

# 控制与决策

Control and Decision

基于事件触发和状态翻转的布尔控制网络输出跟踪

徐勇, 朱万里, 李杰

引用本文:

徐勇,朱万里,李杰. 基于事件触发和状态翻转的布尔控制网络输出跟踪[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1258–1266.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0462>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

[丢包扰动环境下基于强化学习的最优输出调节](#)

Optimal output regulation based on reinforcement learning for systems with dropouts and disturbances

*控制与决策*. 2023, 38(2): 403–412 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1147>

[基于矩阵半张量积的有限值动态系统的最新进展](#)

Recent developments of finite-valued dynamic systems based on semi-tensor product of matrices

*控制与决策*. 2022, 37(2): 267–277 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1596>

[布尔控制网络的集成集可控](#)

Ensemble set controllability of Boolean control networks

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2187–2194 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1837>

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

*控制与决策*. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

[输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化](#)

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

# 基于事件触发和状态翻转的布尔控制网络输出跟踪

徐勇<sup>1†</sup>, 朱万里<sup>1</sup>, 李杰<sup>2</sup>

(1. 河北工业大学 理学院, 天津 300401; 2. 河北工业大学 经济管理学院, 天津 300401)

**摘要:** 利用矩阵半张量积研究事件触发和翻转控制共同作用下布尔控制网络的输出跟踪问题. 首先, 基于布尔控制网络代数状态空间表示, 构造增广系统将输出跟踪问题转化为状态集镇定问题; 其次, 得到布尔控制网络在两种控制下输出跟踪问题有解的充要条件, 并在满足该条件时提出一种基于最小翻转节点集时间最优控制设计方法, 进一步给出有限时间内寻找翻转节点集的计算过程; 最后, 给出一个算例说明结果的可行性.

**关键词:** 布尔控制网络; 矩阵半张量积; 输出跟踪; 翻转控制; 事件触发控制; 节点扰动集

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0462

引用格式: 徐勇, 朱万里, 李杰. 基于事件触发和状态翻转的布尔控制网络输出跟踪[J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1258-1266.

## Output tracking of Boolean control networks based on event-triggered and state-flipped

XU Yong<sup>1†</sup>, ZHU Wan-li<sup>1</sup>, LI Jie<sup>2</sup>

(1. School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China; 2. School of Economics and Management, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

**Abstract:** The output tracking problem of the Boolean control networks is studied under the combined action of event-triggered and flipped control by using the semi-tensor product of matrices. Firstly, based on the algebraic state-space representation of the Boolean control networks, an augmented system is constructed to transform the output tracking problem into a state set stabilization problem. Secondly, a necessary and sufficient condition is obtained for the solvability of the output tracking problem under two kinds of controls. Based on the minimum flipped node set, when this condition is satisfied, a design method of time-optimal control is proposed. The calculation process of the flipping node set in finite time is further given. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed results.

**Keywords:** Boolean control networks; semi-tensor product of matrices; output tracking; flip control; event-triggered control; node disturbance set

## 0 引言

布尔网络是描述基因调控动态的模型<sup>[1]</sup>, 基因在活跃状态时对应布尔网络的逻辑值表达为1, 不活跃时逻辑值表达为0, 每个基因节点按照逻辑函数更新. 布尔网络结构简单, 备受广大学者的关注. 在布尔网络中引入外部输入, 则称为布尔控制网络.

最近, Qi等<sup>[2]</sup>提出的矩阵半张量积为分析布尔网络和布尔控制网络提供了一种新方法, 其原理是将矩阵普通乘积一般化到任意维数矩阵乘积, 从而将逻辑系统转化为代数系统, 一些控制理论得以适用. 利用矩阵半张量积, 已得到许多关于布尔网络和布尔控制网络的优秀成果, 如稳定性<sup>[3-4]</sup>、同步<sup>[5-6]</sup>、可控

性<sup>[7-8]</sup>、函数扰动<sup>[9-10]</sup>、干扰解耦<sup>[11-12]</sup>等问题. 此外, 矩阵半张量积也在其他方面(如网络演化博弈<sup>[13]</sup>)有着重要作用.

输出跟踪问题作为控制论的基本问题之一, 其目的是通过操控一个系统使其输出跟踪另外一个系统的输出. 文献[14]通过一个等式考虑布尔控制网络的输出跟踪问题, 但是由于等式依赖于未知的状态反馈矩阵且维数较大, 计算难度较高; 文献[15]从集能控的角度对布尔控制网络的输出跟踪问题重新进行了研究, 并提供了自由控制序列设计算法. 从实际问题考虑, 系统进行更新的逻辑规则可能不确定, 文献[16]研究了切换布尔控制网络的输出跟踪问题,

收稿日期: 2022-03-23; 录用日期: 2022-07-06.

基金项目: 河北省自然科学基金项目(F2021202032); 2021河北省研究生示范课项目(KCJSX2021014).

责任编辑: 杨涛.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: xuyong@hebut.edu.cn.

给出了任意切换信号下依赖于信号的状态反馈和输出反馈控制设计. 此外, 当按照一定概率选择更新规则时, 文献[17]研究了概率布尔控制网络的渐近输出跟踪问题, 考虑了系统能否以概率1实现渐近输出跟踪. 为了节省控制成本和控制时间, 文献[18-19]利用事件触发状态反馈控制分别研究了有时滞和无时滞布尔控制网络的输出跟踪问题.

利用不同的控制如状态反馈控制、牵制控制、事件触发控制和采样控制等研究布尔控制网络的各种问题是此类控制论的核心层面, 许多优秀的成果围绕以上几类控制展开讨论. 最近, Rafimanzelat 等<sup>[20-21]</sup>提出的翻转控制作为一种新型控制, 对节点干预程度较低, 其原理是在特定时刻对一些节点取反, 从而改变系统演化过程, 以达到某种目的. 文献[20]通过在布尔网络的非目标吸引子处实行1次翻转控制, 研究吸引子能控性问题; 文献[21]利用翻转控制研究了布尔网络的吸引子稳定性, 并应用于实际生物分析调控模型; 文献[22]对布尔控制网络进行研究, 在状态反馈控制无法满足系统要求时利用翻转控制辅助, 基于此分别研究了布尔控制网络能控性和镇定性问题; 文献[23]研究了切换布尔控制网络的镇定和集镇定问题. 这些文献所考虑翻转控制次数均只有1次, 这也意味着目标点必须是原控制下的不动点或者目标集在原控制下的不变子集非空. 文献[24]研究了布尔控制网络多次翻转控制的弱稳定问题. 现有结果表明, 翻转控制还没有在输出跟踪问题上得到研究.

本文在事件触发控制下考虑翻转控制辅助布尔控制网络输出跟踪问题, 所考虑的翻转控制次数只有1次. 相比于文献[22-23]在初始时刻实行翻转控制, 本文系统状态可演化一段时间后触发翻转控制, 得到的最小节点扰动集是前者最小节点扰动集的子集, 同时考虑事件触发控制, 两者都可节省控制成本.

本文的主要创新如下: 1) 基于矩阵半张量积理论, 提出一种新的翻转时刻定义方式, 得到的最小节点扰动集不超过初始时刻翻转的节点扰动集, 给出事件触发和翻转控制下布尔控制网络输出跟踪有解的充要条件; 2) 提出具体控制设计方法, 使得系统从部分或全部状态出发输出跟踪有解所需时间最优, 进一步限制系统输出跟踪有解时间时寻得节点扰动集.

## 1 基础知识

这里介绍一些基本符号和基础概念.

### 1.1 矩阵半张量积

1)  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{D}^n := \underbrace{\mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}}_n$ ;

2)  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{N}$  和  $\mathbf{Z}_+$  分别为实数集、自然数集和正整数集;

3)  $\mathcal{M}_{m \times n}$  为  $m \times n$  维矩阵集;

4)  $\mathcal{B}_{m \times n}$  为  $m \times n$  维布尔矩阵集;

5)  $\delta_n^i$  为  $n$  阶单位矩阵的第  $i$  列,  $\Delta_n$  为  $n$  阶单位矩阵的列的集合;

6)  $\mathcal{L}_{m \times n}$  为  $m \times n$  维逻辑矩阵集, 若  $L \in \mathcal{L}_{m \times n}$ , 则  $L = [\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_n}]$  可简写为  $L = \delta_m [i_1, i_2, \dots, i_n]$ ;

7)  $A_{i,j}$  为矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列个元素;

8)  $\text{Row}(A)$  ( $\text{Col}(A)$ ) 为矩阵  $A$  的行 (列) 集合,  $\text{Row}_i(A)$  ( $\text{Col}_i(A)$ ) 为矩阵  $A$  的第  $i$  行 (列);

9)  $M +_{\mathcal{B}} N = A$  为  $M, N \in \mathcal{B}_{m \times n}$  的布尔和, 其中  $a_{i,j} = m_{i,j} \vee n_{i,j}$ ;

10)  $M \times_{\mathcal{B}} N = A$  为  $M \in \mathcal{B}_{r \times s}$  与  $N \in \mathcal{B}_{s \times t}$  的布尔乘积, 其中  $a_{i,j} = \sum_{\mathcal{B}, k=1}^s m_{i,k} \wedge n_{k,j}$ ;

11)  $\mathbf{1}_k = \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_k^T$ ;

12)  $|V|$  为集合  $V$  中元素的个数;

13)  $\text{Blk}_j(L)$  为矩阵  $L \in \mathcal{L}_{n \times nm}$  的第  $j$  个  $n \times n$  等块;

14)  $[l, k]$  为集合  $\{l, l+1, \dots, k\}$ ;

15)  $\mathcal{P}_E$  为集合  $E$  的幂集.

**定义1**<sup>[2]</sup> 给定两个矩阵  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$ ,  $A$  与  $B$  的 (左) 半张量积记成  $A \times B$ , 定义为

$$A \times B := (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}),$$

其中  $t = \text{lcm}\{n, p\}$  是  $\{n, p\}$  的最小公倍数.

用逻辑向量  $\delta_2^1$  和  $\delta_2^0$  分别表示逻辑值1和0, 意味着  $\Delta \sim \mathcal{D}$ , 其中  $\Delta \sim \mathcal{D}$  表示  $\Delta$  与  $\mathcal{D}$  等价. 本文中的乘积如果没有特殊说明均是半张量积  $\times$ , 可省略不写.

**引理1**<sup>[2]</sup> 设  $f: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ , 则存在唯一的逻辑矩阵  $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ , 使在向量形式下

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_f \times_{i=1}^n x_i,$$

这里  $M_f$  称为  $f$  的结构矩阵.

### 1.2 翻转矩阵

假设布尔控制网络有  $n$  个节点  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 令  $E$  代表节点集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的一个子集, 如果集合  $E$  表示布尔控制网络中需要翻转的节点集, 则称集合  $E$  为节点扰动集. 下面将具体介绍翻转机制, 包括翻转函数、翻转矩阵和联合翻转矩阵.

**定义2**<sup>[20]</sup> 令  $E = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_e}\}$  表示具有  $n$  个节点布尔控制网络的扰动集, 对于给定  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n$ , 定义依赖于  $E$  的翻转函数

$f_E^\dagger(E, X)$ :

$$f_E^\dagger(E, X) = \overline{X}_E = (x_1, \dots, \overline{x}_{i_1}, \dots, \overline{x}_{i_e}, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n.$$

即  $X$  的第  $i_1, i_2, \dots, i_e$  个节点需要翻转, 满足  $\overline{x}_{i_j} = \neg x_{i_j}, j \in [1, e]$ .

**定义3**<sup>[20]</sup> 令  $E = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_e}\}$  表示具有  $n$  个节点布尔控制网络的扰动集, 定义依赖于  $E$  的翻转矩阵  $f_E \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ :

$$\text{Col}_j(f_E) = \delta_{2^n}^i, j = [1, 2^n],$$

$$\text{if } x \sim \delta_{2^n}^j \xrightarrow{f_E^\dagger} \overline{x}_E \sim \delta_{2^n}^i.$$

由定义3可以看出, 对于任意的状态  $x \in \Delta_{2^n}(x \sim X, \overline{x} \sim \overline{X})$ , 其在节点扰动集  $E$  下翻转得到的状态可以用  $\overline{x}_E = f_E x$  表示. 当节点扰动集  $E$  为空集时

$$\overline{x}_E = f_E x = I_{2^n} x = x,$$

即状态  $x$  在空集下翻转得到的状态仍是其本身.

**定义4**<sup>[20]</sup> 令  $E = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_e}\}$  表示具有  $n$  个节点的布尔控制网络的扰动集, 定义依赖于  $E$  的联合翻转矩阵  $\mathcal{F}_E \in \mathcal{B}_{2^n \times 2^n}$ :

$$(\mathcal{F}_E)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{存在 } W \in \mathcal{P}_E, \text{ 使 } (f_W)_{i,j} = 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据上式可以得到, 如果存在  $\mathcal{P}_E$  的一个元素  $W$ , 使得  $(f_W)_{i,j} = 1$ , 则  $(\mathcal{F}_E)_{i,j} = 1$ , 于是

$$\mathcal{F}_E = \sum_{W \in \mathcal{P}_E} f_W.$$

对于任意两个不同集合  $W_1, W_2 \in \mathcal{P}_E$ , 由定义2可知  $f_{W_1}^\dagger \neq f_{W_2}^\dagger$ , 则  $\text{Col}_j(f_{W_1}) \neq \text{Col}_j(f_{W_2})$ , 进一步可得  $\overline{x}_{W_1} \neq \overline{x}_{W_2}$ . 这说明由于节点扰动集不同,  $x$  所对应联合转移矩阵的列中任意位置出现1的次数最多为1, 因此  $\mathcal{F}_E$  是布尔矩阵.

### 1.3 布尔控制网络

考虑布尔控制网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (1)$$

当控制不触发时, 系统(1)变为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \overline{f}_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2(t+1) = \overline{f}_2(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = \overline{f}_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathcal{D}^n, U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathcal{D}^m, Y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathcal{D}^p$  分别是系统(1)的状态、控制输入和输出;  $f_i : \mathcal{D}^{n+m} \mapsto \mathcal{D}, \overline{f}_i : \mathcal{D}^n \mapsto \mathcal{D}, i \in [1, n]$ , 以及  $h_j : \mathcal{D}^n \mapsto \mathcal{D}, j \in [1, p]$ , 是布尔函数.

给定参考信号

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t+1) = \hat{f}_1(\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)), \\ \hat{x}_2(t+1) = \hat{f}_2(\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)), \\ \vdots \\ \hat{x}_{n_1}(t+1) = \hat{f}_{n_1}(\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)), \\ \hat{y}_j(t) = \hat{h}_j(\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\hat{X}(t) = (\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)) \in \mathcal{D}^{n_1}, \hat{Y}(t) = (\hat{y}_1(t), \dots, \hat{y}_p(t)) \in \mathcal{D}^p$  分别是系统(3)的状态和输出;  $\hat{f}_i : \mathcal{D}^{n_1} \mapsto \mathcal{D}, i \in [1, n_1]$ , 以及  $\hat{h}_j : \mathcal{D}^{n_1} \mapsto \mathcal{D}, j \in [1, p]$ , 是布尔函数.

假定  $\{U(t) : t \in \mathbf{N}\}$  表示系统(1)的间歇控制序列, 则  $X(t; X(0), U(t))$  表示系统(1)从初始状态  $X(0) \in \mathcal{D}^n$  出发的状态轨迹,  $Y(t; X(0), U(t))$  表示系统(1)从初始状态  $X(0) \in \mathcal{D}^n$  出发的输出轨迹, 其中控制不触发时按照系统(2)演化. 类似地,  $\hat{X}(t; \hat{X}(0))$  表示系统(3)从初始状态  $\hat{X}(0) \in \mathcal{D}^{n_1}$  出发的状态轨迹,  $\hat{Y}(t; \hat{X}(0))$  表示系统(3)从初始状态  $\hat{X}(0) \in \mathcal{D}^{n_1}$  出发的输出轨迹.

本文前部分研究的输出跟踪问题为确定是否存在触发集  $\Lambda$ , 以及在该集合下的一个事件触发状态反馈控制, 形如

$$\begin{cases} u_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)), \\ \vdots \\ u_m(t) = g_m(x_1(t), \dots, x_n(t), \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n_1}(t)). \end{cases} \quad (4)$$

其中布尔函数  $g_i : \mathcal{D}^{n+n_1} \mapsto \mathcal{D}, i \in [1, m]$ , 以及正整数  $\tau$ , 使得对于任意的  $X(0) \in \mathcal{D}^n, \hat{X}(0) \in \mathcal{D}^{n_1}$ , 当  $t \geq \tau$  时, 有

$$Y(t; X(0), U(t)) = \hat{Y}(t; \hat{X}(0)).$$

后部分研究则是当前者不成立时, 引入翻转控制考虑输出跟踪问题.

利用布尔值的逻辑向量形式, 并且令  $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_{2^n}, u(t) = \times_{i=1}^m u_i(t) \in \Delta_{2^m}, y(t) = \times_{i=1}^p y_i(t) \in \Delta_{2^p}$ . 通过引理1可以得到  $f_i, h_j$  和  $\bar{f}_i$  的结构矩阵, 进一步可以分别将系统(1)和(2)转化为代数形式

$$\begin{cases} x(t+1) = Lu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t); \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \bar{L}x(t), \\ y(t) = Hx(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}, H \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}, \bar{L} \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ .

同理, 令  $\hat{x}(t) = \times_{i=1}^{n_1} \hat{x}_i(t), \hat{y}(t) = \times_{i=1}^{p_1} \hat{y}_i(t)$ , 可以分别得到系统(3)和控制(4)的代数形式

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \hat{L}\hat{x}(t), \\ \hat{y}(t) = \hat{H}\hat{x}(t); \end{cases} \quad (7)$$

$$u(t) = Gx(t)\hat{x}(t). \quad (8)$$

其中:  $\hat{L} \in \mathcal{L}_{2^{n_1} \times 2^{n_1}}, \hat{H} \in \mathcal{L}_{2^{p_1} \times 2^{n_1}}, G \in \mathcal{L}_{2^m \times 2^{n+n_1}}$ .

## 2 主要结果

### 2.1 问题描述

由1.3节, 本文前部分的输出跟踪问题转化为确定一个状态触发集  $\Lambda$  并设计状态反馈矩阵  $G \in \mathcal{L}_{2^m \times 2^{n+n_1}}$ . 后部分是在事件触发控制下输出跟踪问题无解, 即不存在一个状态触发集和状态反馈矩阵, 使得输出跟踪问题有解, 进而引入翻转控制考虑输出跟踪问题. 求得最小节点扰动集, 确定两个状态集, 一个触发原控制, 另一个触发翻转控制, 并对两个触发集分别设计状态反馈矩阵和具体翻转节点集, 使得系统(1)在最小节点扰动集的前提下, 从部分或全部状态出发, 输出跟踪参考信号(3)所需时间最优. 进一步, 限制输出跟踪问题有解时间且求得节点扰动集, 并给出相应的控制设计.

令  $z(t) = x(t)\hat{x}(t), s(t) = y(t)\hat{y}(t)$ , 则系统(5)~(7)转化为

$$\begin{cases} z(t+1) = \tilde{L}_{z(t)}z(t), \\ s(t) = \tilde{H}z(t). \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\tilde{L}_{z(t)} = \begin{cases} L_1, & z(t) \notin \Lambda; \\ L_2u(t), & z(t) \in \Lambda. \end{cases}$$

$$u(t) = Gz(t).$$

$$L_1 = \bar{L}(I_{2^n} \otimes \hat{L}) \in \mathcal{L}_{2^{n+n_1} \times 2^{n+n_1}}.$$

$$L_2 = L(I_{2^{n+m}} \otimes \hat{L}) \in \mathcal{L}_{2^{n+n_1} \times 2^{n+n_1+m}}.$$

$$\tilde{H} = H(I_{2^n} \otimes \hat{H}) \in \mathcal{L}_{2^{2p} \times 2^{n+n_1}}.$$

定义集合

$$V = \{\delta_{2^{n+n_1}}^j : \text{Col}_j(\tilde{H}) = \delta_{2^{2p}}^{(i-1)2^p+i}, i \in [1, 2^p]\}. \quad (10)$$

由集合  $V$  定义可知, 输出跟踪问题可转换为系统(9)的状态能否集镇定到集合  $V$  中. 下面考虑集合  $V$  在系统(9)下的最大事件触发控制不变子集, 用  $I_c(V)$  表示. 令  $M = \sum_{\mathcal{B}, j=1}^{2^m} L_2\delta_{2^m}^j, F = L_1 + \mathcal{B}M$ .

**注1** 集合  $V$  在系统(9)下的任何两个事件触发控制不变子集的并集仍是事件触发控制不变子集, 所有事件触发控制不变子集的并集称之为最大事件触发控制不变子集.

给定矩阵  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  和由逻辑向量组成的集合  $W = \{\delta_{2^n}^{i_1}, \delta_{2^n}^{i_2}, \dots, \delta_{2^n}^{i_q}\}$ . 其中:  $i_1 < i_2 < \dots < i_q, n \geq q$ . 定义

$$A|_V = \begin{bmatrix} A_{i_1, i_1} & A_{i_1, i_2} & \dots & A_{i_1, i_q} \\ A_{i_2, i_1} & A_{i_2, i_2} & \dots & A_{i_2, i_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_q, i_1} & A_{i_q, i_2} & \dots & A_{i_q, i_q} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q \times q}.$$

**命题1** 集合  $I_c(V)$  是集合  $V$  在系统(9)下的最大事件触发控制不变子集, 当且仅当:

- 1)  $\sum_{i \in [1, w]} \text{Row}_i(F|_{I_c(V)}) = \mathbf{1}_w$ , 其中  $|I_c(V)| = w$ ;
- 2) 对于任意满足  $I_c(V) \subsetneq I'_c(V) \subseteq V$  的集合  $I'_c(V)$ , 当  $w \neq w'$  时, 有  $\sum_{i \in [1, w']} \text{Row}_i(F|_{I'_c(V)}) \neq \mathbf{1}_{w'}$ ,

其中  $|I'_c(V)| = w'$ .

**证明** 充分性. 如果条件1)成立, 即对于任意  $\delta_w^i$ , 必存在  $j \in [1, w]$ , 有  $(F|_{I_c(V)})_{j,i} \neq 0$ . 由  $F|_{I_c(V)}$  的构造可知, 对于任意  $\delta_{2^{n+n_1}}^{v_i} \in I_c(V)$ , 必存在  $\delta_{2^{n+n_1}}^{v_j} \in I_c(V)$ , 有  $F_{v_j, v_i} \neq 0$ . 即

$$L_1\delta_{2^{n+n_1}}^{v_i} = \delta_{2^{n+n_1}}^{v_j} \in I_c(V),$$

或存在  $\mu$ , 有

$$L_2\delta_{2^m}^\mu \delta_{2^{n+n_1}}^{v_i} = \delta_{2^{n+n_1}}^{v_j} \in I_c(V).$$

因此  $I_c(V)$  是事件触发控制不变子集.

如果  $I_c(V) = V$ , 则  $I_c(V)$  是最大事件触发控制不变子集, 否则条件2)成立. 假设满足  $I_c(V) \subsetneq I'_c(V) \subseteq V$  的集合  $I'_c(V)$  存在, 不妨设  $w' = w + k$ , 由  $\sum_{i \in [1, w']} \text{Row}(F|_{I'_c(V)}) \neq \mathbf{1}_{w'}$  可知, 必定存在  $\delta_{2^{n+n_1}}^{v_k} \in I'_c(V) \setminus I_c(V)$ , 有

$$\text{Col}_{v_k}(F|_{I'_c(V)}) = \mathbf{0}_{w'}.$$

容易看出  $I'_c(V)$  不是最大事件触发控制不变子集. 令  $I'_c(V) = I'_c(V) \setminus \delta_{2^{n+n_1}}^{v_k}$ , 则此时  $w' = w + k - 1$ . 同理,  $I'_c(V)$  不是最大事件触发控制不变子集. 重复上述过

程,直至  $w' = w$ , 条件2)不成立,即  $I_c(V)$  是最大事件触发控制不变子集.

必要性. 假设  $I_c(V) \subsetneq V$  是集合  $V$  系统(9)的最大事件触发控制不变子集, 则对于任意  $\delta_{2^n+2^{n+1}}^{v_i} \in I_c(V)$ , 必存在  $v_j \in [1, 2^w]$ , 有

$$F_{v_j, v_i} \neq 0.$$

即对于任意  $i \in [1, w]$ , 必存在  $j \in [1, w]$ , 有

$$(F|_{I_c(V)})_{j,i} \neq 0.$$

条件1)成立.

如果  $w \neq w'$ , 即  $I_c(V) \neq V$ . 假设对于任意满足  $I_c(V) \subsetneq I'_c(V) \subseteq V$  的  $I'_c(V)$ , 有

$$\sum_{i \in [1, w']} \text{Row}_i(F|_{I'_c(V)}) = \mathbf{1}_{w'}.$$

上式表明, 对于任意  $\delta_{2^n+2^{n+1}}^{v_i} \in I'_c(V) \setminus I_c(V)$ , 存在  $\delta_{2^n+2^{n+1}}^{v_j} \in I'_c(V)$ , 有  $(F|_{I'_c(V)})_{j,i} \neq 0$ , 即  $F_{v_j, v_i} \neq 0$ , 由不变子集的定义可知  $\delta_{2^n+2^{n+1}}^{v_i} \in I_c(V)$ , 与假设矛盾. 即条件2)得证.  $\square$

由命题1, 输出跟踪问题进一步转换为系统(9)的状态能否集镇定到集合  $I_c(V)$ .

### 2.2 问题分析

定义  $I_c(V)$  的  $k$  步可达集

$$E_k(I_c(V)) = \{\delta_{2^n+2^{n+1}}^\alpha \mid \exists \delta_{2^n+2^{n+1}}^\beta \in E_{k-1}, \text{ 有 } F_{\beta, \alpha} \neq 0\},$$

其中  $E_0(I_c(V)) = I_c(V)$ .

设  $k_1$  为满足  $E_k(I_c(V)) = E_{k+1}(I_c(V))$  的最小整数  $k$ , 构造  $R_k(I_c(V)) = E_k(I_c(V)) \setminus \bigcup_{t=0}^{k-1} E_t$ , 其中  $R_0(I_c(V)) = E_0(I_c(V))$ , 且令  $R(I_c(V)) = \bigcup_{l=0}^{k_1} R_l(I_c(V))$ . 类似文献[19], 有如下定理.

**定理1**<sup>[19]</sup> 在事件触发控制(4)下, 布尔控制网络(1)能够实现输出跟踪, 当且仅当:

- 1)  $I_c(V) \neq \emptyset$ ;
- 2)  $R(I_c(V)) = \Delta_{2^n+2^{n+1}}$ .

在事件触发控制下, 当布尔控制网络(1)的输出无法跟踪参考信号(3)的输出时, 即定理1的条件不成立时, 考虑翻转控制与事件触发控制共同作用下系统(9)的状态集镇定问题, 即布尔控制网络(1)与参考信号(3)的输出跟踪问题.

**定义5** 令  $E$  代表扰动集, 给定目标集合  $I_c(V)$ , 如果对于任意  $z(0) \in \Delta_{2^n+2^{n+1}}$ , 存在集合  $W \in \mathcal{P}_E$ , 时间  $T, T' \in \mathbf{N}$  和间歇控制序列  $u$ , 当  $t \geq T$  时, 有

$$z(t; \overline{z}'_W, u) \in I_c(V),$$

其中  $z' = z(T'; z(0), u)$ , 则称系统(9)的状态在事件触发控制下经过翻转1次  $E$  中的一些元素后镇定到

$I_c(V)$ .

由定义5可以看出, 对于任意  $z(0) \in \Delta_{2^n+2^{n+1}}$ , 分两种情形: 1) 系统(9)的状态只在事件触发控制下达到集合  $I_c(V)$ , 此时节点扰动集为空集; 2) 先经历一段事件触发控制(可能没有)到达某个状态, 此时进行1次翻转控制(节点扰动集非空), 再经历一段事件触发控制(也可能没有)即可达到集合  $I_c(V)$ , 前后经历两段事件触发控制的状态反馈矩阵  $G$  相同.

**注2** 与文献[22-23]在初始时刻实行翻转控制相比, 定义5表明对任意状态的翻转控制时刻可任意. 类似文献[22-23], 因为本文考虑1次翻转控制, 假设定理1的条件1)是成立的, 但条件2)不成立.

事实上, 对于任意  $z(0) \in R(I_c(V))$ , 不管是在初始时刻还是在原系统演化一段时间后, 都不需要进行1次翻转控制即可达到集合  $I_c(V)$ , 换言之, 此时节点扰动集是空集. 对于任意  $z(0) \in \Delta_{2^n+2^{n+1}} \setminus R(I_c(V))$ , 需要经历1次翻转控制(可能在一段时间后), 并且节点扰动集非空. 基于此, 给出一个定理.

**定理2** 布尔控制网络(1)在事件触发控制下翻转1次  $E$  中的一些元素后能够实现输出跟踪, 当且仅当:

- 1)  $I_c(V) \neq \emptyset$ .
- 2)  $\sum_{B, \delta_{2^n+2^{n+1}}^\beta \in R(I_c(V))} \text{Row}_\beta \left( \mathcal{F}_E \sum_{B, l=1}^{k_2} B^l \right) > 0$ . 其

中:  $B = F + B I_{2^n}$ ;  $k_2$  为满足  $\sum_{B, t=1}^k B^t = \sum_{B, t=1}^{k+1} B^t$  的最小  $k$  值,  $k \in \mathbf{Z}_+$ .

**证明** 充分性. 假设1)和假设2)成立, 意味着对于任意  $z(0) = \delta_{2^n+2^{n+1}}^\alpha \in \Delta_{2^n+2^{n+1}}$ , 如果  $z(0) \in R(I_c(V))$ , 则  $E = \emptyset$  和  $l = 0$ , 有

$$f_{\emptyset} I_{2^n} z(0) = \overline{z(0)}_{\emptyset} = z(0) \in R(I_c(V)).$$

由  $R(I_c(V))$  的构造可知, 存在间歇控制序列  $u$  和整数  $T_\alpha$ , 当  $t \geq T_\alpha$  时, 有

$$z(t; \delta_{2^n+2^{n+1}}^\alpha, u) \in I_c(V) \subseteq V.$$

如果  $z(0) \in \Delta_{2^n+2^{n+1}} \setminus R(I_c(V))$ , 根据条件2), 存在  $z(0)' = \delta_{2^n+2^{n+1}}^\gamma \in R(I_c(V))$  和整数  $\tau \in [0, k_2]$ , 有

$$(\mathcal{F}_E B^\tau)_{\gamma, \alpha} > 0.$$

根据乘积定义, 易知存在正整数  $\beta \in [1, 2^n+2^{n+1}]$ , 有  $(\mathcal{F}_E)_{\gamma, \beta} > 0$  且  $(B^\tau)_{\beta, \alpha} > 0$ . 由  $\mathcal{F}_E$  和  $B$  的构造可知, 存在非空集合  $E_\beta \in \mathcal{P}_E$ 、间歇控制序列  $u$  和时间  $T'_\alpha$ , 有  $(f_{E_\beta})_{\gamma, \beta} > 0$  和  $z(T'_\alpha; \delta_{2^n+2^{n+1}}^\alpha, u) = \delta_{2^n+2^{n+1}}^\beta$ . 同样由  $R(I_c(V))$  的构造可知, 存在间歇控制序列  $u$  和时间  $T_\gamma$ , 有

$$z(T_\gamma; \delta_{2^{n+n_1}}^\gamma, u) \in I_c(V) \subseteq V.$$

令  $E_\alpha = E_{\alpha,u} = E_\beta, T_\alpha = T'_\alpha + T_\gamma$ , 即对于任意  $z(0) = \delta_{2^{n+n_1}}^\alpha$ , 存在间歇控制序列  $u$  和  $E_\alpha$ , 当  $t \geq T_\alpha$  时, 有

$$z(t; \overline{z(0)'_{E_\alpha}}, u) \in I_c(V) \subseteq V,$$

其中  $\overline{z(0)'} = z(T'_\alpha; z(0), u) = \delta_{2^{n+n_1}}^\beta$ . 令  $T' = T'_\alpha, T = \max_{\alpha \in [1, 2^{n+n_1}]} T_\alpha, E = \bigcup_{\alpha \in [1, 2^{n+n_1}]} E_\alpha$ , 符合定义, 得证.

必要性. 如果布尔控制网络(1)在事件触发控制下翻转1次  $E$  中的一些元素后能够实现输出跟踪, 即系统(9)的状态镇定到集合  $V$  中.

首先证明系统(9)的状态镇定到  $I_c(V)$  中. 假设存在  $z(0) = \delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in \Delta_{2^{n+n_1}}$ , 对于任意集合  $W \in \mathcal{P}_E$ , 时间  $T_\alpha, T'_\alpha \in \mathbf{N}$  和间歇控制序列  $u$ , 当  $t \geq T_\alpha$  时, 有

$$z(t; \overline{z(0)'_W}, u_\alpha) \in V \setminus I_c(V),$$

其中  $z(0)' = z(T'_\alpha; z(0), u) = \delta_{2^{n+n_1}}^\beta$ . 因此必存在整数  $T''_\alpha > 0$ , 间歇控制序列  $u$ , 有

$$z(T''_\alpha + T_\alpha; \overline{z(0)'_W}, u) \in \Delta_{2^{n+n_1}} \setminus V,$$

与系统(9)的状态镇定到  $V$  中矛盾.

令  $E = \bigcup_{\alpha \in [1, 2^{n+n_1}]} E_\alpha$ , 即对于  $z(0) \in \Delta_{2^{n+n_1}}$ , 存在集合  $W \in \mathcal{P}_E$ , 时间  $T, T' \in \mathbf{N}$  和间歇控制序列  $u$ , 当  $t \geq T$  时, 有

$$z(t; \overline{z(0)'_W}, u) \in I_c(V),$$

其中  $z(0)' = z(T'; z(0), u)$ . 条件1)得证.

假设条件2)不成立, 即存在整数  $\alpha \in [1, 2^{n+n_1}]$ , 对于任意  $\delta_{2^{n+n_1}}^\beta \in R(I_c(V))$  和正整数  $l \in [1, k_2]$ , 有

$$(\mathcal{F}_W B^l)_{\beta, \alpha} = 0.$$

意味着不存在  $\gamma \in [1, 2^{n+n_1}]$  和集合  $W \in \mathcal{P}_E$ , 使得  $(\mathcal{F}_W)_{\beta, \gamma} > 0$  和  $(B^l)_{\gamma, \alpha} > 0$  同时成立. 令  $z(0) = \delta_{2^{n+n_1}}^\alpha$ , 对于任意间歇控制序列  $u$ , 集合  $W \in \mathcal{P}_E$  和整数  $T, T'$ , 当  $t \geq T$  时, 有

$$z(t; \overline{z(0)'_W}, u) \notin I_c(V),$$

其中  $z(0)' = z(T'; z(0), u)$ . 与系统(9)在事件触发控制下翻转1次  $E$  中的一些元素后得到的输入状态镇定到  $I_c(V)$  矛盾. 因此, 系统(9)的状态在事件触发和翻转控制共同作用下镇定到  $I_c(V)$  中, 条件2)得证.  $\square$

定理2不仅提供了布尔控制网络(1)在事件触发控制下翻转1次  $E$  中的一些元素后能够实现输出跟踪的条件, 而且给出了可行性算法. 为了尽可能节约成本, 通过算法1可求出所需最小节点扰动集, 记为

$E^*$ .

**算法1** 最小节点扰动集算法.

初始:  $i = 0, E^* = \emptyset$ .

step 1: 计算包含由  $i$  个节点(从增广系统前  $n$  个节点中选择)组成的集合  $E = \{E^j\}, j \in [1, C_n^i]$ .

step 2: 如果存在  $j \in [1, C_n^i]$ , 有

$$\sum_{B, \delta_{2^{n+n_1}}^\beta \in R(I_c(V))} \text{Row}_\beta \left( \mathcal{F}_{E^j} \sum_{B, l=1}^{k_2} B^l \right) > 0,$$

则  $E^* = E^j$ , 停止; 否则, 转入 step 3.

step 3:  $i = i + 1$ . 如果  $i \leq n$ , 则转入 step 1; 否则, 输出跟踪无解.

由算法1确定的最小节点扰动集  $E^*$  可能并不唯一, 令  $\mathcal{E} = \{E^1, E^2, \dots, E^l\}$  为最小扰动集所构成的集合, 其中  $l$  为最小节点扰动集的个数.

### 2.3 控制设计

由算法1得到最小节点扰动集  $E^* \in \mathcal{E}$ , 下面在最小节点扰动集的基础上考虑系统(9)的状态到达目标集所需时间最优控制设计.

令  $C = \Delta_{2^{n+n_1}} \setminus R(I_c(V))$ , 对集合  $C$  进行划分, 考虑  $R_k(I_c(V)), k \in [0, k_1]$  在  $E^*$  下的翻转状态集

$$\overline{R_k(I_c(V))}_{W^*} = \{\overline{\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha}_{W^*} \mid \delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in R_k(I_c(V))\},$$

其中  $W^* \in \mathcal{P}_{E^*}$ . 进一步, 构造

$$\Upsilon_l^*(I_c(V)) = \overline{R_l(I_c(V))}_{W^*} \cap (C \setminus \bigcup_{t=0}^{l-1} \Upsilon_t^*(I_c(V))).$$

其中:  $l \in \mathbf{N}$ , 初始集合  $\Upsilon_0^*(I_c(V)) = \overline{R_{k_3}(I_c(V))}_{W^*}$ ,  $k_3$  为满足  $\overline{R_k(I_c(V))}_{W^*} \cap C \neq \emptyset$  的最小  $k$  值.

令  $\Theta_t^*(I_c(V))$  和  $\Omega_t^*(I_c(V)) (t \in \mathbf{N})$ , 分别表示需经历事件触发控制和翻转控制的状态集合, 构造为

$$\Theta_t^*(I_c(V)) = \{\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in (C \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} \Pi_i^*(I_c(V))) \mid \text{存在} \\ \delta_{2^{n+n_1}}^\beta \in \Pi_{t-1}^*(I_c(V)), \text{使 } F_{\beta, \alpha} = 1\},$$

$$\Omega_t^*(I_c(V)) = \Upsilon_t^*(I_c(V)) \setminus (\bigcup_{i=1}^{t-1} \Pi_i^*(I_c(V)) \cup \Theta_t^*(I_c(V))),$$

$$\Pi_t^*(I_c(V)) = \Theta_t^*(I_c(V)) \cup \Omega_t^*(I_c(V)).$$

其中: 当  $\Upsilon_t^*(I_c(V)) = \emptyset$  时,  $\Omega_t^*(I_c(V)) = \emptyset$ .  $\Theta_0^*(I_c(V)) = \emptyset, \Omega_0^*(I_c(V)) = \Upsilon_0^*(I_c(V))$ .

计算得  $k_4$  为满足  $\bigcup_{t=0}^k \Pi_t^* = \bigcup_{t=0}^{k+1} \Pi_t^*$  的最小  $k$  值,

则必有  $\bigcup_{l=0}^{k_4} \Pi_l^* = C$ .

计算集合  $C$  中状态达到目标集  $I_c(V)$  所需的最小总时间, 假设对于任意状态进行1次翻转控制和事件触发控制所需时间相同, 为

$$S = \min_{E^* \in \mathcal{E}} \sum_{l=0}^{k_4} ((k_3 + l + 1) \times |\Pi_l^*|),$$

$S$ 所对应的最小节点扰动集称为最佳节点扰动集,记为 $E^*$ .

此时计算的最优时间是对 $C$ 中的状态而言的,对于 $R(I_c(V))$ 中的状态也可能在扰动集下 $E^*$ 翻转1次到达目标集 $I_c(V)$ 需时更少,但此时 $C$ 中的状态可能翻转不止1次.即 $I_c(V)$ 中和 $C$ 中的状态可能到达目标集 $I_c(V)$ 的时间不会同时最优,如下例所示(只考虑翻转控制).

**例1** [21] 考虑布尔网络

$$\begin{cases} z_1(t+1) = \neg z_2(t), \\ z_2(t+1) = z_4(t), \\ z_3(t+1) = \neg z_1(t) \wedge z_2(t), \\ z_4(t+1) = z_2(t) \vee z_3(t). \end{cases}$$

结构矩阵为 $L_1 = \delta_{16} [11, 15, 11, 15, 3, 7, 4, 8, 9, 13, 9, 13, 3, 7, 4, 8]$ .

给定目标集合 $I_c(V) = \{\delta_{16}^9\}$ ,由结构矩阵易得 $R(I_c(V)) = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^3, \delta_{16}^5, \delta_{16}^9, \delta_{16}^{10}, \delta_{16}^{11}, \delta_{16}^{12}, \delta_{16}^{13}\}$ , $C = \{\delta_{16}^2, \delta_{16}^4, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7, \delta_{16}^8, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{15}, \delta_{16}^{16}\}$ ,节点扰动集 $E^* = \{1, 2\} = \mathcal{E}$ .由文献[21],对于状态 $\delta_{16}^8$ ,其到达目标集 $I_c(V)$ 的轨迹为 $\delta_{16}^8 \xrightarrow{\text{翻转}\{1,2\}} \delta_{16}^{12} \rightarrow \delta_{16}^{13} \rightarrow \delta_{16}^3 \rightarrow \delta_{16}^{11} \rightarrow \delta_{16}^9$ ,但是对于 $\delta_{16}^{13}$ ,可以翻转1次即 $\delta_{16}^{13} \xrightarrow{\text{翻转}\{2\}} \delta_{16}^9$ ,此时对于状态 $\delta_{16}^8$ 和 $\delta_{16}^{13}$ ,在经历1次翻转演化进入 $I_c(V)$ 的前提下,无法同时保证时间最优.因此,由上述过程所确定的集合 $C$ 在事件触发控制下翻转1次 $E^*$ 中的一些元素进入 $I_c(V)$ ,称为部分状态到达目标集合时间最优.进一步,若对于任意的 $\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in R_k(I_c(V))$ , $k \in [2, k_1]$ ,满足

$$\overline{\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha W^*} \cap \left( \bigcup_{t=0}^{k-2} R_t(I_c(V)) \right) = \emptyset,$$

其中 $W^* \in \mathcal{P}_{E^*}$ ,则称全部状态达到目标集合时间最优,此条件称为全局最优条件.

假设由文献[22-23]的翻转定义方式计算出最小时间为 $k_5 + 1$ (本文将1次翻转控制记为1个时刻),上述计算可能会求得更小的最小节点扰动集,但不能保证时间短于 $k_5 + 1$ ,因此下面给出本文所需时间不会更长且最小节点扰动集不会更大的命题.

**命题2** 若计算得到的 $k_1, k_3, k_4$ 和 $C$ 满足:

- 1)  $k_1 \leq k_5$ ,
- 2)  $k_3 + k_4 \leq k_5$ ,

则输出跟踪有解所需时间不超过 $k_5 + 1$ .

如果命题2不成立,则扩大最小扰动集为 $E^* = E^* \cup i, i$ 为前 $n$ 个节点中 $E^*$ (扩大之前)之外任意一

个节点,重新计算各集合,直到满足命题2.

本节的流程如图1所示.

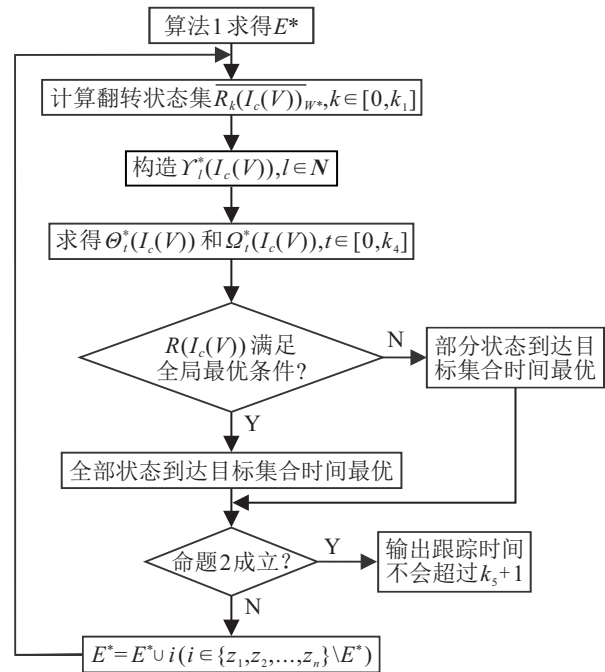


图1 控制设计流程

具体控制设计分为4部分:

对于任意 $\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in I_c(V)$ ,若有 $\text{Col}_\alpha(L_1) \in I_c(V)$ ,则控制不触发;否则必定存在 $\mu \in [1, 2^m]$ ,有 $\text{Col}_\alpha(\text{Blk}_\mu(L_2)) \in I_c(V)$ .

对于任意 $\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in R_l(I_c(V))$ , $l \in [1, k_1]$ ,若有 $\text{Col}_\alpha(L_1) \in R_{l-1}(I_c(V))$ ,则控制不触发;否则,必定存在 $\mu \in [1, 2^m]$ ,有 $\text{Col}_\alpha(\text{Blk}_\mu(L_2)) \in R_{l-1}(I_c(V))$ .

对于任意 $\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in \Omega_l^*(I_c(V))$ , $l \in [1, k_4]$ ,必定存在 $W^* \in \mathcal{P}_{E^*}$ ,有 $\overline{\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha W^*} \in R_{l+k_3}(I_c(V))$ .

对于任意 $\delta_{2^{n+n_1}}^\alpha \in \Theta_l^*(I_c(V))$ , $l \in [2, k_4]$ ,若有 $\text{Col}_\alpha(L_1) \in \Pi_{l-1}^*(I_c(V))$ ,则控制不触发;否则必定存在 $\mu \in [1, 2^m]$ ,有 $\text{Col}_\alpha(\text{Blk}_\mu(L_2)) \in \Pi_{l-1}^*(I_c(V))$ .

**注3** 与集镇定问题不同,本文考虑的是输出跟踪问题,尽管本文是将输出跟踪问题转换为集镇定问题考虑,但是由于可操纵的节点仅为增广系统中的一部分,可能会导致输出跟踪无解,本文定义方式将尽可能减少这种情况出现.

### 3 算例

**例2** 考虑布尔控制网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (u(t) \wedge (x_1(t) \vee x_2(t))) \vee (\neg u(t) \wedge \neg(x_1(t) \vee x_2(t))), \\ x_2(t+1) = (u(t) \wedge x_1(t)) \vee (\neg u(t) \wedge \neg x_1(t)), \\ y(t) = x_1(t) \leftrightarrow x_2(t). \end{cases} \quad (11)$$

当控制不触发时变为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_1(t) \vee x_2(t)) \vee (\neg(x_1(t) \vee x_2(t))), \\ x_2(t+1) = x_1(t) \vee \neg x_1(t), \\ y(t) = x_1(t) \leftrightarrow x_2(t). \end{cases} \quad (12)$$

给定参考信号<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t+1) = \hat{x}_2(t), \\ \hat{x}_2(t+1) = \hat{x}_2(t) \vee (\hat{x}_3(t) \vee \hat{x}_1(t)), \\ \hat{x}_3(t+1) = \hat{x}_1(t) \vee (\hat{x}_3(t) \wedge \neg \hat{x}_1(t)), \\ \hat{y}(t) = (\hat{x}_1(t) \wedge \hat{x}_2(t)) \leftrightarrow (\neg \hat{x}_3(t)). \end{cases} \quad (13)$$

利用矩阵半张量积理论, 可以将系统(11)、(12)和(13)转化为系统(5)、(6)和(7)形式, 其中结构矩阵  $L = \delta_4[1, 1, 2, 4, 4, 4, 3, 1]$ ,  $\bar{L} = \delta_4[1, 1, 1, 1]$ ,  $\hat{L} = \delta_8[1, 1, 5, 7, 1, 2, 7, 8]$ ,  $H = \delta_2[1, 2, 2, 1]$ ,  $\hat{H} = \delta_2[2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$ .

令  $z(t) = x(t)\hat{x}(t)$ ,  $s(t) = y(t)\hat{y}(t)$ , 则转化为系统(9), 其中结构矩阵  $L_1 = \delta_{32}[1, 1, \dots, 7, 8] \in \mathcal{L}_{32 \times 32}$ ,  $L_2 = \delta_{32}[1, 1, \dots, 9, 9, 13, 15, \dots, 7, 8] \in \mathcal{L}_{32 \times 64}$ ,  $\tilde{H} = \delta_4[1, 2, 2, 1, \dots, 1, 2, 1, 2] \in \mathcal{L}_{4 \times 32}$ .

由式(10)和 $\tilde{H}$ 可知状态目标集合  $V = \{\delta_{32}^2, \delta_{32}^3, \delta_{32}^5, \delta_{32}^7, \delta_{32}^9, \delta_{32}^{12}, \delta_{32}^{14}, \delta_{32}^{16}, \delta_{32}^{17}, \delta_{32}^{20}, \delta_{32}^{22}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{26}, \delta_{32}^{27}, \delta_{32}^{29}, \delta_{32}^{31}\}$ , 由命题1可知目标集合  $V$  在系统(9)下的最大事件触发控制不变子集  $I_c(V) = \{\delta_{32}^7, \delta_{32}^{12}, \delta_{32}^{17}, \delta_{32}^{20}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{31}\}$ , 进一步易得  $R_1(I_c(V)) = \{\delta_{32}^4, \delta_{32}^{15}, \delta_{32}^{18}, \delta_{32}^{21}, \delta_{32}^{23}, \delta_{32}^{28}\}$ ,  $R_2(I_c(V)) = \{\delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{22}\}$ ,  $k_1 = 2$ ,  $R(I_c(V)) = \bigcup_{t=0}^2 R_t(I_c(V)) \neq \Delta_{2^{n+n_1}}$ , 故不满足定理1, 即在事件触发控制下布尔控制网络(11)的输出无法跟踪参考信号(13)的输出. 下面考虑翻转控制辅助.

令  $E = \{1, 2\}$ , 经过计算  $k_2 = 2$ , 且

$$\sum_{B, \delta_{2^{n+n_1}}^B \in R(I_c(V))} \text{Row}_B \left( \mathcal{F}_E \sum_{B, t=1}^2 B^t \right) = \mathbf{1}_{32}^T,$$

满足定理2.

由算法1得到  $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{2\}\}$ , 当  $E^* = \{1\}$  时, 有  $\Upsilon_0^*(I_c(V)) = \{\delta_{32}^1, \delta_{32}^8\}$ ,  $\Upsilon_1^*(I_c(V)) = \{\delta_{32}^2, \delta_{32}^5\}$ ,  $\Upsilon_2^*(I_c(V)) = \{\delta_{32}^3, \delta_{32}^6\}$ ,  $k_3 = 0$ .

经过计算  $\Theta_0^* = \emptyset$ ,  $\Omega_0^* = \{\delta_{32}^1, \delta_{32}^8\}$ ,  $\Theta_1^* = \{\delta_{32}^2, \delta_{32}^5, \delta_{32}^9, \delta_{32}^{10}, \delta_{32}^{13}, \delta_{32}^{16}, \delta_{32}^{25}, \delta_{32}^{26}, \delta_{32}^{29}, \delta_{32}^{32}\}$ ,  $\Omega_1^* = \emptyset$ ,  $\Theta_2^* = \{\delta_{32}^3, \delta_{32}^6, \delta_{32}^{11}, \delta_{32}^{14}, \delta_{32}^{27}, \delta_{32}^{30}\}$ ,  $\Omega_2^* = \emptyset$ ,  $k_4 = 2$ ,  $S^{\{1\}} = 40$ .

综上, 增广系统全部状态按控制类型可分为3部分:

1) 对于状态  $\{\delta_{32}^1, \delta_{32}^8\}$ , 触发翻转控制, 扰动集

$\{1\}$ .

2) 对于状态  $\{\delta_{32}^{17}, \delta_{32}^{18}, \delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{21}, \delta_{32}^{22}, \delta_{32}^{24}\}$ , 触发原控制, 状态反馈矩阵为

$$G = \begin{matrix} \delta_2[1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, \\ 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 2, 2, 2, 1 \setminus 2, 2, 2, \\ 1 \setminus 2, 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2, 1 \setminus 2] \end{matrix}$$

其中  $1 \setminus 2$  表示1或2.

3) 对于其余状态, 皆不触发控制.

图2展示了增广系统的状态转移, 实线表示状态转移不触发控制, 单虚线表示触发原控制, 双虚线表示触发翻转控制.

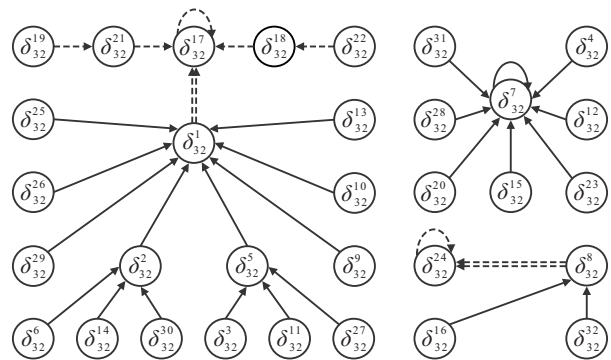


图2 状态转移图

图3展示从初始状态  $x(0) = \delta_4^4$ ,  $\hat{x}(0) = \delta_8^6$  出发, 系统(11)和参考信号(13)的输出信号演化.

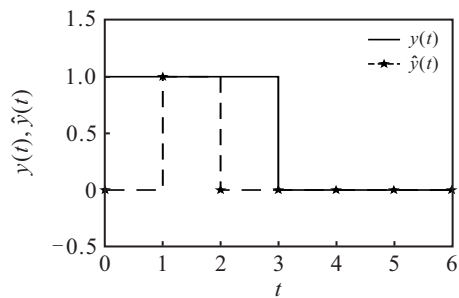


图3 输出信号演化

同样,  $E^* = \{2\}$  时, 经计算  $S^{\{2\}} = 40$ , 翻转节点  $\{1\}$  或  $\{2\}$  所消耗时间相同, 即  $E^\bullet = \{1\}$  或  $E^\bullet = \{2\}$ . 对状态  $\delta_{32}^{19}$  和  $\delta_{32}^{22}$ , 无论对于翻转节点  $\{1\}$  或  $\{2\}$  都满足全局最优条件, 所以从任意状态出发系统输出跟踪有解所需时间最优.

若按照文献[22-23]中的控制方法, 例2输出跟踪无解. 进一步, 考虑翻转控制在初始时刻情形, 假定增广系统的能控矩阵为  $F = L_1 + B \sum_{B, j=1}^2 L_2 \delta_{2^m}^j$ , 则所需最小节点扰动集为  $\{1, 2\}$ , 最小时间为3,  $k_5 = 2$ . 例2满足命题2, 因此本例所求  $\{1\}$  或  $\{2\}$  为3步最佳节点

扰动集.

## 4 结论

本文研究了事件触发控制和翻转控制下布尔控制网络的输出跟踪问题. 基于矩阵半张量积和构造增广系统, 将输出跟踪问题转化为状态集镇定问题. 通过一种新的翻转时刻定义方式, 得到在事件触发和翻转控制下输出跟踪有解的充要条件. 给出最小节点扰动集的求解算法, 得到系统从部分或全部状态出发输出跟踪有解时间最优控制设计, 进一步给出系统在限定时间输出跟踪有解所需节点扰动集的计算过程.

## 参考文献(References)

- [1] Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] Qi H S, Cheng D Z, Zhao Y. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[C]. *Proceedings of 7th Asian Control Conference*. Hong Kong, 2009: 1352-1356.
- [3] Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853-1857.
- [4] Huang C, Lu J Q, Zhai G S, et al. Stability and stabilization in probability of probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(1): 241-251.
- [5] Tian H, Wang Z S, Hou Y F, et al. State feedback controller design for synchronization of master-slave Boolean networks based on core input-state cycles[J]. *Neurocomputing*, 2016, 174: 1031-1037.
- [6] Liu Y, Tong L Y, Lou J G, et al. Sampled-data control for the synchronization of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(2): 726-732.
- [7] Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659-1667.
- [8] Toyoda M, Wu Y H. On optimal time-varying feedback controllability for probabilistic Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 2202-2208.
- [9] Li H T, Yang X R, Wang S L. Robustness for stability and stabilization of Boolean networks with stochastic function perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(3): 1231-1237.
- [10] Li H T, Yang X R, Wang S L. Perturbation analysis for finite-time stability and stabilization of probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(9): 4623-4633.
- [11] Cheng D Z. Disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2-10.
- [12] Liu Y, Li B W, Lu J Q, et al. Pinning control for the disturbance decoupling problem of Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6595-6601.
- [13] Zhu B, Xia X H, Wu Z. Evolutionary game theoretic demand-side management and control for a class of networked smart grid[J]. *Automatica*, 2016, 70: 94-100.
- [14] Li H T, Xie L H, Wang Y Z. Output regulation of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(6): 2993-2998.
- [15] Zhang X, Wang Y H, Cheng D Z. Output tracking of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(6): 2730-2735.
- [16] Yerudkar A, del Vecchio C, Glielmo L. Output tracking control design of switched Boolean control networks[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 4(2): 355-360.
- [17] Chen B Q, Cao J D, Luo Y P, et al. Asymptotic output tracking of probabilistic Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2020, 67(8): 2780-2790.
- [18] Zhang A G, Li L L, Lu J Q. Event-based output regulation of Boolean control networks with time delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(6): 2007-2011.
- [19] He J Y, Liu Y. Event-triggered control for output regulation of Boolean control networks[C]. *Proceedings of the 12th Asian Control Conference*. Kitakyushu, 2019: 1565-1570.
- [20] Rafimanzelat M R, Bahrami F. Attractor controllability of Boolean networks by flipping a subset of their nodes[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(4): 043120.
- [21] Rafimanzelat M R, Bahrami F. Attractor stabilizability of Boolean networks with application to biomolecular regulatory networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, 6(1): 72-81.
- [22] Chen B Q, Yang X Y, Liu Y, et al. Controllability and stabilization of Boolean control networks by the auxiliary function of flipping[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(14): 5529-5541.
- [23] Zhang Q L, Feng J E, Zhao Y, et al. Stabilization and set stabilization of switched Boolean control networks via flipping mechanism[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 41: 101055.
- [24] Liu Z J, Zhong J, Liu Y, et al. Weak stabilization of Boolean networks under state-flipped control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3106918.

## 作者简介

徐勇(1971—), 男, 教授, 博士, 从事非线性系统、复杂网络等研究, E-mail: xuyong@hebut.edu.cn;

朱万里(1997—), 男, 硕士生, 从事布尔网络的研究, E-mail: 1769607133@qq.com;

李杰(1973—), 女, 教授, 博士, 从事电子商务、商务大数据分析等研究, E-mail: ljrsch@126.com.