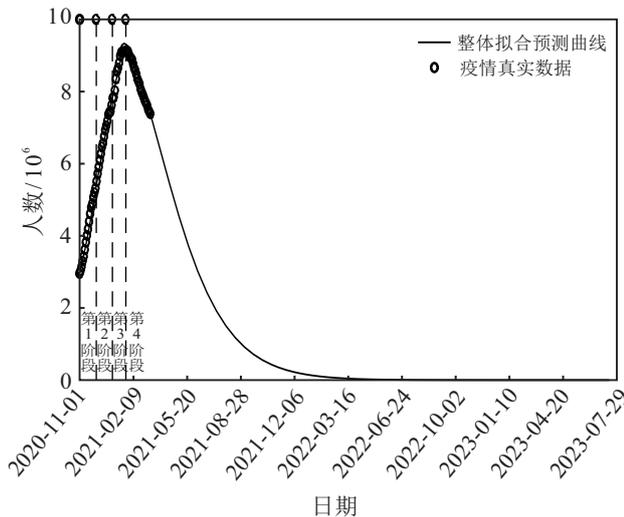


图5 整体疫情预测

由图5可以看出,SLIR模型的整体拟合情况较好,预测精度较高.通过模型得出,美国新冠肺炎的拐点出现在2月初,现存感染人数峰值达到930万人左右.在疫情后续阶段,假设政府管控措施和居民安全意识保持不变,病毒不发生变异的情况下,美国疫情还将持续较长时间,现存感染人数将于2021年9月份降低至100万人,最终疫情将持续到2022年6月份.

3.3 不同模型仿真比较

本节通过SLIR模型与经典SIR模型和SEIR模型的对比,比较3个模型对于疫情预测的差异.

对于SIR模型,有如下微分动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (23)$$

对于SEIR模型^[21-22],有如下微分动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \alpha S(t)(E(t) + I(t)) - \mu S(t), \\ \frac{dE}{dt} = \alpha S(t)(E(t) + I(t)) - \sigma E(t) - \mu E(t), \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (24)$$

其中: α 为感染率, γ 为感染者的治愈率, μ 为人口进入和退出率, σ 为潜伏暴发率.

基于2020年11月美国新冠肺炎数据分别对SIR模型和SEIR模型使用最小二乘法进行参数估计,模型参数估计值如表3所示.

表3 模型参数定义及估计值

参数	定义	SIR模型取值	SEIR模型取值
α	易感群体感染率	0.031 680 45	0.071 115 15
γ	治愈率	0.010 726 20	0.099 621 47
μ	人口进入和退出率	0.000 014 48	0.000 014 48
σ	潜伏暴发率	#	0.117 073 75

对SIR模型进行最小二乘参数估计后,将拟合出的曲线与真实数据进行对比,其拟合误差为1.614%,预测误差为10.796%,在预测阶段相较于SLIR模型有较大偏差,预测值整体高于实际值;对SEIR模型进行最小二乘参数估计后,将拟合出的曲线与真实数据进行对比,其拟合误差为4.002%,预测误差为7.430%.因此,采取SLIR模型对疫情的预测更符合实际.从仿真中也可以看出,根据实际数据对模型参数进行估计,对于提高模型预测精度是有必要的.

4 结论

本文根据新冠肺炎传播的特点和规律,建立了一种新的新冠肺炎传播模型SLIR,并对模型的平衡点、稳定性及分岔等动力学行为进行分析,揭示了新冠肺炎的传播机制.改进后的SLIR模型不仅考虑到了低风险群体,同时采用最小二乘法对模型参数进行了估计,提高了模型预测精度.最后将该模型用于美国新

新冠肺炎传播趋势预测中. 仿真结果表明, 与美国新冠肺炎真实数据相比, SLIR模型拟合和预测效果良好, 优于传统SIR模型, 进一步验证了该模型的有效性.

参考文献(References)

- [1] Arazi R, Feigl A. Discontinuous transitions of social distancing in the SIR model[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2021, 566: 125632.
- [2] Kiouach D, Sabbar Y. Global dynamics analysis of a stochastic SIRS epidemic model with vertical transmission and different periods of immunity[J]. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 2020, 10(5): 468-491.
- [3] Alrabaiah H, Arfan M, Shah K, et al. A comparative study of spreading of novel corona virus disease by using fractional order modified SEIR model[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2021, 60(1): 573-585.
- [4] Ram V, Schaposnik L P. A modified age-structured SIR model for COVID-19 type viruses[J]. *Scientific Reports*, 2021, 11(1): 15194.
- [5] Cooper I, Mondal A, Antonopoulos C G. A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 139: 110057-110076.
- [6] Jia W P, Han K, Song Y, et al. Extended SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China[J]. *Frontiers in Medicine*, 2020, 7: 169-186.
- [7] Lymeropoulos I N. #stayhome to contain Covid-19: Neuro-SIR-Neurodynamical epidemic modeling of infection patterns in social networks[J]. *Expert Systems With Applications*, 2021, 165: 113970.
- [8] Lux T. The social dynamics of COVID-19[J]. *Physica A*, 2021, 567: 125710.
- [9] Jahanshahi H, Munoz-Pacheco J M, Bekiros S, et al. A fractional-order SIRD model with time-dependent memory indexes for encompassing the multi-fractional characteristics of the COVID-19[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 143: 110632.
- [10] Sun H C, Liu X F, Xu X K, et al. Analysis of COVID-19 spreading and prevention strategy in schools based on continuous infection model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, 69(24): 74-83.
- [11] Bongolan V, Minoza J, de Castro R. Age-stratified infection probabilities combined with a quarantine-modified model for COVID-19 needs assessments: Model development study[J]. *Journal of Medical Internet Research*, 2021, 23(5): e19544.
- [12] Raslan W E. Fractional mathematical modeling for epidemic prediction of COVID-19 in Egypt[J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2021, 12(3): 3057-3062.
- [13] Saikia D, Bora K, Bora M P. COVID-19 outbreak in India: An SEIR model-based analysis[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(4): 4727-4751.
- [14] López L, Rodó X. The end of social confinement and COVID-19 re-emergence risk[J]. *Nature Human Behaviour*, 2020, 4(7): 746-755.
- [15] Li Y K, Zhao S, Lou Y J, et al. Epidemiological parameters and models of coronavirus disease 2019[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, 69(9): 21-30.
- [16] Batabyal S. COVID-19: Perturbation dynamics resulting chaos to stable with seasonality transmission[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 145: 110772.
- [17] Musa S S, Qureshi S, Zhao S, et al. Mathematical modeling of COVID-19 epidemic with effect of awareness programs[J]. *Infectious Disease Modelling*, 2021, 6: 448-460.
- [18] Lacitignola D, Diele F. Using awareness to Z-control a SEIR model with overexposure: Insights on Covid-19 pandemic[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 150: 111063.
- [19] Yarsky P. Using a genetic algorithm to fit parameters of a COVID-19 SEIR model for US states[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 185: 687-695.
- [20] Giordano G, Blanchini F, Bruno R, et al. Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy[J]. *Nature Medicine*, 2020, 26(6): 855-860.
- [21] Ma Z E, Zhou Y C, Wang W D, et al. Mathematical modeling and research of infectious disease dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2004: 116-126.
- [22] Yu S Z, Yu Z Y, Jiang H J, et al. The spread and control of rumors in a multilingual environment[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(3): 2933-2951.
- [23] Cui Y M, Chen S S, Fu X C. The thresholds of some epidemic models[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2017, 14(4): 14-31.
- [24] May A M. U.S. census bureau: In 2019, the natural growth population of the United States was less than one million for the first time, and the growth rate hit a new low in a century[EB/OL]. (2020-01-10)[2021-03-14]. https://www.sohu.com/a/366053295_99925353.
- [25] Katz J, Margot S K, Quealy K. A detailed map of who is wearing masks in the U.S.[ED/OL]. (2020-7-11)[2021-03-14]. <https://www.nytimes.com/interactive/2020/07/17/upshot/coronavirus-face-mask-map.html?archResultPosition=6>.
- [26] Wailian Group. Summary of the new entry policies of various countries in November[ED/OL]. (2020-11-28)[2021-03-14]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/311693485>.
- [27] The Paper. Biden's "full moon" of inauguration: Urgency and caution in policy "reset"[ED/OL]. (2021-2-21)[2021-03-14]. http://k.sina.com.cn/article_5044281310_12ca99fde02001i7pq.html.

作者简介

于振华(1977—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息物理融合系统及复杂系统非线性动力学理论及应用、大数据建模与分析、智能软件工程等研究, Email: zhenhua_yu@163.com;

黄山阁(1995—), 男, 硕士生, 从事复杂系统非线性动力学理论及应用的研究, Email: 870325590@qq.com;

卢思(1997—), 女, 硕士生, 从事复杂系统非线性动力学理论及应用的研究, Email: 19208208044@xust.edu.cn;

高红霞(1995—), 女, 硕士生, 从事复杂系统非线性动力学理论及应用的研究, Email: 793974272@qq.com.