

控制与决策

Control and Decision

考虑双重不确定性的公交时刻表分布鲁棒优化模型

夏东阳, 马继辉, 张文义

引用本文:

夏东阳, 马继辉, 张文义. 考虑双重不确定性的公交时刻表分布鲁棒优化模型[J]. *控制与决策*, 2023, 38(4): 1056–1064.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1688>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于两阶段分布鲁棒优化的列车停站方案与时刻表协同研究

Two-stage distributionally robust optimization for integrated train stop planning and timetabling

控制与决策. 2023, 38(4): 1065–1073 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.2058>

基于分布鲁棒优化的城市轨道交通网络末班车衔接研究

Distributionally robust optimization for the last-train connection planning problem in urban rail transit networks

控制与决策. 2023, 38(1): 248–256 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1143>

共享汽车系统空车调度的鲁棒优化模型

Robust optimization model for empty vehicle scheduling in vehicle-sharing system

控制与决策. 2023, 38(2): 519–527 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0750>

面向基金赎回风险应对场景的决策优化

Decision optimization for fund redemption risk response scenarios

控制与决策. 2022, 37(1): 151–159 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1074>

基于鲁棒优化的云医疗资源配置问题

Robust optimization based medical resource allocation problem in cloud healthcare system

控制与决策. 2021, 36(2): 469–474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0455>

考虑双重不确定性的公交时刻表分布鲁棒优化模型

夏东阳, 马继辉, 张文义[†]

(北京交通大学 综合交通运输大数据应用技术交通运输行业重点实验室, 北京 100044)

摘要: 城市公交系统由于受外界干扰, 其需求和运行环境在时空上呈现高度不确定性, 给日常运营组织带来了巨大挑战. 为增强公交系统对于客流需求和运行场景双重不确定性的应对能力, 提出一种权衡服务质量和鲁棒性的单一线路时刻表优化方法. 方法采用离散场景刻画需求的不确定性, 并以滞留人数的期望值和条件风险值最小化为目标, 综合考虑多方面约束, 构建多场景耦合的分布鲁棒优化模型 (DRO). 为方便模型求解, 运用模糊集描述场景发生概率的不确定性, 再借助对偶理论和常规线性化方法将原模型转化为等价的混合整数线性规划形式. 最后通过实际案例对方法进行分析, 结果表明: 等价转换得到的线性形式可由 GUROBI 优化软件快速求得最优解; DRO 模型所得时刻表能有效应对双重不确定性; 随着不确定性的上升, 分布鲁棒优化方法相较于传统随机规划方法体现出更强的鲁棒性, 可以切实改善公交系统运营的稳定性.

关键词: 城市交通; 公交时刻表; 分布鲁棒优化; 双重不确定性; 均值-CVaR; 混合整数线性规划

中图分类号: U231+92

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1688

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 夏东阳, 马继辉, 张文义. 考虑双重不确定性的公交时刻表分布鲁棒优化模型 [J]. 控制与决策, 2023, 38(4): 1056-1064.

A distributionally robust optimization model for the bus timetabling problem under two-fold uncertainties

XIA Dong-yang, MA Ji-hui, ZHANG Wen-yi[†]

(Key Laboratory of Transport Industry of Big Data Application Technologies for Comprehensive Transport of Ministry of Transport, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The passenger demand and operating environment of the urban public transport system are highly uncertain in time and space due to external disturbance, bringing great challenges to the operating organization. To enhance the ability of the bus system to deal with the impact of the two-fold uncertainties rooted in the passenger demand and the operating scenarios, a distributionally robust optimization method of the single-line bus timetabling problem is proposed in this paper. A discrete set of scenarios is used to describe the uncertain demand, and a multi-scenario distributionally robust optimization (DRO) model is established to minimize the expected number of detained passengers and conditional-value at risk (CVaR) by taking account of wide-ranging constraints. For the convenience of computing, a fuzzy set of uncertain quantities is constructed with the limited known distribution information. On this basis, dual theory and conventional linearized approaches are then employed to transform the original model into a mixed-integer linear programming form. Finally, a case study of a bus line in Beijing is conducted to demonstrate the effectiveness and efficiency of the proposed model. The results show that the linear model obtained from equivalent transformation can be quickly solved to optimality by the GUROBI optimization soft package, and the timetable obtained based on the DRO model can effectively deal with the double uncertainties. In addition, compared to the SO (stochastic optimization) model, with the increase of uncertainty, the distributionally robust optimization approach is insensitive to various possible uncertain scenarios, which is expected to improve the stability of the public transport system.

Keywords: urban traffic; bus timetable; distributionally robust optimization; two-fold uncertainties; mean-CVaR; mixed-integer linear programming

收稿日期: 2021-09-29; 录用日期: 2022-01-13.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2022JBMC045); 国家自然科学基金国际(地区)合作与交流项目 (71961137008); 国家自然科学基金创新研究群体项目 (71621001).

责任编辑: 龙建成.

[†]通讯作者. E-mail: wyzhang@bjtu.edu.cn.

0 引言

城市公共交通集约高效、节能环保、运量大、安全性高,是我国大中城市的主要运输方式之一。然而,在实际运营过程中,公交系统运营效果并不理想,乘客等待时间长、站台过度拥挤、串车现象等普遍存在。究其原因,公交系统作为一个开放系统,时常会受到外界不确定因素的干扰。而在实际制定运营计划时,决策者对各影响因素考虑不足,由此造成运营计划与实际情况存在较大偏差,严重影响了公交运营效率以及乘客出行体验。因此,若能在制定计划前充分考虑各种不确定性,运力与需求的匹配将会更加精准,公交服务水平有望显著提高。公交运营计划优化对象通常包括时刻表、行车计划以及司售人员排班等,本文着重针对不确定条件下的公交时刻表优化问题展开分析研究。

公交时刻表优化问题作为编制公交运营计划的重要环节,近年来成为工程和研究中关注的焦点。其中,黄青霞等^[1]建立了可反映公交车运行特征和乘客出行行为的元胞自动机模型,通过仿真的方法探究了基于车头时距阈值的组合策略;胡宝雨等^[2]从客流的变化规律出发,研究了不同车型与间隔下的公交时刻表优化方法,并建立了多目标优化模型以兼顾公交运营商和乘客的利益;郭戎格等^[3]考虑区别于普通燃油车的定制电动公交特性,对多种路径可供选择的情况下的路径优化问题进行了研究;Zhang等^[4]考虑时变的站间车辆行车时间,通过调整发车时刻和滞站时间等措施解决单线公交时刻表调整问题。

以上文献大多假定客流需求确定,这与公交实际运营中不确定的乘客需求相悖,可能导致优化结果并不理想。为应对客流的不确定性,学者提出了鲁棒优化、随机规划和分布鲁棒优化3种方法。魏旭^[5]考虑有限的车辆容量,建立了公交动态调整鲁棒优化模型;Gkiotsalitis等^[6]考虑旅行时间和乘客需求的不确定性,利用遗传算法求解了最差情况下的最小损失;Du等^[7]假设客流量为模糊值,建立以客运量和通过率为约束条件的机会约束规划模型,对模糊环境下单线公交时刻表优化问题进行了研究;Yang等^[8]针对城轨网络末班车衔接优化问题,以极大化换乘成功的乘客数量为目标建立了分布鲁棒优化模型;邱若臻等^[9]认为各需求情景的发生概率不确定,通过构造两种不确定集研究了多周期库存订货问题;李军等^[10]考虑期望收益分布的不确定性,基于椭球不确定集建立了均值-CVaR投资组合选择模型,并利用改进的粒子群算法进行求解。然而,上述研究仅聚焦于单一的不确定量。

综上所述,目前关于公交时刻表优化问题的研究主要侧重于确定的需求情形,针对不确定条件下公交时刻表优化问题的研究尚有不足。上述所提出优化方法中,传统的鲁棒优化方法得到的策略过于保守,在实际运营过程中往往会导致运力的浪费;随机规划方法需要在优化前给定精确的客流场景发生概率分布,但该分布在实际中很难精确获得,通常只能通过历史数据进行估计;分布鲁棒优化方法能在考虑客流需求不确定性的同时,利用部分已知信息刻画客流场景发生概率的不确定性,即能应对双重不确定性,所得优化策略与实际情况更为贴近。目前,较少有学者开展基于分布鲁棒优化方法的公交时刻表优化研究。

鉴于此,本文通过构造一系列随机场景刻画不确定的客流需求,并综合考虑场景发生概率分布的不确定性。在均值-CVaR准则下建立公交时刻表分布鲁棒优化模型,以期在提高公交时刻表鲁棒性的同时精准匹配运力运量。为便于求解,在不确定量模糊集下,利用对偶理论将所建模型转化为计算可处理的等价形式,并通过实验验证所提出方法的有效性。所提出方法可有效应对不确定的客流需求和客流发生场景,并可根据决策风险偏好灵活设置服务质量和鲁棒性的权重,为不确定环境下的公交时刻表优化提供兼顾效能和可靠性的个性化辅助决策支持。

1 问题描述

给定一条包含 n 个车站的城市公交线路,考虑优化时段内的 k 个车次,假设客流场景发生概率以及客流需求均不确定。本文通过调整各车次的发车时刻以及在各站点的停站时间,同时限制各车辆之间的车头时距,以最小化滞留人数的期望值和条件风险值,从而提高公交服务质量并保证服务的鲁棒性。传统的鲁棒性是指方案抵御最坏情况的能力,而本文的鲁棒性则是指公交时刻表方案在客流需求和客流场景发生概率均不确定时维持一定服务质量和鲁棒性的能力。鉴于不良时刻表造成的后果尚未严重到不可承受,本文鲁棒性关注的并非只是最坏情况,而是超出特定风险值的所有情况,并且该风险值可根据决策需求灵活设置。因此,本文鲁棒优化方法实际上是一种兼顾系统运行效能和可靠性的方法。均值-CVaR模型能够在考虑目标期望的同时利用相对乐观的风险测度指标CVaR刻画所提出鲁棒性,满足公交时刻表在面临双重不确定情景时兼顾服务质量和鲁棒性的要求,基于此建立了相应的分布鲁棒优化模型。基本研究思路如图1所示。

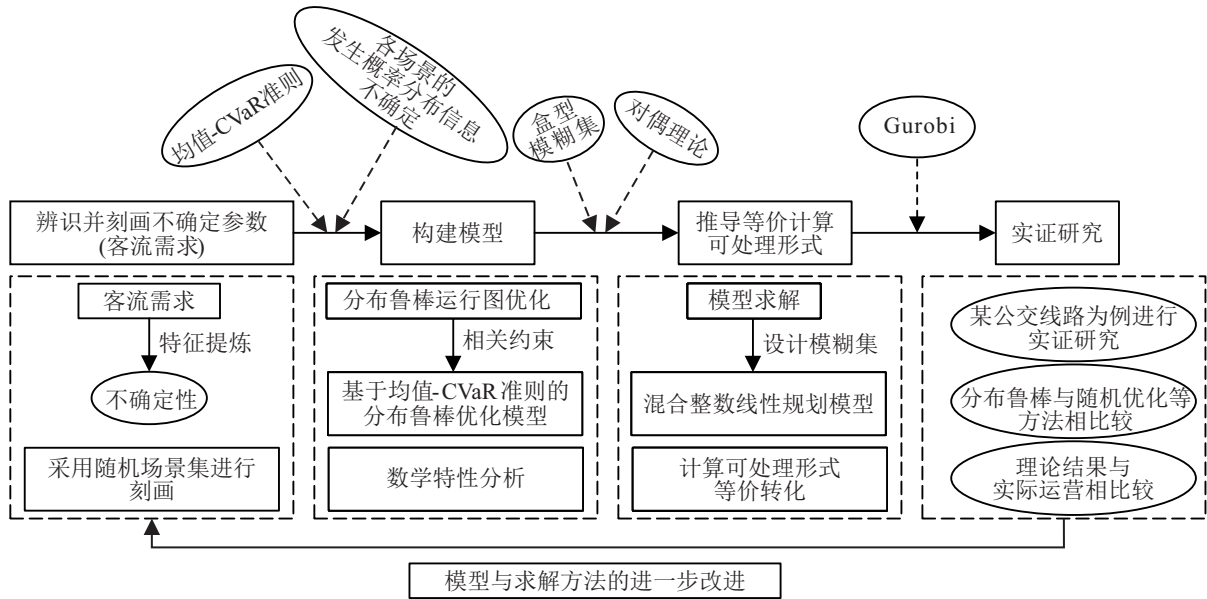


图1 公交时刻表分布鲁棒优化研究路线

在建立模型前,作出如下合理假设:1)假设公交在线路上运行时,前后次序不变;2)假设公交车在线路上每个车站均会停靠;3)假设公交在各车站之间的运行时间为定值;4)假设客流到达服从均匀分布.考虑到高峰时段内的交通状况相对稳定,为简化问题建模和求解,采用高峰时段的平均值描述站间运行时长和车站客流到达率,类似假设也出现在其他公交时刻表优化研究中^[11-14].

2 模型构建

基于前文的合理假设,给出基于均值-CVaR准则的公交时刻表分布鲁棒优化模型的约束条件和目标函数.

2.1 约束条件

本问题进行建模涉及的约束有公交运行动态过程、车头时距、容量、出发时刻调幅以及滞站时长等5类,各类建模如下.

1) 公交运行动态过程约束.

车辆到发时刻满足其运行过程的基本约束,即

$$a_{k,i} = \begin{cases} s_{k,1} + x_{k,1}, & i = 1; \\ d_{k,i-1} + t_{k,i-1}^{\text{run}}, & i \in I \setminus \{1\}; \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{K}. \quad (1)$$

$$d_{k,i} = a_{k,i} + t_{k,i}^{\text{dwell}}, \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in I. \quad (2)$$

其中: $x_{k,1}$ 和 $t_{k,i}^{\text{dwell}}$ 为决策变量,分别表示车辆 k 始发时刻的调整值与车辆 k 在车站 i 的停站时间; $a_{k,i}$ 为车辆 k 到达车站 i 的时间; $s_{k,1}$ 为车辆 k 的初始始发时刻; $d_{k,i}$ 为车辆 k 离开车站 i 的时间; $t_{k,i}^{\text{run}}$ 为车辆 k 在 i 区间的运行时间; $\mathbf{K} = \{1, 2, \dots, k, \dots, m\}$ 和 $I = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ 分别为车辆集合与车站集合, k 为

车辆编号, m 为车辆数量, n 为车站数量, i 为车站序号, 车站 i 至车站 $i+1$ 为线路第 i 个运行区间.

车辆驶离各车站时的载客量满足如下约束:

$$P_{k,i}^{\text{on}}(\omega_q) = \begin{cases} P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q), & i = 1; \\ P_{k,i-1}^{\text{on}}(\omega_q) - P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q) + P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q), & i \in I \setminus \{1\}. \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{K}, \omega_q \in \Omega. \quad (3)$$

其中: $P_{k,i}^{\text{on}}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中, 车辆 k 驶离车站 i 时的在车人数; $P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中, 在车站 i 能够乘坐车辆 k 离开的上车人数; $P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中, 车辆 k 抵达车站 i 时的下车人数; Ω 为场景集合.

高峰时期客流量较大且运力有限,可能导致部分乘客不能上车,该部分滞留人数满足如下约束:

$$P_{k,i}^{\text{detailed}}(\omega_q) = P_{k,i}^{\text{wait}}(\omega_q) - P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q), \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in I, \omega_q \in \Omega. \quad (4)$$

其中: $P_{k,i}^{\text{detailed}}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中, 车辆 k 驶离车站 i 时的滞留人数; $P_{k,i}^{\text{wait}}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中, 在车站 i 等待车辆 k 的人数.

在车站 i 等待车辆 k 的人数为发车间隔内站台累计到达人数与前车滞留人数之和,即

$$P_{k,i}^{\text{wait}}(\omega_q) = (d_{k,i} - d_{k-1,i}) \cdot \tilde{\lambda}_i(\omega_q) + P_{k-1,i}^{\text{detailed}}(\omega_q), \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in I, \omega_q \in \Omega, \quad (5)$$

其中 $\tilde{\lambda}_i(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中的乘客到达率.

假定在车站 i 下车的人数与在车人数成比例关系,即

$$P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q) = \begin{cases} 0, & i = 1; \\ \tilde{\delta}_{k,i}(\omega_q) \cdot P_{k,i-1}^{\text{on}}(\omega_q), & i \in \mathbf{I} \setminus \{1\}. \end{cases} \quad (6)$$

$\forall k \in \mathbf{K}, \omega_q \in \Omega.$

其中 $\tilde{\delta}_{k,i}(\omega_q)$ 为场景 ω_q 中,车辆 k 到达车站 i 后乘客的下车比率.

2) 车头时距约束.

在提高公交车辆利用效率的同时,为避免串车现象以保障运营安全,相邻车辆到达同一车站的时间间隔不能小于最小车头时距,即

$$d_{k+1,i} - d_{k,i} \geq h_{\min}, \quad \forall k \in \mathbf{K} \setminus \{m\}, i \in \mathbf{I}, \quad (7)$$

其中 h_{\min} 为车辆间最小的车头时距.

3) 容量约束.

为贴合实际运营情况,本文要求车辆到站后有剩余容量乘客即可上车,不考虑限流措施.且所考虑的需求是指出行刚需,无论等待时间长短,最终都选择该线路公交进行出行的客流需求.鉴于此,车辆 k 在车站 i 的上车人数等于该车站等车人数与车辆剩余容量的最小值,即

$$P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q) = \min\{P_{k,i}^{\text{wait}}(\omega_q), C_{\max} - P_{k,i-1}^{\text{on}}(\omega_q) + P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q)\}, \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}, \omega_q \in \Omega, \quad (8)$$

其中 C_{\max} 为车辆的最大载客量.

4) 出发时刻调幅约束.

调整后的始发时刻与原时刻表相差不宜过大,即

$$x_{\max}^- \leq x_k \leq x_{\max}^+, \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}. \quad (9)$$

其中: x_{\max}^- 为车辆 k 始发时刻最大前移时间, x_{\max}^+ 为车辆 k 始发时刻最大后移时间.

5) 滞站时长约束.

采用滞站策略后,车辆 k 在车站 i 的停站时间不得少于乘客上下车所需要的总时间,即

$$t_{k,i}^{\text{dwell}} \geq \max\{\theta_1 \cdot P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q) + r_0, \theta_2 \cdot P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q) + r_0\}, \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}, \omega_q \in \Omega. \quad (10)$$

其中: θ_1 和 θ_2 分别为乘客上下车所需时间(单位:s/人); r_0 为车辆的开关门时间.

为保证乘客的等待时间在可接受的范围内,车辆 k 在车站 i 的停站时间不能过长,即

$$0 \leq t_{k,i}^{\text{dwell}} \leq \bar{t}_{k,i}^{\text{dwell}}, \quad \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}, \quad (11)$$

其中 $\bar{t}_{k,i}^{\text{dwell}}$ 为车辆 k 在车站 i 的最大停站时间.

2.2 模型目标

本文希望通过调整发车时刻和停站时长提高公交服务质量和鲁棒性.关于服务质量,考虑到乘客的滞留不仅造成乘客平均等待时间大幅增加,而且严重影响站台安全,因此滞留人数的多少与公交服务质量直接挂钩.鉴于此,采用期望滞留人数衡量服务质量的优劣.关于服务鲁棒性,利用超出特定风险测度的滞留人数平均值衡量其优劣,即条件风险值.本文采用凸组合的形式将两者转化为统一目标,即

$$\min_{\mathbf{v}} \sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \{\zeta \cdot E_{\mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] + (1 - \zeta) \cdot \text{CVaR}_{\eta, \mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]\}, \quad (12)$$

其中: $\mathbf{p} = (p(\omega_1), p(\omega_2), \dots, p(\omega_N))^T$, $Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) = \sum_{k \in \mathbf{K}} \sum_{i \in \mathbf{I}} P_{k,i}^{\text{detailed}}(\omega_q)$. $\zeta \in [0, 1]$ 为权重系数, ζ 越小决策者越倾向于降低风险.当 $\zeta = 0$ 时,式(12)等价于条件风险值最小化问题;当 $\zeta = 1$ 时,式(12)等价于期望滞留人数最小化问题.

记 $Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))$ 为滞留人数的计算函数,其中 $\mathbf{v} = (\mathbf{x}, \mathbf{t}^{\text{dwell}})$,表示与公交时刻表相关的决策向量, $\boldsymbol{\xi}(\omega_q)$ 为不确定量在场景 ω_q 中的实现值,即到达率 $\tilde{\lambda}_i(\omega_q)$ 和下车比率 $\tilde{\delta}_{k,i}(\omega_q)$.场景 ω_q 中,滞留人数 $Q(\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))$ 不超过最大滞留阈值 μ 的概率为

$$\Xi[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)), \mu] = \Pr\{Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) \leq \mu\}. \quad (13)$$

风险价值(value at risk, VaR)是一种应用广泛的风险测度,本文所提出风险价值表示滞留人数不超过阈值 μ 的概率不低于 η ,有

$$\text{VaR}_{\eta}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] = \inf\{\mu \in \mathbf{R}^+ | \Xi[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)), \mu] \geq \eta\}, \quad (14)$$

其中风险特性系数 $\eta \in [0, 1]$.

由于VaR无法测量极端尾部风险,在式(14)的基础上,根据文献[15],定义条件风险值,即服务的鲁棒性为

$$\text{CVaR}_{\eta, \mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] = \text{VaR}_{\eta}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] + \text{CVaR}_{\eta, \mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]^+, \quad (15)$$

其中

$$\text{CVaR}_{\eta, \mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]^+ = E_{\mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) - \text{VaR}_{\eta}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) | Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) \geq \text{VaR}_{\eta}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]]. \quad (16)$$

式(16)表明,若要求解 $\text{CVaR}_{\eta, \mathbf{p}}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]$ 的值,需要预先求解 $\text{VaR}_{\eta}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]$,且直接求解较为困难.鉴于此,根据文献[16]方法,将式(16)转化为

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\eta,p}[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] = \\ \min_{\mu \in \mathbf{R}^+} \left\{ \mu + \frac{1}{1-\eta} E_p[\max\{Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) - \mu, 0\}] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

进一步,通过引入辅助变量,式(17)等价于

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in \mathbf{R}^+} \mu + \frac{1}{1-\eta} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{p}; \\ \text{s.t. } \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) - \mathbf{e}\mu \leq \boldsymbol{\sigma}, \forall \omega_q \in \Omega, \boldsymbol{\sigma} \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

其中: $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma(\omega_1), \sigma(\omega_2), \dots, \sigma(\omega_N))$, $\mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) = (Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_1)), Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_2)), \dots, Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_N)))$. 记 $E_p[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{p}$.

综上,条件风险值刻画了滞留人数超出风险价值 $\text{VaR}_\eta[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]$ 后的条件平均值,即评价了服务的鲁棒性. 此外,均值函数 $E_p[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))]$ 有如下等价形式:

$$E_p[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] = \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))^T \mathbf{p}. \quad (19)$$

综合式(12)、(17)~(19),基于均值-CVaR准则的公交时刻表分布鲁棒优化模型的目标函数可描述为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} \sup_{\mathbf{p} \in \wp} \min_{\mu \in \mathbf{R}^+} \left\{ \zeta \cdot E_p[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] + \right. \\ \left. (1-\zeta) \cdot \left(\mu + \frac{1}{1-\eta} E_p[\boldsymbol{\sigma}] \right) \right\}; \\ \text{s.t. } \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) - \mathbf{e}\mu \leq \boldsymbol{\sigma}, \forall \omega_q \in \Omega, \boldsymbol{\sigma} \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

由于式(20)关于 μ 是凸的,关于 $\mathbf{p}(\omega_i) \in \mathbf{p}$ 是凹的,且 \wp 为紧集,具有强 max-min 性质^[17-18]. 交换 $\sup_{\mathbf{p} \in \wp}$ 和 $\min_{\mu \in \mathbf{R}^+}$ 所得问题与原问题仍等价,即

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{p} \in \wp} \min_{\mu \in \mathbf{R}^+} \left\{ \zeta \cdot E_p[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] + \right. \\ \left. (1-\zeta) \cdot \left(\mu + \frac{1}{1-\eta} E_p[\boldsymbol{\sigma}] \right) \right\} = \\ \min_{\mu \in \mathbf{R}^+} \{(1-\zeta) \cdot \mu\} + \\ \max_{\mathbf{p} \in \wp} \left\{ E_p \left[\zeta \cdot Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) + \frac{1-\zeta}{1-\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

3 模型线性化

前文所提出模型的部分约束(式(8)、(10))和目标函数(式(21))仍为非线性,为了利用优化软件(如 GUROBI、CPLEX)直接求解,对非线性约束和目标函数分别进行线性化处理.

3.1 约束线性化

借助 Bemporad 等^[19]提出的方法对式(8)进行等价转化. 令 $m = P_{k,i}^{\text{wait}}(\omega_q)$, $n = C_{\max} - P_{k,i-1}^{\text{on}}(\omega_q) + P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q)$, $f = n - m$, 则式(8)可转化为 $P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q) = \min\{m, n\}$. 定义

$$\delta = \begin{cases} 1, & f \leq 0; \\ 0, & f > 0. \end{cases} \quad (22)$$

则有 $P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q) = \min\{m, n\} = m + (n - m)\delta = m + f\delta$. 记 $z = f\delta$, 式(8)等价于如下线性约束:

$$\begin{cases} f \leq f_{\max}(1 - \delta), \\ f \geq \varrho + (f_{\min} - \varrho)\delta, \\ z \leq f_{\max}\delta, \\ z \geq f_{\min}\delta, \\ z \leq f - f_{\min}(1 - \delta), \\ z \geq f - f_{\max}(1 - \delta). \end{cases} \quad (23)$$

其中: $f_{\max} = C_{\max}$, $f_{\min} = -P_{\max}^{\text{wait}}$, P_{\max}^{wait} 为等待人数的最大值, ϱ 为一个极小的误差值. 此外,约束(10)可转化为如下线性约束:

$$\begin{cases} t_{k,i}^{\text{dwell}} \geq \theta_1 \cdot P_{k,i}^{\text{board}}(\omega_q) + r_0, \\ \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}, \omega_q \in \Omega; \\ t_{k,i}^{\text{dwell}} \geq \theta_2 \cdot P_{k,i}^{\text{alight}}(\omega_q) + r_0, \\ \forall k \in \mathbf{K}, i \in \mathbf{I}, \omega_q \in \Omega. \end{cases} \quad (24)$$

3.2 目标线性化

进行分布鲁棒优化的关键在于获得易于计算的鲁棒对应模型,这通常取决于不确定参数所隶属的模糊集. 本文设计如下场景发生概率分布模糊集^[20]:

$$\wp = \{\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\infty \leq \psi\}. \quad (25)$$

其中: \mathbf{p}_0 为 N 个场景最可能的概率分布, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为波动向量, \mathbf{e} 为单位向量, ψ 为介于 0 与 1 之间的一个实数, $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{e} \cdot \psi$.

命题1 基于所建模糊集 \wp , 目标函数(式(12))可等价转化为如下线性形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}, \mu, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\kappa}', \boldsymbol{\gamma}'} (1-\zeta) \cdot \mu + \zeta \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))^T \mathbf{p}_0 + \\ \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1-\zeta}{1-\eta} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\kappa}' + \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\gamma}'); \\ \text{s.t. } \mathbf{e}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)), \\ \mathbf{e}\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\kappa}' + \boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q)) - \mathbf{e}\mu \leq \boldsymbol{\sigma}, \\ \forall \omega_q \in \Omega, \boldsymbol{\sigma} \geq 0, \boldsymbol{\kappa} \geq 0, \boldsymbol{\gamma} \geq 0, \boldsymbol{\kappa}' \geq 0, \boldsymbol{\gamma}' \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

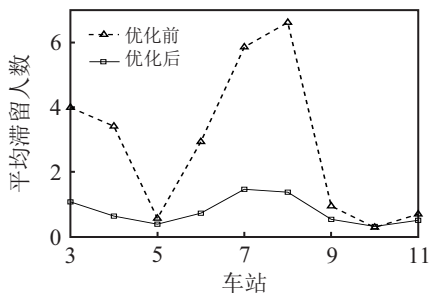
其中 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\kappa}', \boldsymbol{\gamma}' \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 为辅助变量或辅助向量.

证明 有

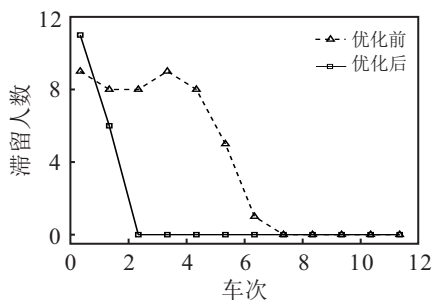
$$\min_{\mathbf{v}} \sup_{\mathbf{p} \in \wp} \{\zeta \cdot E_p[Q(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}(\omega_q))] +$$

解以最小化各场景下的滞留人数.

优化前后乘客滞留均主要分布在车站3~车站11之间,因此对这些车站的滞留情况进行详细分析.如图3(a)所示,在该组实验中,场景1优化后多数车站的平均滞留人数显著降低,优化时段内各车站的平均滞留人数均降低到2人以下.如图3(b)所示,场景4中优化后车次1于车站8的滞留人数虽略有提升,但后续车辆滞留人数相对优化前均呈大幅下降趋势,且车次3及之后所有车辆均能服务所有等待乘客.可见,所提出方法能够有效降低公交站台上的滞留人数,提高公交运营的安全性.



(a) 场景1优化前后平均滞留人数对比



(b) 场景4车站8优化前后平均滞留人数对比

图3 优化前后模型对比

为探究参数 ζ 和 ψ 不同组合下DRO模型最优目标值的变化情况,并进一步分析DRO模型与经典鲁棒(RO)模型的优劣,进行相应的数值实验,结果如图4所示.由于RO模型针对最坏情况进行优化,不涉及条件风险,其目标函数值与 ζ 和 ψ 无关. DRO模型的目标函数值随着 ζ 的增大呈下降趋势,且随 ψ 的增大呈上升趋势.这是因为 ζ 反应决策者的风险偏好, ζ 越大表明决策者越倾向于风险爱好,得到解的质量就会越好;而 ψ 代表不确定量的波动程度, ψ 越大表明对场景分布已知信息越不充足,解的质量也会越差.从图中还可以看出,无论 ζ 和 ψ 取值如何,DRO模型的结果都要优于RO模型.这是因为经典鲁棒优化方法是针对最坏情况进行优化,以确保可以得到即使在最坏情况下仍有效的策略,所以优化结果过于保守.而DRO模型能够充分利用概率分布的部分已知信息,得到相对更优的鲁棒策略.

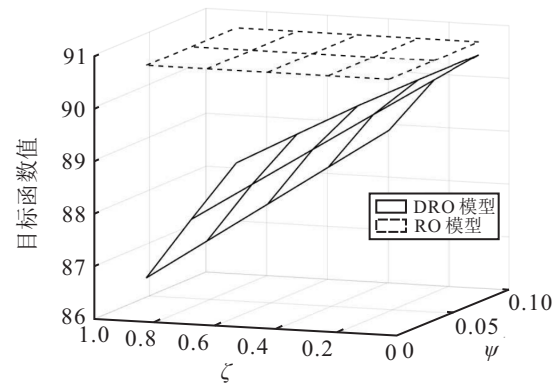


图4 不同 ζ 和 ψ 取值组合下目标函数的变化情况

为验证所提出公交时刻表分布鲁棒优化方法的实用性,将DRO模型的性能与随机规划(SO)模型进行对比.本组实验中,设置参数分别为 $\eta = \{0.05, 0.95\}$ 、 $\zeta = \{0.10, 0.50, 0.90\}$ 和 $\psi = \{0, 0.10\}$.所得实验结果如表3所示.表3中:DRO*和SO*分别代表DRO模型和SO模型的最优值,定义Price = $(DRO^* - SO^*)/SO^* \times 100\%$,代表目标函数值的损失率.

表3 DRO模型和SO模型最优值的对比

风险特性系数 η	权重系数 ζ	SO*	DRO*	Price/%
0.95	0.10	90.25	90.445	0.216
	0.50	88.385	89.358	1.100
	0.90	86.446	88.182	2.008
0.05	0.10	86.311	88.327	2.336
	0.50	86.115	88.09	2.293
	0.90	85.919	87.853	2.250

由表3可见,在相同参数设置下,SO模型的最优值优于DRO模型.这表明若决策者能获取精确的场景发生概率分布信息,则能够得到更加优良的时刻表调整策略.但在现实中,提前已知全部分布信息显然是不可能的.此外,相较于SO模型,DRO模型的目标值损失率小于2.4%,即所提出分布鲁棒方法通过付出很小的代价便能同时应对客流需求和场景发生概率分布的双重不确定性.换言之,DRO模型的鲁棒性远远优于SO模型.

为探究权重系数 ζ 对服务质量与鲁棒性的影响,设置参数 $\psi = 0.1$, ζ 在 $[0.1, 0.9]$ 区间内变化.实验结果如图5所示,随着权重系数 ζ 的增大,滞留人数的期望值减小而服务鲁棒性变差.这是因为 ζ 越大,决策者将越高的权值给予滞留人数的期望值,使该部分的优化情况在决策中起越为主要的的作用.

当 N 个场景最可能的概率分布发生变化,即当真实分布与优化中使用的分布之间存在偏差时,通

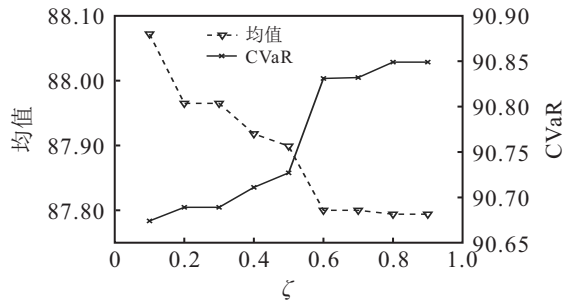


图5 不同参数下滞留人数的期望值与CVaR对比

过样本外实验对DRO和SO模型的表现进行对比分析. 参照Wang等^[22]所提出的样本外实验测试方法,

随机产生10、30和50组分布数据,实验结果如表4所示. 表4中: $Dif = \frac{DRO - SO}{SO} \times 100$,代表各指标的变化率;“↓”代表所建DRO模型相较于SO模型有所提升,“↑”代表SO模型在该指标上优于DRO模型. 可以看出,DRO模型的极差始终不大于SO模型,且该指标的提升率(Dif)随样本外数据规模的扩大而增加,这表明DRO模型的最优值波动范围较小,抗干扰能力较强;此外,相较于SO模型,DRO模型的标准差较小,进一步表明DRO模型最优值的波动更小,鲁棒性更强.上述性能的提升仅需要平均最优值付出不超过0.27%的代价即可实现.

表4 样本外实验结果对比

	N = 10			N = 30			N = 50		
	SO	DRO	Dif/%	SO	DRO	Dif/%	SO	DRO	Dif/%
平均值	88.2865	88.4962	0.2375↑	88.3339	88.5644	0.2602↑	88.2453	88.4524	0.2347↑
极差	1.4967	1.4967	0	3.2323	3.1546	2.4039↓	3.3338	3.1981	4.0704↓
标准差	0.4447	0.4378	1.5516↓	0.7219	0.7201	0.2493↓	0.7465	0.7277	2.5178↓

4.3 管理建议

第4.2节以北京市特9外交线路为背景进行了数值实验. 基于实验结果,提出以下管理建议:当决策需要极度规避风险时,可以使用传统鲁棒优化方法进行优化以获得最为可靠的时刻表;否则,建议决策者根据实际需求灵活选取适当的参数组合,并采用分布鲁棒优化方法获取该参数设置下的最优时刻表,从而得到更加满足运营需求的策略;实际问题中,需要决策者在设定初始参数后,根据实际运行情况的反馈对其进行合理调整,尝试不同参数组合以找到更符合实际情况的各参数取值.

5 结论

本文针对客流需求和场景发生概率分布的双重不确定性,构建了基于均值-CVaR准则的公交时刻表分布鲁棒优化模型. 在不确定量模糊集的基础上,利用对偶理论,获得了易于计算的等价混合整数线性规划模型. 最后,将该方法应用到北京特9外交线路中,结果表明:

1) 所建DRO模型的等价混合整数线性规划形式数学性质良好,能够通过现有优化软件在短时间进行有效求解,并得到最优的时刻表调整方案.

2) 场景发生概率波动参数 ψ 和权重系数 ζ 的变化均会对决策产生影响,即目标值随着场景发生概率分布不确定性的增大而增大,随权重系数的增大而减小;滞留人数的期望值与服务鲁棒性为互斥关系,公交运营商需要根据实际情况选取权重系数,从而得到

更加贴近于实际运营需求的时刻表.

3) 与鲁棒模型相比,所构建的分布鲁棒模型能够有效避免产生过于保守的优化结果,显著提升服务质量,对实际运营具有一定的指导意义.

4) 相较于随机规划方法,所提出的公交时刻表分布鲁棒优化方法能够更好地规避不确定性带来的风险,使服务鲁棒性更强. 依据所提出方法,决策者付出很小的代价即可有效应对双重不确定性.

参考文献(References)

[1] 黄青霞, 贾斌, 强生杰, 等. 基于驻站和限流的组合公交控制策略研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2018, 18(4): 103-109.
(Huang Q X, Jia B, Qiang S J, et al. Integrated bus control strategy considering holding and limited-boarding[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2018, 18(4): 103-109.)

[2] 胡宝雨, 庞钰, 裴玉龙. 适应时空不均衡客流的多车型公交时刻表优化[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2020, 48(11): 38-48.
(Hu B Y, Pang Y, Pei Y L. Multi-type bus timetable optimization considering unbalanced passenger flow in time and space[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2020, 48(11): 38-48.)

[3] 郭戎格, 关伟, 张文义, 等. 考虑多路径选择的定制电动公交线路优化[J]. 交通运输系统工程与信息, 2021, 21(2): 133-138.
(Guo R G, Guan W, Zhang W Y, et al. Customized electric bus routing optimization considering multi-path selection[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2021,

- 21(2): 133-138.)
- [4] Zhang W Y, Xia D Y, Liu T, et al. Optimization of single-line bus timetables considering time-dependent travel times: A case study of Beijing, China[J]. Computers & Industrial Engineering, 2021, 158: 107444.
- [5] 魏旭. 基于鲁棒优化的公交动态发车优化方法[D]. 沈阳: 东北大学, 2017.
(Wei X. Dynamic bus dispatching based on robust optimization[D]. Shenyang: Northeastern University, 2017.)
- [6] Gkiotsalitis K, Alesiani F. Robust timetable optimization for bus lines subject to resource and regulatory constraints[J]. Transportation Research—Part E: Logistics and Transportation Review, 2019, 128: 30-51.
- [7] Du H J, Ma H G, Li X. Fuzzy Bi-objective chance-constrained programming model for timetable optimization of a bus route[C]. Advances in Computational Intelligence Systems, Cham: Springer, 2017: 312-324.
- [8] Yang K, Lu Y H, Yang L X, et al. Distributionally robust last-train coordination planning problem with dwell time adjustment strategy[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 91: 1154-1174.
- [9] 邱若臻, 黄小原, 苑红涛. 需求分布不确定条件下的多周期库存鲁棒优化模型[J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1644-1648.
(Qiu R Z, Huang X Y, Yuan H T. Robust optimization model of multi-period inventory with uncertain demand distribution[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1644-1648.)
- [10] 李军, 周建力. 考虑复杂约束的鲁棒均值-CVaR投资组合模型及粒子群算法[J]. 控制与决策, 2016, 31(12): 2219-2224.
(Li J, Zhou J L. Robust mean-CVaR portfolio selection model with complicated realistic constraints and its improved particle swarm optimization algorithm[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2219-2224.)
- [11] 孙传姣, 周伟, 王元庆. 快速公交车辆调度组合及发车间隔优化研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2008, 8(5): 61-67.
(Sun C J, Zhou W, Wang Y Q. Scheduling combination and headway optimization of bus rapid transit[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2008, 8(5): 61-67.)
- [12] Ibarra-Rojas O J, Rios-Solis Y A. Synchronization of bus timetabling[J]. Transportation Research—Part B: Methodological, 2012, 46(5): 599-614.
- [13] Dell’Olio L, Ibeas A, Ruisánchez F. Optimizing bus-size and headway in transit networks[J]. Transportation, 2012, 39(2): 449-464.
- [14] Ceder A. Public transit planning and operation[M]. Boca Raton: CRC Press, 2016: 75-97.
- [15] 邱若臻, 苑红涛, 黄小原. 基于似然估计的零售商库存鲁棒均值-风险模型[J]. 中国管理科学, 2016, 24(8): 123-131.
(Qiu R Z, Yuan H T, Huang X Y. Robust Mean-risk model for retailer inventory problem based on likelihood estimation[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(8): 123-131.)
- [16] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. The Journal of Risk, 2000, 2(3): 21-41.
- [17] Zhu S S, Fukushima M. Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management[J]. Operations Research, 2009, 57(5): 1155-1168.
- [18] Scott D W. Multivariate density estimation[M]. Hoboken: Wiley, 2015: 232-244.
- [19] Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints[J]. Automatica, 1999, 35(3): 407-427.
- [20] Rahimian H, Mehrotra S. Distributionally robust optimization: A review[J/OL]. 2019, arXiv: 1908.05659.
- [21] Huang R P, Qu S J, Gong Z W, et al. Data-driven two-stage distributionally robust optimization with risk aversion[J]. Applied Soft Computing, 2020, 87: 105978.
- [22] Wang S M, Chen Z, Liu T Q. Distributionally robust hub location[J]. Transportation Science, 2020, 54(5): 1189-1210.

作者简介

夏东阳(1997—), 男, 博士生, 从事城市交通运营管理的研究, E-mail: 20114020@bjtu.edu.cn;

马继辉(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事城市公共交通运营管理与智能交通系统等研究, E-mail: jhma@bjtu.edu.cn;

张文义(1985—), 男, 副教授, 博士, 从事航空与城市交通运输系统管理等研究, E-mail: wyzhang@bjtu.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)