控制与决策
Control and Decision

基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法

冯锋, 万喆, 徐泽水, 柳晓燕

基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法

冯 锋[1†], 万 喆[1], 徐泽水[2], 柳晓燕[1]

(1. 西安邮电大学 理学院，西安 710121；2. 四川大学 商学院，成都 610064)

摘 要: 三支决策理论采取“三分而治”的处理思路,为复杂问题求解提供了一种简洁高效的解决方案. 对此,借助软集理论研究犹豫模糊集和三支决策方法,通过定义犹豫模糊集的值空间和值陪集,引入犹豫模糊集的典范软集、单位区间参数化软集和导出犹豫模糊集等概念,解决犹豫模糊集和软集的相互表示问题. 此外,利用软粗糙集理论建立一种基于犹豫模糊集的广义粗糙模型,借助给定的预决策集,计算软上近似集并确定评价函数,进而提出一种基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法. 最后,通过两个数值实例和相关对比分析,验证所提出三支决策方法的合理性和有效性.

关键词: 犹豫模糊集；三支决策；软集；粗糙集；典范软集

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1662 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 冯锋,万喆,徐泽水,等. 基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 834-842.

Hesitant fuzzy three-way decision method based on soft rough sets

FENG Feng[1†], *WAN Zhe*[1], *XU Ze-shui*[2], *LIU Xiao-yan*[1]

(1. School of Science，Xi’an University of Posts and Telecommunications，Xi’an 710121，China；2. Business School，Sichuan University，Chengdu 610064，China)

Abstract: Three-way decision is a philosophy of thinking in three. It provides a simple and efficient solution for addressing complicated problems. In this paper, hesitant fuzzy sets and three-way decision methods are investigated by virtue of soft set theory. Value spaces and value cosets of hesitant fuzzy sets are defined. The notions of canonical soft sets, unit interval parameterized soft sets and derived hesitant fuzzy sets are presented to solve the mutual representation problems regarding hesitant fuzzy sets and soft sets. In addition, a generalized rough model based on hesitant fuzzy sets is established with the help of soft rough sets. Based on the given pre-decision set, soft upper approximations are calculated to determine the evaluation function. A novel hesitant fuzzy three-way decision method based on soft rough sets is proposed. Finally, two numerical examples with related comparative analysis are given to verify the effectiveness and cogency of the proposed method.

Keywords: hesitant fuzzy set；three-way decision；soft set；rough set；canonical soft set

0 引 言

在数字经济快速发展的背景下,各行各业的决策活动在频度、广度和复杂性上较以往发生了极大变化,决策过程中的不确定性因素不断增多,决策分析的难度也不断加大,这使得经典决策理论与方法在很多情况下不再适用. 1965 年,由美国控制论专家 Zadeh[1] 提出的模糊集利用隶属函数反映元素对集合从属关系的不确定性,为处理不确定决策问题提供了有力的数学工具. 但实际应用中,在确定元素对模糊集的隶属度时,人们经常会在多个可能取值中犹豫不决. 为此,西班牙学者 Torra[2] 提出了犹豫模糊集,推广了 Zadeh 的模糊集. 犹豫模糊集的隶属函数是一个集值映射,能够反映隶属度的所有可能取值,降低了决策过程中的信息损失. 换言之,借助犹豫模糊集及其拓展结构,人们能更加全面地刻画和处理决策过程中的不确定性,使相关问题获得更好的解决. 近年来,犹豫模糊集理论及其在不确定决策等领域的应用受到广泛关注,已取得了丰富的研究成果. Chen 等[3] 考虑了犹豫模糊集的相关系数及其在聚类分析中的应用. Xu 等[4] 率先关注并研究了犹豫模糊集的几种距离和相似性测度. 朱丽等[5] 利用粗糙集理论研究了犹豫模糊环境下的多属性决策问题. Liang 等[6] 结合犹豫模糊集进行决策粗糙集的拓展研究,提出了一种新的犹豫模糊决策粗糙集模型及风险决策方

收稿日期: 2021-09-24；**录用日期:** 2022-01-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71771155)；陕西省自然科学基础研究计划项目 (2018JM1054).

†通讯作者. E-mail: fengnix@hotmail.com.

法. 曾文艺等[7]考虑犹豫模糊集中隶属度的权重信息,定义了加权犹豫模糊集并应用于群决策问题. 廖虎昌等[8]概括阐述了基于犹豫模糊语言集的决策理论与方法. 徐泽水等[9]对概率犹豫模糊决策方面的研究进展进行了全面总结.

1982年,波兰数学家Pawlak[10]提出了粗糙集理论,为分析和处理不可辨识性导致的粒度化不确定性提供了有效的数学工具. 精确描述决策系统中的不一致性,并从不一致数据中提取决策规则是粗糙集理论的核心任务[11]. 为了在近似空间中描述一个模糊概念,法国学者Dubois等[12]推广了Pawlak的经典粗糙集模型,提出了粗糙模糊集和模糊粗糙集的概念,并指出粗糙模糊集是模糊粗糙集的特殊情形. 为了建立一个更加广义的理论框架来处理和描述不确定性问题,俄罗斯学者Molodtsov[13]从参数化的角度提出了软集这一重要概念. 软集作为一种新的工具,是模糊集、粗糙集、犹豫模糊集等软计算理论的有益补充. 在软集理论方面,Maji等[14]提出了软集的几种基本运算. 进而,Ali等[15]给出了软集的一些新运算,改进并发展了Maji等定义的运算. 2010年,Feng等[16]给出了粗糙软集的定义并讨论了其基本性质,而且结合程度化思想探索了模糊集基于软集的粗糙近似问题. 随后,Feng等[17]将软集理论引入粗糙集研究领域,利用软集内蕴的论域粒化结构给出了软近似空间的概念,定义了软粗糙近似算子和软粗糙集等概念,揭示了软集、信息系统和粗糙集之间紧密的联系. 基于软粗糙集理论,付清等[18]提出了一种解决多属性决策问题的有效方法.

三支决策理论是加拿大学者Yao[19]在研究概率粗糙集和决策粗糙集时提出的一种广义不确定性决策框架,该理论为粗糙集的正域、负域和边界域赋予了合理的语义解释,分别对应于实际决策过程中的接受、拒绝和延迟决策行为. 三支决策理论将研究对象分为3个部分,并分别采取不同的处理方法,为复杂问题求解提供了一种简洁高效的解决方案,已在诸多领域获得了成功应用[20]. 该理论自提出以来,国内外有关三支决策的研究发展迅速[21]. 三支决策理论的核心思想是"三分思维",这种思维方式具有一定的普适性,使得三支决策方法可广泛应用于各个领域. 薛占熬等[22]结合直觉模糊集和三支决策理论,提出了基于直觉模糊集的三支决策两描述模型、三描述模型和一般模型. Liu等[23]将三支决策理论引入模糊多属性决策研究,提出了基于直觉模糊数的三支多属性决策模型. Li等[24]建立了双论域上三支决策的一般模型框架. Yang等[25]首次给出了软集的两种语义解释,并利用软集的核与支持建立了一种三支决策模型. Yao[26]综合分析了基于粗糙集、区间集、模糊集、阴影集、粗糙模糊集、区间模糊集和软集的三支决策方法,在TAO (trisecting-acting-outcome)模型框架下研究了基于非经典集合论的三支决策方法. 在三支决策理论及应用中,阈值的选取十分关键,一些学者在三支决策的最优阈值确定方面进行了探索. Jia等[27]通过分析三支决策基本模型中的损失风险与阈值参数之间的关系建立优化模型,提出了一种自适应阈值参数求解算法. Chen等[28]基于三支决策的损失函数,以决策风险最小化为目标,提出了一种最优阈值生成算法. 此外,李小南等[29]提出了基于加权信息熵的阈值求解方法,克服了基于贝叶斯最小风险原理的阈值确定方法可解释性不强的问题.

综上所述,国内外关于犹豫模糊集及相关决策方法的研究已取得了十分丰富的成果,学者们在软集及其拓展结构方面也做出了许多重要的工作. 但是,已有研究中关于软集与犹豫模糊集之间关系的探讨十分少见,软集与三支决策理论的融合研究也鲜有报道. 为此,本文从探索软集与犹豫模糊集的内在关系出发,通过引入典范软集、单位区间参数化软集和导出犹豫模糊集等概念,探索犹豫模糊集与软集之间的相互表示问题,进而提出一种基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法.

1 预备知识

下文中,若无特殊说明,论域均表示为U,单位区间均表示为I. 此外,引入下列记号:

$P(I)$表示I的幂集;

$P^*(I)$表示I的所有非空子集构成的类;

$F^*(I)$表示I的所有非空有限子集构成的类;

$F_n(I)$表示I的所有有限子集E构成的类,其中E的基数满足$|E| = n \geqslant 1$.

1.1 模糊集与犹豫模糊集

定义1[1] 映射$\mu : U \to [0,1]$称为论域中的一个模糊集.

通常将确定模糊集的映射μ称为隶属函数. 对于任意的$u \in \mu$,称$\mu(u)$为u关于μ的隶属度,它给出了u属于μ的程度. I^U表示论域U上全体模糊集构成的类.

定义2[2] 设$\mu, \nu \in I^U$且$x \in U$,则模糊集μ和ν的交、并和补运算分别定义如下:

1) $(\mu \bigcap \nu)(x) = \mu(x) \bigwedge \nu(x)$;

2) $(\mu\bigcup\nu)(x)=\mu(x)\bigvee\nu(x)$;

3) $\mu^c(x)=1-\mu(x)$.

若$\forall x\in U,\mu(x)\leqslant\nu(x)$,则称$\mu$包含于$\nu$,记为$\mu\subseteq\nu$. 当$\mu\subseteq\nu$且$v\subseteq\mu$时,易见$\mu=\nu$成立.

定义3 [2] 映射$h:U\rightarrow P(I)$称为论域U上的一个犹豫模糊集.

犹豫模糊集也可表示为$h=\{(x,h(x)):x\in U\}$. 为便于叙述,将$h(x)$称为犹豫模糊数[30],用$\mathrm{HF}(U)$表示U上全体犹豫模糊集构成的类. 若$\forall x\in U,h(x)\in F^*(I)$,则称$h$是$U$上的典型犹豫模糊集[31]. 论域$U$上全体典型犹豫模糊集构成的类记为$\mathrm{THF}(U)$.

下面将I的非空有限子集称为典型犹豫模糊数,即所有典型犹豫模糊数构成了类$F^*(I)$. 通常将典型犹豫模糊数中所有隶属度取值按照升序排列,即对于任意典型犹豫模糊数$E=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subseteq I$,有$a_1<a_2<\ldots<a_n$且$1\leqslant|E|=n\leqslant\infty$.

定义4 [32] 设$h\in\mathrm{THF}(U)$,若有正整数n,使$\forall x\in U,|h(x)|=n$,则称h为n-典型犹豫模糊集.

定义5 [30] 设$E=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\in F^*(I)$,称$s(E)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$为得分函数.

1.2 软 集

设E_U为与U中对象相关的所有参数形成的集合,通常称E_U为参数空间并简记为E. 二元组(U,E)被称为软论域,通常取对象的特征或属性等作为软集的参数.

定义6 [13] 二元组$S=(F,A)$称为论域U上的一个软集,$A\subseteq E$称为S的参数集,S的近似函数为$F:A\rightarrow P(U)$.

定义7 [16] 设$S=(F,A)$为论域U上的软集,若$\forall a\in A,F(a)\neq\varnothing$,则称软集$S$是串行的.

定义8 [16] 设$S=(F,A)$为论域U上的软集,若$\bigcup\limits_{a\in A}F(a)=U$,则称$S$为满软集.

定义9 [33] 设$S=(F,A)$为论域U上的软集,且$x\in U$,则$\mathrm{Co}_S(x)=\{a\in A:x\in F(a)\}$称为$x$在$S$中的参数陪集.

1.3 粗糙集与软粗糙集

设R为U上的一个等价关系,称(U,R)为Pawlak近似空间[10]. 对于U中任意两个元素x_1和x_2,若满足$(x_1,x_2)\in R$,则称x_1和x_2为R-不可区分的. 论域U关于R的商集记为U/R,$[x_1]_R$表示x_1的等价类.

定义10 [10] 设R为U上的一个等价关系,(U,R)为Pawlak近似空间. 对于U的任意子集Z,其上近似集和下近似集可分别定义为

$$\overline{R}(Z)=\{x\in U:[x]_R\bigcap Z\neq\varnothing\},$$

$$\underline{R}(Z)=\{x\in U:[x]_R\subseteq Z\}.$$

若$\underline{R}(Z)=\overline{R}(Z)$,则称$Z$为可定义集;反之,称$Z$为粗糙集. 此外,

$$\mathrm{POS}(Z)=\underline{R}(Z)=\{x\in U:[x]_R\subseteq Z\},$$

$$\mathrm{NEG}(Z)=U-\overline{R}(Z)=\{x\in U:[x]_R\bigcap Z=\varnothing\},$$

$$\mathrm{BND}(Z)=\overline{R}(Z)-\underline{R}(Z)=\{x\in U:[x]_R\not\subseteq Z,\ [x]_R\bigcap Z\neq\varnothing\}$$

分别称为正域、负域和边界域.

基于软集理论,Feng等[17]推广了Pawlak粗糙集,提出了软粗糙集等概念. 一个软近似空间由二元组(U,S)表示,其中S为论域U上的软集. 下面给出软粗糙集的定义.

定义11 [17] 设$S=(F,A)$为论域U上的软集,$P=(U,S)$为软近似空间. 对于任意$Z\subseteq U$,其软上近似集和下近似集分别定义为

$$\overline{P}(Z)=\{x\in U:\exists a\in A\ (x\in F(a),F(a)\bigcap Z\neq\varnothing)\},$$

$$\underline{P}(Z)=\{x\in U:\exists a\in A,x\in F(a)\subseteq Z\}.$$

若$\underline{P}(Z)=\overline{P}(Z)$,则称$Z$为软可定义集;否则,称其为软粗糙集. 将正域、边界域和负域分别定义为

$$\mathrm{POS}(Z)=\underline{P}(Z),$$

$$\mathrm{BND}(Z)=\overline{P}(Z)-\underline{P}(Z),$$

$$\mathrm{NEG}(Z)=U-\overline{P}(Z).$$

2 犹豫模糊集的软集表示

定义12 设$h\in\mathrm{HF}(U)$,则$V_h=\bigcup\limits_{u\in U}h(u)$称为犹豫模糊集$h$的值空间.

犹豫模糊集的值空间是一个集合,它包含论域U中所有元素的所有可能的隶属度取值.

定义13 设$h\in\mathrm{HF}(U)$,V_h是h的值空间,则对于任意$\alpha\in V_h$,称$h^{-1}(\alpha)=\{u\in U:\alpha\in h(u)\}$为$\alpha$的值陪集.

定义14 设(U,I)为软论域,且$A\subseteq I$,则称二元组$\tilde{S}=(\hat{F},A)$为U上的单位区间参数化软集.

定义15 设$\tilde{S}=(\hat{F},A)$为U上的单位区间参数化软集,若U上的犹豫模糊集$h_{\tilde{S}}$满足

$$h_{\tilde{S}}(v)=\mathrm{Co}_{\tilde{S}}(v)=\{\alpha\in A:v\in\hat{F}(\alpha)\},$$

则称$h_{\tilde{S}}$为$\tilde{S}$的导出犹豫模糊集.

定义16 设$h\in\mathrm{HF}(U)$,若U上的软集$G_h=(\hat{C}_h,V_h)$满足$V_h=\bigcup\limits_{u\in U}h(u)$且$\forall\alpha\in V_h,\hat{C}_h(\alpha)=h^{-1}(\alpha)$,则称$G_h$为$h$的典范软集.

定理1　设 $\tilde{S} = (\hat{F}, A)$ 为 U 上的单位区间参数化软集, $h_{\tilde{S}}$ 为 $\tilde{S}$ 的导出犹豫模糊集, $G_{h_{\tilde{S}}}$ 是 $h_{\tilde{S}}$ 的典范软集. 若 $\tilde{S}$ 是串行的, 则 $G_{h_{\tilde{S}}} = \tilde{S}$.

证明　假设 U 上的单位区间参数化软集 $\tilde{S} = (\hat{F}, A)$ 是串行的, $h_{\tilde{S}} \in \mathrm{HF}(U)$ 是 $\tilde{S}$ 的导出犹豫模糊集. 由定义15可知, 对于任意的 $v \in U$, 有 $h_{\tilde{S}}(v) = \mathrm{Co}_{\tilde{S}}(v)$. 根据定义16, $h_{\tilde{S}}$ 的典范软集 $G_{h_{\tilde{S}}} = (\hat{C}_{h_{\tilde{S}}}, V_{h_{\tilde{S}}})$ 是 U 上的单位区间参数化软集, 且对于任意的 $\alpha \in V_{h_{\tilde{S}}}$, 有 $\hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha) = h_{\tilde{S}}^{-1}(\alpha)$.

1) 先证 $V_{h_{\tilde{S}}} = A$. 由值空间的定义, 可得 $V_{h_{\tilde{S}}} = \bigcup\limits_{v \in U} h_{\tilde{S}}(v)$, 则对于任意的 $\alpha \in V_{h_{\tilde{S}}}$, 存在 $v_0 \in U$, 使得 $\alpha \in h_{\tilde{S}}(v_0)$. 于是 $\alpha \in \mathrm{Co}_{\tilde{S}}(v_0)$, 即 $\alpha \in A$ 且 $v_0 \in \hat{F}(\alpha)$. 因此 $V_{h_{\tilde{S}}} \subseteq A$. 此外, 任取 $\alpha \in A$, 根据定义7可得 $\hat{F}(\alpha) \neq \varnothing$, 则有 $v_0 \in U$, 使得 $v_0 \in \hat{F}(\alpha)$. 再由定义8和定义15, 可得 $\alpha \in \mathrm{Co}_{\tilde{S}}(v_0)$ 且 $\alpha \in h_{\tilde{S}}(v_0)$, 于是 $\alpha \in V_{h_{\tilde{S}}}$. 因此 $A \subseteq V_{h_{\tilde{S}}}$. 综上所述, $V_{h_{\tilde{S}}} = A$.

2) 接下来证明, 对于任意的 $\alpha \in A$, 均有 $\hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha) = \hat{F}(\alpha)$. 任取 $\alpha \in A$, 假设 $v_0 \in \hat{F}(\alpha)$, 则由定义15可得 $\alpha \in h_{\tilde{S}}(v_0)$. 于是, 根据值陪集定义可得 $v_0 \in h_{\tilde{S}}^{-1}(\alpha)$, 即 $v_0 \in \hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(a)$, 因此 $\hat{F}(\alpha) \subseteq \hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha)$. 此外, 任取 $\alpha \in A$, 假设 $v_0 \in \hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha)$, 则 $v_0 \in h_{\tilde{S}}^{-1}(\alpha)$. 于是, 由定义13可得 $\alpha \in h_{\tilde{S}}(v_0)$, 即 $\alpha \in \mathrm{Co}_{\tilde{S}}(v_0)$. 由定义8可得 $v_0 \in \hat{F}(a)$, 于是 $\hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha) \subseteq \hat{F}(\alpha)$. 因此, 对于任意的 $\alpha \in A$, 均有 $\hat{C}_{h_{\tilde{S}}}(\alpha) = \hat{F}(\alpha)$.

综上所述, 可得 $G_{h_{\tilde{S}}} = \tilde{S}$ 成立. □

定理2　设 $h \in \mathrm{HF}(U)$, G_h 是 h 的典范软集, h_{G_h} 是 G_h 的导出犹豫模糊集, 则 $h_{G_h} = h$.

证明　设 $h: U \to P(I)$ 为 U 上的犹豫模糊集, $G_h = (\hat{C}_h, V_h)$ 为 h 的典范软集. 根据定义6可得, 对于任意的 $\alpha \in V_h$, 均有 $\hat{C}_h(\alpha) = h^{-1}(\alpha)$. 再由 h_{G_h} 是 G_h 的导出犹豫模糊集可知 $h_{\tilde{S}_h}(v) = \mathrm{Co}_{\tilde{S}_h}(v) = \{\alpha \in A : v \in \hat{F}(\alpha)\}$. 任取 $v_0 \in U$, 假设 $\alpha \in h(v_0)$, 则由定义12和定义13可得 $\alpha \in V_h$ 且 $v_0 \in h^{-1}(\alpha)$. 于是 $v_0 \in \hat{C}_h(\alpha)$, 即 $\alpha \in h_{\tilde{S}_h}(v_0)$. 因此 $\forall v_0 \in U, h(v_0) \subseteq h_{\tilde{S}_h}(v_0)$. 此外, 任取 $v_0 \in U$, 假设 $\alpha \in h_{\tilde{S}_h}(v_0)$, 则 $\alpha \in \mathrm{Co}_{\tilde{S}_h}(v_0)$ 且 $v_0 \in \hat{C}_h(\alpha)$, 于是 $v_0 \in h^{-1}(\alpha)$. 因此, 由定义13可得 $\alpha \in h(v_0), \forall v_0 \in U, h_{\tilde{S}_h}(v_0) \subseteq h(v_0)$. 综上所述, 对于任意的 $v_0 \in U$, 均有 $h_{\tilde{S}_h}(v_0) = h(v_0)$, 即 $h_{G_h} = h$ 成立. □

3　犹豫模糊三支决策方法

本节提出一种基于典范软集和软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法, 用于处理群决策问题.

3.1　三支决策基础

Yao[34] 提出了一种基于单评价函数的三支决策模型. 在该模型中, 将全序集 $(L, \leqslant)$ 作为评价函数的取值域. 设 $n, m \in L, n < m$ (也记作 $m > n$) 表示 $n \leqslant m$ 且 $n \neq m$.

定义17 [34]　设 $E: U \to (L, \leqslant)$, E 为 U 上的评价函数, $E(t)$ 为 $t \in U$ 的评价值. 给定两个阈值 $\alpha, \beta \in L$ 且 $\alpha < \beta$, 可得到 U 的如下划分:

$$\mathrm{POS}^{[\alpha,\cdot)}(E) = \{t \in U : \alpha \leqslant E(t)\},$$

$$\mathrm{BND}^{(\alpha,\beta)}(E) = \{t \in U : \alpha < E(t) < \beta\},$$

$$\mathrm{NEG}^{(\cdot,\beta]}(E) = \{t \in U : E(t) \leqslant \beta\}.$$

正域 $\mathrm{POS}^{[\alpha,\cdot)}(E)$、边界域 $\mathrm{BND}^{(\alpha,\beta)}(E)$ 和负域 $\mathrm{NEG}^{(\cdot,\beta]}(E)$ 中的元素应分别被接受、延迟决策和拒绝. 单评价函数是上述三支决策模型的基础, 其取值域的选择十分关键. 在实际应用中, 通常考虑实值评价函数.

定义18 [26]　设 $E: U \to [v_{\min}, v_{\max}]$ 是 U 上的评价函数, 其中 $v_{\min} < v_{\max}$ 是两个实数, $E(t)$ 是 $t \in U$ 的评价值. 给定两个阈值 a 和 b, 且满足 $v_{\min} < a < b < v_{\max}$, 则可得到 U 的如下划分:

$$H^{[b,v_{\max}]}(E) = \{t \in U : b \leqslant E(t)\},$$

$$M^{(a,b)}(E) = \{t \in U : a < E(t) < b\},$$

$$L^{[v_{\min},a]}(E) = \{t \in U : E(t) \leqslant a\}.$$

集合 $H^{[b,v_{\max}]}(E)$、$M^{(a,b)}(E)$ 和 $L^{[v_{\min},a]}(E)$ 中的元素分别称为高评价值元素、中评价值元素和低评价值元素.

3.2　基于犹豫模糊集的软粗糙模型

设 h 为论域 U 上的犹豫模糊集, $G_h = (\hat{C}_h, V_h)$ 为 h 的典范软集, 则 $P = (U, G_h)$ 为软近似空间. 根据定义10, 对于论域 U 的任意子集 T, 其软上近似集和软下近似集可分别定义为

$$\underline{T}_h = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{\hat{C}_h(\alpha) : \hat{C}_h(\alpha) \subseteq T\},$$

$$\overline{T}_h = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{\hat{C}_h(\alpha) : \hat{C}_h(\alpha) \bigcap T \neq \varnothing\}.$$

根据 T 的软下近似集和软上近似集, 可将论域 U 分成如下3个部分, 即正域、边界域和负域:

$$\mathrm{POS}_h(T) = \underline{T}_h,$$

$$\mathrm{BND}_h(T) = \overline{T}_h - \underline{T}_h,$$

$$\mathrm{NEG}_h(T) = U - \bar{T}_h.$$

命题1　设 h 为论域 U 上的犹豫模糊集, 且 $G_h = (\hat{C}_h, V_h)$ 为 h 的典范软集, 则 $\forall t_i \in U$, 集合 $\{t_i\}$ 的软

上近似集可用下式计算:

$$\overline{\{t_i\}}_h = \bigcup_{\alpha \in h(t_i)} h^{-1}(\alpha). \tag{1}$$

证明 由软上近似集的计算公式可得

$$\overline{\{t_i\}}_h = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{\hat{C}_h(\alpha) : \hat{C}_h(\alpha) \bigcap \{t_i\} \neq \varnothing\}.$$

根据值陪集和典范软集的定义,可得

$$\overline{\{t_i\}}_h = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{h^{-1}(\alpha) : h^{-1}(\alpha) \bigcap \{t_i\} \neq \varnothing\} = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{h^{-1}(\alpha) : t_i \in h^{-1}(\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in V_h} \{h^{-1}(\alpha) : \alpha \in h(t_i)\}.$$

因此,$\overline{\{t_i\}}_h = \bigcup_{\alpha \in h(t_i)} h^{-1}(\alpha)$ 成立. □

3.3 基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法

假设由一名主管负责的专家组对论域$U = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$中的备选方案进行评估. 每名专家给出的评价得分均取自单位区间,得分越高表示相应的备选方案越优. 根据评价结果可建立U上的犹豫模糊集h,该犹豫模糊集承载了专家组的量化评分信息. 在参考专家组给出的评价后,主管从U中初步选出若干备选方案,构成预决策集D. 在3支决策的过程中,主要目标是将论域U划分成3个部分,融合专家组和主管意见并形成最终的决策结果. 下面利用犹豫模糊集和软粗糙集提出一种三支决策方法.

首先,将犹豫模糊集h转化为其对应的典范软集$G_h = (\hat{C}_h, V_h)$. 利用典范软集,建立软近似空间$P = (U, G_h)$. 基于软近似空间P,根据式(1)可计算软上近似$\overline{\{t_i\}}_h$,其中$t_i \in U$且$i = 1, 2, \ldots, n$. 软上近似集$\overline{\{t_i\}}_h$中所包含的元素均与t_i有至少一个相同的评价值.

其次,选择合适的评价函数E. 评价函数在三支决策过程中至关重要. Hu[35]指出,合理的评价函数应满足单调性公理. 换言之,具有较高评价值的备选方案应优于评价值较低的方案. 在三支决策的实际应用场景中,考虑如下两种情况:

1) 主管从U中选出想要接受的备选方案,形成正预决策集D;

2) 主管从U中选出想要拒绝的备选方案,形成负预决策集D.

针对上述两种情况,定义评价函数为

$$E(t_i) = \begin{cases} \dfrac{|\overline{\{t_i\}}_h \bigcap D|}{|\overline{\{t_i\}}_h|}, & D\text{为正预决策集}; \\ \dfrac{|\overline{\{t_i\}}_h \backslash D|}{|\overline{\{t_i\}}_h|}, & D\text{为负预决策集}. \end{cases} \tag{2}$$

其中:$t_i \in U$,符号"$\backslash$"表示集合的差运算. 由式(2)可见,当D为正预决策集时,方案t_i的评价函数值$E(t_i)$表示软上近似集$\overline{\{t_i\}}_h$中被主管接受的备选方案所占的比例;当D为负预决策集时,$E(t_i)$表示软上近似集中未被主管拒绝的备选方案所占的比例. 在该定义中,预决策集反映了主管的初步定性意见,而软上近似集则由专家组中全体专家的量化评分所共同确定. 如上定义的评价函数融合了专家组的整体评分和主管的个人意见,实现了定量与定性相结合,且满足单调性公理.

最终,给定阈值a和b,且满足$0 \leqslant a < b \leqslant 1$,则可将$U$分为如下3个子集:

$$H^{[b,1]}(E) = \{t_i \in U : b \leqslant E(t_i)\},$$

$$M^{(a,b)}(E) = \{t_i \in U : a < E(t_i) < b\},$$

$$L^{[0,a]}(E) = \{t_i \in U : E(t_i) \leqslant a\}.$$

对应于3个子集,分别采取不同的决策行为:高值域$H^{[b,1]}$中的备选方案应当被接受;中值域$M^{(a,b)}$中的备选方案应进一步考察后再进行决策;低值域$L^{[0,a]}$中的备选方案应当被拒绝.

上述三支决策过程的算法描述如下:

算法1 基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策.

输入:论域$U = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$上的一个犹豫模糊集$h$和预决策集$D \subseteq U$;

输出:$H^{[b,1]}$、$M^{(a,b)}$和$L^{[0,a]}$.

step 1: 根据定义16,将犹豫模糊集h转换为典范软集$G_h = (\hat{C}_h, V_h)$;

step 2: 建立软近似空间$P = (U, G_h)$,根据式(1)计算软上近似集$\overline{\{t_i\}}_h$,其中$t_i \in U$且$i = 1, 2, \ldots, n$;

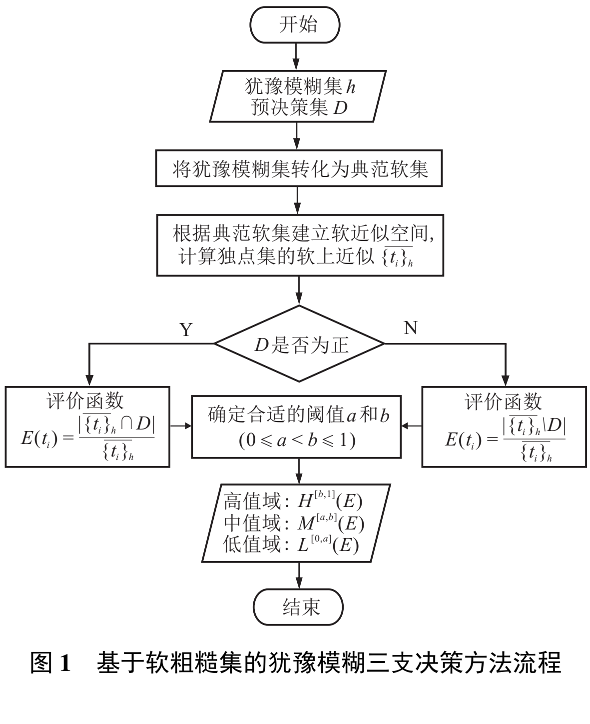

图1 基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法流程

step 3: 根据预决策集D和式(2)计算$t_i \in U$的评价函数值$E(t_i)$,其中$i = 1, 2, \ldots, n$;

step 4: 确定阈值a和b,满足$0 \leqslant a < b \leqslant 1$;

step 5: 计算高值域$H^{[b,1]}$、中值域$M^{(a,b)}$和低值域$L^{[0,a]}$;

step 6: 返回$H^{[b,1]}(E)$、$M^{(a,b)}(E)$和$L^{[0,a]}(E)$,并对不同部分做出对应决策.

图1给出了上述三支决策方法的流程.

4 算例分析

本节通过数值实例来验证本文所提出三支决策方法的有效性和实用性.

4.1 毕业生评优问题

某高等院校拟评选优秀毕业生,根据评定办法,先由各学院学位评定分委会推荐若干候选人,再由校学位评定委员会成立专家组进行最终审定. 一位毕业生能否当选优秀毕业生取决于评审专家小组的整体意见,专家组综合考虑组长和各方意见,最终在“入选、备选、落选”中选择其一,作为各位毕业生的评审结果.

设某高校有8位毕业生$U = \{t_1, t_2, \ldots, t_8\}$通过学院推荐参与校级优秀毕业生评选. 学校成立评审专家小组,由组长邀请3名专家对8位毕业生进行评审. 假设3名专家分别对U中每一位毕业生进行综合测评并给出取自区间$[0,1]$的评价得分,得分越高表示毕业生的综合表现越优. 根据专家给出的评价得分,建立论域U上的犹豫模糊集h,其中

$$h(t_1) = \{0.1, 0.3, 0.6\},\ h(t_2) = \{0.5, 0.7, 0.8\},$$
$$h(t_3) = \{0.2, 0.3, 0.4\},\ h(t_4) = \{0.2, 0.5, 0.6\},$$
$$h(t_5) = \{0.4, 0.7, 0.8\},\ h(t_6) = \{0.1, 0.4, 0.5\},$$
$$h(t_7) = \{0.3, 0.8, 0.9\},\ h(t_8) = \{0.7, 0.8, 0.9\}.$$

犹豫模糊数$h(t_i)(i = 1, 2, \ldots, 8)$中的隶属度表示3名专家给出的得分值. 易见$h$的值空间为

$$V_h = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}.$$

组长综合考虑各方意见后,初步认为毕业生t_1、t_3、t_4、t_6较差. 换言之,根据组长意见得到的负预决策集为$D = \{t_1, t_3, t_4, t_6\}$. 接下来,将运用本文所提出的算法逐步计算,并得到最终的决策结果.

step 1: 根据值陪集的定义,计算值空间中每一个值所对应的值陪集,将犹豫模糊集h转化为所对应的典范软集$G_h = (\hat{C}_h, V_h)$,其近似函数由值陪集确定,如表1所示.

step 2: 利用h的典范软集$G_h = (\hat{C}_h, V_h)$,可以建立软近似空间$P = (U, G_h)$. 根据式(1),可以计算集合$\{t_i\}(i = 1, 2, \ldots, 8)$的软上近似. 如

表1　犹豫模糊集h的典范软集G_h

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
t_1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
t_2	0	0	0	0	1	0	1	1	0
t_3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
t_4	0	1	0	0	1	1	0	0	0
t_5	0	0	0	1	0	0	1	1	0
t_6	1	0	0	1	1	0	0	0	0
t_7	0	0	1	0	0	0	0	1	1
t_8	0	0	0	0	0	0	1	1	1

$$\overline{\{t_2\}}_h = h^{-1}(0.5) \bigcup h^{-1}(0.7) \bigcup h^{-1}(0.8) = \{t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8\},$$
$$\overline{\{t_6\}}_h = h^{-1}(0.1) \bigcup h^{-1}(0.4) \bigcup h^{-1}(0.5) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}.$$

类似可得其余软上近似集为

$$\overline{\{t_1\}}_h = \{t_1, t_3, t_4, t_6, t_7\},$$
$$\overline{\{t_3\}}_h = \{t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\},$$
$$\overline{\{t_4\}}_h = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_6\},$$
$$\overline{\{t_5\}}_h = \{t_2, t_3, t_5, t_6, t_7, t_8\},$$
$$\overline{\{t_7\}}_h = \{t_1, t_2, t_3, t_5, t_7, t_8\},$$
$$\overline{\{t_8\}}_h = \{t_2, t_5, t_7, t_8\}.$$

其中,软上近似集$\overline{\{t_1\}}_h = \{t_1, t_3, t_4, t_6, t_7\}$中的毕业生$t_1$、$t_3$、$t_4$、$t_6$、$t_7$至少一个评分与毕业生$t_1$相同. 其余软上近似集也可以用同样的方式进行解释.

step 3: 确定合适的评价函数. 本实例中$D = \{t_1, t_3, t_4, t_6\}$为负预决集,其中包含了组长认为应当落选的毕业生. 根据式(2),可计算毕业生$t_i \in U(i = 1, 2, \ldots, 8)$的评价值$E(t_i)$,如

$$E(t_1) = \frac{|\{t_1, t_3, t_4, t_6, t_7\} \backslash \{t_1, t_3, t_4, t_6\}|}{|\{t_1, t_3, t_4, t_6, t_7\}|} = 0.2.$$

类似可得其余评价值: $E(t_2) = 0.67, E(t_3) = 0.33, E(t_4) = 0.2, E(t_5) = 0.67, E(t_6) = 0.33, E(t_7) = 0.67, E(t_8) = 1$.

在该实例中,评价值$E(t_i)$表示$\overline{\{t_i\}}_h$中组长认为不应落选的毕业生所占的比例. 根据评价值,可按照如下规则对任意两位毕业生$t_i, t_j \in U$进行排序:

1) $t_i \succ t_j$当且仅当$E(t_i) > E(t_j)$;

2) $t_i \prec t_j$当且仅当$E(t_i) < E(t_j)$;

3) $t_i \approx t_j$当且仅当$E(t_i) = E(t_j)$.

具体而言,U中元素排序结果为

$$t_8 \succ t_7 \approx t_5 \approx t_2 \succ t_6 \approx t_3 \succ t_4 \approx t_1.$$

step 4: 选择合适的阈值a和b,且满足$0 \leqslant a <$

$b \leqslant 1$. 在该实例问题中,选取$a=0.25$为低阈值,$b=0.65$为高阈值.

step 5: 根据评价值和所选取的阈值,可将论域U分成如下3个子集:

1) 高值域: $H^{[0.65,1]}(E)=\{t_2,t_5,t_7,t_8\}$;

2) 中值域: $M^{(0.25,0.65)}(E)=\{t_3,t_6\}$;

3) 低值域:$L^{[0,0.25]}(E)=\{t_1,t_4\}$.

step 6: 上述计算中综合考虑了3名专家的评价得分以及组长本人的意见,根据计算结果,给出如下决策建议:

1) 高值域$H^{[0.85,1]}(E)$中的毕业生t_2、t_5、t_7、t_8直接当选优秀毕业生;

2) 中值域$M^{(0.35,0.85)}(E)$中的毕业生t_3、t_6为备选优秀毕业生;

3) 低值域$L^{[0,0.35]}(E)$中的毕业生t_1、t_4落选.

4.2 家庭理财问题

实际生活中,家庭理财具有十分重要的意义. 假设某家庭想要投资一笔钱用于购买理财产品,邀请3名理财顾问根据$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$中属性对$U=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$中5款理财产品进行评估,属性的权重向量为$\boldsymbol{w}=(0.3,0.3,0.2,0.2)^{\mathrm{T}}$. 根据文献[36]中的数据,评价结果如表2所示. 下面将文献[36]中犹豫模糊矩阵各列所对应的犹豫模糊集记为$h_j(j=1,2,3,4)$,利用算法1求解该问题.

表 2 犹豫模糊决策矩阵 H

	a_1	a_2	a_3	a_4
t_1	$\{0.5,0.6\}$	$\{0.6,0.8\}$	$\{0.7,0.8\}$	$\{0.6\}$
t_2	$\{0.4,0.5,0.6\}$	$\{0.9\}$	$\{0.85\}$	$\{0.2,0.3\}$
t_3	$\{0.4,0.5\}$	$\{0.8,0.9\}$	$\{0.8\}$	$\{0.4,0.5\}$
t_4	$\{0.8,0.9\}$	$\{0.1,0.2\}$	$\{0.2,0.3\}$	$\{0.7,0.9\}$
t_5	$\{0.3\}$	$\{0.7\}$	$\{0.4,0.5,0.6\}$	$\{0.3,0.6\}$

step 1: 将犹豫模糊集$h_j(j=1,2,3,4)$转化为典范软集$G_{h_j}=(\hat{C}_{h_j},V_{h_j})(j=1,2,3,4)$.

step 2: 建立软近似空间$P_j=(U,G_{h_j})(j=1,2,3,4)$,并根据式(1)计算软上近似集$\overline{\{t_i\}}_{h_j}(i=1,2,3,4,5,\ j=1,2,3,4)$. 计算结果如表3所示.

表 3 软近似空间P_j中的软上近似集$\overline{\{t_i\}}_{h_j}$

	a_1	a_2	a_3	a_4
t_1	$\{t_1,t_2,t_3\}$	$\{t_1,t_3\}$	$\{t_1,t_3\}$	$\{t_1,t_5\}$
t_2	$\{t_1,t_2,t_3\}$	$\{t_2,t_3\}$	$\{t_2,t_3\}$	$\{t_2,t_5\}$
t_3	$\{t_1,t_2,t_3\}$	$\{t_1,t_2,t_3\}$	$\{t_1,t_3\}$	$\{t_3\}$
t_4	$\{t_4\}$	$\{t_4\}$	$\{t_4\}$	$\{t_4\}$
t_5	$\{t_5\}$	$\{t_5\}$	$\{t_5\}$	$\{t_1,t_2,t_5\}$

step 3: 由于该实例中没有选取预决策集,本文通过计算犹豫模糊数的得分函数,选取排名前三的备选方案作为正预决策集. 经计算可得预决策集为$D_1=\{t_1,t_2,t_4\}$, $D_2=\{t_1,t_2,t_3\}$, $D_3=\{t_1,t_2,t_3\}$, $D_4=\{t_1,t_3,t_4\}$. 根据式(2)可计算单属性评价值$E_j(t_i)$,如

$$E_1(t_1)=\frac{|\overline{\{t_1\}}_{h_1}\bigcap D_1|}{|\overline{\{t_1\}}_{h_1}|}=0.67.$$

类似可得其余单属性评价值,如表4所示.

表 4 评价值汇总表

	$E_1(t_i)$	$E_2(t_i)$	$E_3(t_i)$	$E_4(t_i)$	$E(t_i)$
t_1	0.67	1	1	1	0.9
t_2	0.67	1	1	0.5	0.8
t_3	0.67	1	1	1	0.9
t_4	1	0	0	1	0.5
t_5	0	1	0	0.67	0.43

结合属性权重,可分别计算出每个备选方案的综合评价值$E(t_i)$,计算结果如表4所示.

根据评价值,可得U中元素排序结果为

$$t_1 \approx t_3 \succ t_2 \succ t_4 \succ t_5.$$

step 4: 选择阈值a、b,且满足$0 \leqslant a < b \leqslant 1$. 在该实例问题中,选取$a=0.55$, $b=0.85$.

step 5: 根据综合评价值和所选取的阈值,可将论域U分成以下3个部分:

1) 高值域: $H^{[0.85,1]}(E)=\{t_1,t_3\}$;

2) 中值域: $M^{(0.55,0.85)}(E)=\{t_2\}$;

3) 低值域: $L^{[0,0.55]}(E)=\{t_4,t_5\}$.

step 6: 根据计算结果,为该家庭提供如下建议:

1) 购买高值域中的理财产品t_1和t_3;

2) 对中值域中的理财产品t_2持观望态度;

3) 不建议购买低值域中的理财产品t_4和t_5.

4.3 对比分析

在已有研究中, Wang等[36]提出了基于犹豫模糊决策矩阵和损失函数表的HF-MADMLET决策法,并应用于上述家庭理财问题. Xu等[37]通过定义犹豫模糊正理想解和负理想解,提出了HF-TOPISI决策法. Chen等[38]将犹豫模糊集与ELECTRE II决策法相结合,提出了HF-ELECTRE II决策法. Mahmoudi等[39]结合犹豫模糊集拓展了PROMETHEE决策法. 此外, Xu等[40]提出了基于广义犹豫模糊加权平均(GHFWA)算子的多属性决策方法.

本文将以上5种犹豫模糊多属性决策方法用于解决4.2节中的家庭理财问题. 为了增强可对比性,属性的权重向量统一取$\boldsymbol{w}=(0.3,0.3,0.2,0.2)^{\mathrm{T}}$, HF-MADMLET决策法的损失函数与文献[36]一致, HF-ELECTRE II决策法的得分函数和偏差函数与文献[38]一致, HF-PROMETHEE决策法的偏好函数及参数与文献[39]一致,计算结果如表5所示. 应当指出,

使用GHFWA决策法时还需注意算子的参数. 若取参数值$\lambda = 1$,则GHFWA算子退化为犹豫模糊加权平均算子,所对应的决策方法退化为犹豫模糊加权平均法. 但在本例中,其排序结果与表6中取$\lambda = 2$时所得计算结果一致.

表 5　不同决策方法的结果比较

决策方法	排序结果
HF-MADMLET[36]	$t_2 \succ t_3 \succ t_1 \succ t_4 \succ t_5$
HF-TOPSIS[37]	$t_2 \succ t_3 \succ t_1 \succ t_4 \succ t_5$
HF-ELECTRE II[38]	$t_1 \approx t_2 \approx t_3 \succ t_4 \succ t_5$
HF-PROMETHEE II[39]	$t_3 \succ t_1 \succ t_2 \succ t_4 \succ t_5$
GHFWA[40]	$t_2 \succ t_3 \succ t_1 \succ t_4 \succ t_5$
本文方法	$t_1 \approx t_3 \succ t_2 \succ t_4 \succ t_5$

由计算结果可见,理财产品t_4和t_5在所有方法的排序中均处于第4位和第5位. 在GHFWA决策法、HF-MADMLET决策法和HF-TOPISI决策法的排序中,t_2为最优理财产品. 在HF-ELECTRE II决策法的排序中,t_1、t_2和t_3均为最优理财产品. 在HF-PROMETHEE决策法的排序中,t_1为最优理财产品. 在本文方法的排序中,t_2和t_3为最优. 不同方法中排名前三的理财产品均为t_1、t_2和t_3,但它们在不同方法中的具体排名略有不同,这是由不同方法的各自特性及侧重点差异所导致的.

与文献中已有方法相比,本文所提出的方法中引入了预决策集的概念,增强了三支决策的灵活性和实用性. 例如,在毕业生评优问题中,本文方法综合了3位专家的量化评分和组长的个人意见,统筹了评选过程中的主观定性与客观量化信息. 事实上,预决策集和最终决策结果的差异真实体现了组长与3名专家的意见分歧. 此外,HF-TOPSIS决策法要求所有犹豫模糊数的基数全部相等,较适用于涉及n-典型犹豫模糊集的决策问题,而本文所提出方法无此限制,在实际应用中更为便利.

5　结　论

本文定义了单位区间参数化软集、典范软集和导出犹豫模糊集等概念,研究了软集与犹豫模糊集的内在关系和相互表示问题,构建了犹豫模糊集与软集之间的桥梁,为研究犹豫模糊集的相关理论及应用提供了新的视角. 此外,初步探索了软集与犹豫模糊三支决策的融合,引入了预决策集的概念,结合预决策集和软上近似集确定评价函数,提出了一种基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法. 该方法综合考虑专家组的量化评分和主管的定性评价,将评分视为参数,利用典范软集组织备选方案,且对犹豫模糊数并无基数一致性限制. 此外,通过毕业生评优问题和家庭理财问题验证了本文所提出三支决策方法的有效性,并与现有的几种犹豫模糊决策方法进行了对比分析. 应当指出,本文方法采用直接给定的阈值,而不同阈值可能会对决策结果产生影响. 今后将着重研究最优阈值的确定方法,探索阈值和预决策集在犹豫模糊三支决策中的作用,或从软集理论角度研究犹豫模糊集的相关性质.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010: 25(6): 529-539.

[3] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[4] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[5] 朱丽, 朱传喜, 张小芝. 基于粗糙集的犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1335-1339.
(Zhu L, Zhu C X, Zhang X Z. Method for hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on rough sets[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1335-1339.)

[6] Liang D C, Liu D. A novel risk decision making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(2): 237-247.

[7] 曾文艺, 李德清, 尹乾. 加权犹豫模糊集的群决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 527-534.
(Zeng W Y, Li D Q, Yin Q. Group decision making approach of weighted hesitant fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 527-534.)

[8] 廖虎昌, 缑迅杰, 徐泽水. 基于犹豫模糊语言集的决策理论与方法综述[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(1): 35-48.
(Liao H C, Gou X J, Xu Z S. A survey of decision making theory and methodologies of hesitant fuzzy linguistic term set[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(1): 35-48.)

[9] 徐泽水, 张申. 概率犹豫模糊决策理论与方法综述[J]. 控制与决策, 2021, 36(1): 42-51.
(Xu Z S, Zhang S. An overview of probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods[J]. Control and Decision, 2021, 36(1): 42-51.)

[10] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[11] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
(Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. Rough set theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2001.)

[12] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough

sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3): 191-209.

[13] Molodtsov D. Soft set theory — First results[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5): 19-31.

[14] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft set theory[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2003, 45(4/5): 555-562.

[15] Ali M I, Feng F, Liu X Y, et al. On some new operations in soft set theory[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1547-1553.

[16] Feng F, Li C X, Davvaz B, et al. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: A tentative approach[J]. Soft Computing, 2010, 14(9): 899-911.

[17] Feng F, Liu X Y, Leoreanu-Fotea V, et al. Soft sets and soft rough sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1125-1137.

[18] 付清, 张小红. 一种应用软粗糙模糊集的多属性决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(30): 39-43.
(Fu Q, Zhang X H. Method for multi-attribute decision making applying soft-rough fuzzy set[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(30): 39-43.)

[19] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[20] Yu H, Wang G Y, Li T R. Three-way decisions: Methods and practices for complex problem solving[M]. Beijing: Science Press, 2015.

[21] Liang D C, Cao W. Three-way decisions: Model and the state of the art[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China: Social Sciences Edition, 2019, 21(1): 104-112.

[22] 薛占熬, 朱泰隆, 薛天宇, 等. 基于直觉模糊集的三支决策模型[J]. 计算机科学, 2016, 43(6): 283-288.
(Xue Z A, Zhu T L, Xue T Y, et al. Model of three-way decision theory based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer Science, 2016, 43(6): 283-288.)

[23] Liu P D, Wang Y M, Jia F, et al. A multiple attribute decision making three-way model for intuitionistic fuzzy numbers[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 119: 177-203.

[24] Li X N, Sun Q Q, Chen H M, et al. Three-way decision on two universes[J]. Information Sciences, 2020, 515: 263-279.

[25] Yang J L, Yao Y Y. Semantics of soft sets and three-way decision with soft sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 194: 105538.

[26] Yao Y Y. Set-theoretic models of three-way decision[J]. Granular Computing, 2021, 6(1): 133-148.

[27] Jia X Y, Li W W, Shang L, et al. An adaptive learning parameters algorithm in three-way decision-theoretic rough set model[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(11): 2520-2525.

[28] Chen G, Liu B Q, Wu Y. New algorithm to get optimal threshold for three-decision-making[J]. Journal of Computer Applications, 2012, 32(8): 2212-2215.

[29] 李小南, 赵璐, 易黄建. 基于加权信息熵的直觉模糊信息系统的三支决策[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2705-2713.
(Li X N, Zhao L, Yi H J. Three-way decision of intuitionistic fuzzy information systems based on the weighted information entropy[J]. Control and Decision, 2022, 37(10): 2705-2713.)

[30] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[31] Bedregal B, Reiser R, Bustince H, et al. Aggregation functions for typical hesitant fuzzy elements and the action of automorphisms[J]. Information Sciences, 2014, 255: 82-99.

[32] Alcantud J C R, Torra V. Decomposition theorems and extension principles for hesitant fuzzy sets[J]. Information Fusion, 2018, 41: 48-56.

[33] Feng F, Wang Q, Yager R R, et al. Maximal association analysis using logical formulas over soft sets[J]. Expert Systems With Applications, 2020, 159: 113557.

[34] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7413: 1-17.

[35] Hu B Q. Three-way decisions space and three-way decisions[J]. Information Sciences, 2014, 281: 21-52.

[36] Wang J J, Ma X L, Xu Z S, et al. Three-way multi-attribute decision making under hesitant fuzzy environments[J]. Information Sciences, 2021, 552: 328-351.

[37] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52: 53-64.

[38] Chen N, Xu Z S. Hesitant fuzzy ELECTRE II approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems[J]. Information Sciences, 2015, 292: 175-197.

[39] Mahmoudi A, Sadi-Nezhad S, Makui A, et al. An extension on PROMETHEE based on the typical hesitant fuzzy sets to solve multi-attribute decision-making problem[J]. Kybernetes, 2016, 45(8): 1213-1231.

[40] Xu Z S, Zhang S. An overview on the applications of the hesitant fuzzy sets in group decision-making: Theory, support and methods[J]. Frontiers of Engineering Management, 2019, 6(2): 163-182.

作者简介

冯锋 (1981−), 男, 教授, 博士, 从事不确定性的数学理论、软计算、决策分析等研究, E-mail: fengnix@hotmail.com;

万喆 (1997−), 女, 硕士生, 从事模糊集、粗糙集、三支决策的研究, E-mail: 815204418@qq.com;

徐泽水 (1968−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与技术、信息融合理论和聚类算法、模糊系统与优化算法等研究, E-mail: xuzeshui@263.net;

柳晓燕 (1980−), 女, 讲师, 硕士, 从事计算智能、决策分析、计算机图形学的研究, E-mail: lxy031010@163.com.

(责任编辑：李君玲)