

# 控制与决策

Control and Decision

基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性

吴新杰, 陈世明

引用本文:

吴新杰,陈世明. 基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1278–1285.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0406>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

[事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化](#)

Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1412–1419 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0369>

[网络攻击下多智能体系统动态事件触发一致性](#)

Dynamic event-triggered consensus of multi-agent systems under cyber-attacks

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1295–1302 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0725>

[基于事件驱动的多智能体有限时间分群一致控制](#)

Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with event-triggered control

*控制与决策*. 2022, 37(11): 2925–2933 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0162>

[多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性](#)

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems

*控制与决策*. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

[自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性](#)

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 基于事件触发的非线性多智能体系统的 固定时间分群一致性

吴新杰, 陈世明<sup>†</sup>

(华东交通大学 电气与自动化工程学院, 南昌 330013)

**摘要:** 结合事件触发控制方法研究非线性多智能体系统的固定时间分群一致性问题. 提出一种非线性分布式事件触发分群一致性控制协议, 并给出状态信息触发控制器更新的条件. 该控制协议不受入度平衡条件限制, 且只需自身状态信息与邻居智能体进行通信即可在固定时间内快速实现分群一致性. 系统收敛时间与智能体的初始状态无关, 可有效降低系统控制器更新频率和系统的资源消耗. 结合代数图论、矩阵分析及Lyapunov稳定性理论, 证明在所提出协议作用下, 多智能体系统在固定时间内能够实现分群一致性, 且不存在Zeno行为. 最后, 通过仿真实例检验了理论结果的可行性.

**关键词:** 多智能体系统; 非线性; 事件触发控制; 固定时间; 分群一致性; 分布式控制

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyj.2022.0406

引用格式: 吴新杰, 陈世明. 基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性[J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1278-1285.

## Fixed-time group consensus control for nonlinear multi-agent systems based on event-triggered mechanism

WU Xin-jie, CHEN Shi-ming<sup>†</sup>

(College of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The problem of fixed-time group consensus for nonlinear multi-agent systems based on event-triggered mechanism is studied. A nonlinear distributed event-triggered group consensus control protocol is proposed, and the condition of the updating controller triggered by states information is given. The control protocol is not restricted by the in-degree balance condition and only needs its own state information to communicate with the neighbor agents to achieve the group consensus quickly in fixed-time. The convergence time is independent of the initial state of the agent, which can effectively reduce the system controller update frequency and system resource consumption. Combining the algebraic graph theory, the matrix analysis and the Lyapunov stability theory, it is proved that under the proposed strategy, the multi-agent system can achieve group consensus in a fixed time, and Zeno behavior does not exist in the system. Finally, simulation example verifies the feasibility of the theoretical results.

**Keywords:** multi-agent systems; nonlinear; event-triggered; fixed-time; group consensus; distributed control

## 0 引言

近年来,多智能体系统的协同控制发展迅速,已广泛地应用于无人机飞行控制<sup>[1]</sup>、多机器人编队控制<sup>[2]</sup>、智能电网<sup>[3]</sup>、分布式传感器融合<sup>[4]</sup>等领域.多智能体系统协同控制的基础是一致性,一致性一般指在多智能体系统中,各个智能体的速度、状态最终渐近收敛至相同值.而在实际应用中,为了满足不同的任务要求或适应环境的变化,往往需要达到多个期望

值,故演化出多智能体系统分群一致性.通常把多智能体划分为多个子群,在控制协议作用下,同一子群的智能体收敛至相同值,不同子群的收敛值不同.例如:日常生活中对多名置身于火灾的人员救援,产品分批运往不同目的工程,铁路运输系统和公交车运输系统中不同车次运载各个乘客到达不同目的等现象,都是分群一致性的体现.

分群一致是集群同步的一个分支,早已得到各个

收稿日期: 2022-03-16; 录用日期: 2022-06-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973118); 江西省重点研发计划重点项目(20212BBE51010).

责任编辑: 杨涛.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: c1977318@hotmail.com.

领域学者们的广泛关注和研究. 迄今为止, 对于多智能体系统, 文献[5-7]在其一阶、二阶与异构系统上研究了分群协同控制. 此外, 分群一致性的研究还考虑了有向拓扑、切换拓扑、通信延迟和外部干扰等因素<sup>[8-12]</sup>. 相对于常见的一阶连续系统<sup>[13]</sup>, 文献[14]在离散系统上研究了分数阶系统的分群一致性. 通常, 一致性控制算法都是在连续通信框架上进行工作的. 在实际应用中, 每个多智能体的资源都是有限的. 考虑到智能体能量的损耗, 为了延长多智能体系统寿命, 控制器的设计应考虑到节能问题, 尽量避免各个智能体间连续地监视自身状态以及与邻居智能体连续通讯以更新自身状态的能量消耗. 事件触发控制就是一种极其有效的方法. 文献[15]首先在多智能体系统中提出了事件触发的控制方法, 使控制器不再持续更新控制输入, 而是根据设计的测量误差达到阈值时才更新控制输入. 随后, 文献[16-17]把这个方法运用于一致性控制, 提出了集中式事件触发和分布式事件触发的控制算法. 文献[18-19]引入事件触发控制策略来研究多智能体的分群一致性, 提出了一种集中式和分布式事件触发控制策略, 系统通过持续通信达到分群一致. 文献[20]在切换拓扑下, 结合事件触发控制机制研究了在干扰环境下的多智能体系统的耦合分群跟踪一致性问题. 文献[21]中给每个智能体配备一个采样器和零阶保持器, 探讨了带有通信量化和通信时延的基于事件触发的多智能体系统耦合分群一致性问题. 文献[22]在文献[19]的基础上考虑输出饱和影响, 提出了受饱和输入影响的分布式事件触发分群一致性控制策略. 文献[23]在有向拓扑中, 提出了一种分层事件触发分群一致性控制策略, 各层的触发条件不同, 导致整个群收敛过程是异步的. 针对异构多智能体系统, 文献[24]和文献[25]在竞争-合作交互网络中引入牵引控制策略, 提出了一种不依赖全局信息的全分布式事件触发条件, 分别研究了耦合分群一致性和分群一致性问题.

现有的事件触发协同控制分群一致性的研究大都是基于渐近收敛的. 文献[26]指出, 事件触发控制机制虽然减少了控制器更新, 但同时也降低了系统收敛速度. 针对实际工程应用, 不仅要考虑系统节能问题, 更要关注系统控制精度和收敛速度问题. 文献[27-29]指出, 有限时间控制器具有控制精度高、收敛快、鲁棒性强、更好的抗扰能力等优点. 但是, 有限时间控制器的收敛时间严重依赖于系统的初始状态, 为解决该约束问题, 文献[30]提出了固定时间控制器的概念, 该固定时间控制器可使系统的有限收敛时间

不再受初始状态约束. 因此, 系统地设计一种收敛速度快且节能的分群控制方法是非常有意义的. 与以往工作相比, 本文结合事件触发控制方法研究非线性多智能体系统的固定时间分群一致性问题, 提出一种新的分布式事件触发固定时间分群一致性协议. 该协议不仅考虑了系统节约能耗的问题, 还兼顾系统收敛速度情况. 系统在该协议作用下可在固定时间内实现分群收敛一致, 且收敛时间不受智能体的初始状态约束. 相较于常见的固定分群方法, 所提出协议通过分群参数的设置可任意划分子群. 相较于文献[18-25], 本文结合固定时间控制器, 在相同初始条件下, 所提出协议可使系统收敛速度更快、抗干扰能力更强、收敛时间上限值可估计, 且不受入度平衡条件限制, 因此, 该协议应用环境更广泛. 相较于文献[31-32], 本文加入事件触发控制机制, 在相同初始条件下, 所提出的控制协议能有效节省系统的能耗, 进而提高系统的寿命.

## 1 预备知识及问题描述

符号说明:  $R$  表示实数集,  $M^T$  表示矩阵  $M$  的转置. 对于一个对称矩阵  $M \in R^{N \times N}$ , 其第二小特征值表示为  $\lambda_2(M)$ . 集合  $S$  的大小可表为  $|S|$ . 对于一个向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in R^N$  和一个常数  $a > 0$ , 定义  $\text{sig}[x]^a = (\text{sign}(x_1)|x_1|^a, \dots, \text{sign}(x_N)|x_N|^a)^T$ , 其中  $\text{sign}(\cdot)$  为符号函数. 类似地, 对于矩阵  $M = (m_{ij})$ , 有  $\text{sig}[M]^a = \text{sign}(m_{ij})|m_{ij}|^a$ .

### 1.1 图论

假设  $G = (v, \varepsilon, A)$  是一个包含  $N$  个节点的加权无向拓扑图. 其中:  $v$  表示节点集;  $\varepsilon = v \times v$  表示边集;  $A = [a_{ij}]_{N \times N}$  表示拓扑图交流邻接矩阵, 当  $i, j \in \varepsilon$  时  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 如果存在边  $e_{ij} = (v_i, v_j)$ , 则说明节点  $v_i$  可以从节点  $v_j$  中获得信息.  $N_i = \{v_j | e_{ji} \in \varepsilon\}$  表示节点  $i$  的邻居节点集. 节点  $v_i$  与  $v_k$  间存在边序列  $(v_i, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ , 说明两节点之间存在一条路径. 若无向拓扑图中任意两个节点之间存在一条路径, 则说明无向拓扑图是连通的.  $L = D - A = [l_{ij}] \in R^{N \times N}$  表示拓扑图的拉普拉斯矩阵. 其中:  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$  表示拓扑图的度矩阵,  $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$  表示节点  $i$  的度. 则  $L = [l_{ij}]_{N \times N}$  可定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j; \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

1.2 相关引理

引理1<sup>[32]</sup> 对于一个无向连通拓扑图G,图G对应的Laplacian矩阵L有下列特点:

1) 对于任一  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ , 有

$$x^T Lx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

2) Laplacian矩阵L为半正定,有单零特征值.除零外的其他特征值均正定.

3) Laplacian矩阵L的非零最小特征值  $\lambda_2(L)$  满足

$$\lambda_2(L) = \min_{\|x\| \neq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 0} \frac{x^T Lx}{\|x\|^2} > 0,$$

因此,当  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  时,有

$$x^T Lx \geq \lambda_2(L) x^T x.$$

引理2<sup>[33]</sup> 如果存在一个连续的径向无界的函数  $V : R^n \rightarrow R_+ \cup \{0\}$  满足:

- 1)  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2) 系统任意解  $x(t)$  满足

$$D^*V(x(t)) \leq -aV^m(x(t)) - bV^n(x(t)).$$

则称系统达到全局固定时间稳定且收敛时间T满足

$$T = T_{\max} \leq \frac{1}{a(1-m)} + \frac{1}{b(n-1)}.$$

其中:  $a, b > 0; m \in (0, 1); n \in (1, +\infty)$ .

1.3 问题陈述

考虑含有N个智能体构成的非线性多智能体系统,智能体i的动力学模型可描述为

$$\dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t)) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中:  $x_i(t) \in R^N$  为第i个智能体的位置向量,  $u_i(t) \in R^N$  为第i个智能体的控制输入,  $f(t, x_i(t))$  为非线性函数.

为了研究方便,本文假设所有智能体都在一维空间中,即  $x_i(t), u_i(t) \in R$ . 因此,所得结果皆可用Kronecker积在N维空间上进行扩展. 考虑网络图组成:  $G = \{V, \varepsilon, A\}$  由  $\kappa$  个不相交子网络图  $G_1 = \{V_1, \varepsilon_1, A_1\}, \dots, G_\kappa = \{V_\kappa, \varepsilon_\kappa, A_\kappa\}$  构成. 另定义  $V_1 = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m_1}\}, \dots, V_\kappa = \{\nu_{m_\kappa+1}, \nu_{m_\kappa+2}, \dots, \nu_N\}$ ;  $\varsigma_1 = \{1, 2, \dots, m_1\}, \dots, \varsigma_\kappa = \{m_\kappa + 1, m_\kappa + 2, \dots, N\}$ . 则有  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_\kappa = V, V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_\kappa = \emptyset, \varsigma = \varsigma_1 \cup \varsigma_2 \cup \dots \cup \varsigma_\kappa; \{\varepsilon_1 \in \varepsilon\}, \dots, \{\varepsilon_\kappa \in \varepsilon\}$ .

定义1 对于给定的控制器  $u_i(i = 1, 2, \dots, N)$  与给定的任何初始值  $x_i(0)(i = 1, 2, \dots, N)$ , 都存在正数T以及固定的常数  $T_{\max} > 0$ , 且  $T < T_{\max}$ , 对于任意的  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow T} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \varsigma_1;$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \varsigma_2;$$

⋮

$$\lim_{t \rightarrow T} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \varsigma_\kappa.$$

则称闭环系统的多智能体达到固定时间分群一致性.

假设1 无向通信拓扑图G至少包含一棵有向生成树,且有向生成树形成的子图是强连通的.

假设2 存在一个已知正常数  $\rho$ , 对于任意  $x_i(t)$ , 满足下式:

$$|f(t, x_i(t))| \leq \rho |x_i(t) - x_{\sigma_i}|, \quad (2)$$

其中  $x_{\sigma_i}$  为智能体个体所在子群的分群参数.

2 基于事件触发的固定时间分群一致性

考虑多智能体系统(1), 给出分布式事件触发固定时间分群一致性控制协议如下:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\alpha \text{sig} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i)) - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j} \right]^p - \\ & \beta \text{sig} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i)) - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j} \right]^q - \\ & \gamma \text{sig} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i)) - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j} \right], \\ & t \in [t_k^i, t_{k+1}^i). \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $\alpha, \beta, \gamma$  都是大于0的实数;  $x_{\sigma_j}$  表示不同子群  $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_\kappa$  的分群参数, 是常数;  $\sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j}$  表示某一子群的智能体i接收到来自其他子群的所有智能体的综合影响, 当子群  $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_\kappa$  的分群参数为相同值时, 系统将不再分群, 最终系统收敛至该值;  $0 < p < 1; 1 < q < +\infty; t_k^i$  是触发时间;  $x_i(t_k^i)$  是智能体i在触发时刻的状态. 该控制律控制的智能体i只在自己触发时刻  $x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots$  进行控制器更新. 定义

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j}, \quad (4)$$

并定义误差系统

$$e_{x_i}(t) = x_i(t) - x_{\sigma_i}, \quad (5)$$

可得  $\dot{e}_{x_i}(t) = \dot{x}_i(t), e_{x_i}(t_k^i) = x_i(t_k^i) - x_{\sigma_i}$ . 结合式(4)和(5), 有

$$\begin{aligned} y_i(t) = & \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{\sigma_j} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij}x_{\sigma_j} - l_{ii}x_{\sigma_i} = \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}x_{\sigma_j} - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}x_{\sigma_i} = \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij}((x_i - x_{\sigma_i}) - (x_j - x_{\sigma_j})) = \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij}(e_{xi} - e_{xj}), \end{aligned} \tag{6}$$

即  $y_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(e_{xi} - e_{xj})$ . 令

$$\begin{cases} y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)]^T \in R, \\ e(t) = [e_{x1}(t), e_{x2}(t), \dots, e_{xN}(t)]^T \in R, \end{cases} \tag{7}$$

则有  $y(t) = Le(t)$ .

定义

$$\begin{cases} \omega_i(t) = e_{xi}(t_k^i) - e_{xi}(t), \\ \omega_j(t) = e_{xj}(t_k^j) - e_{xj}(t), \\ \varepsilon_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij}(e_{xi}(t_k^j) - e_{xj}(t_k^i)), \end{cases} \tag{8}$$

则有

$$\varepsilon_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij}(\omega_i(t) + e_{xi}(t) - \omega_j(t) - e_{xj}(t)). \tag{9}$$

再定义测量误差

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \alpha \text{sig}[\varepsilon_i(t_k^i)]^p + \beta \text{sig}[\varepsilon_i(t_k^i)]^q + \\ & \gamma \text{sig}[\varepsilon_i(t_k^i)] - \alpha \text{sig}[y_i(t)]^p - \\ & \beta \text{sig}[y_i(t)]^q - \gamma \text{sig}[y_i(t)], \end{aligned} \tag{10}$$

则式(3)可改写为

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -(\xi_i(t) + \alpha \text{sig}[y_i(t)]^p + \\ & \beta \text{sig}[y_i(t)]^q + \gamma \text{sig}[y_i(t)]). \end{aligned} \tag{11}$$

**定理1** 存在无向通信拓扑图  $G$  的多智能体系统, 在假设1、假设2成立的情况下, 考虑系统(1)存在不确定性非线性项  $f(t, x_i(t))$ , 给出下列分布式触发函数:

$$\vartheta_i(t) = |\xi_i(t)| - c\alpha|y_i(t)|^p - c\beta|y_i(t)|^q - c\gamma|y_i(t)|, \tag{12}$$

且系统满足如下条件:

$$\gamma - c\gamma - \frac{1}{2}\rho \geq 0, \tag{13}$$

则控制协议(3)在触发条件(12)作用下, 给定任意初始状态多智能体系统(1)均能在固定时间  $T$  内达到分群一致. 固定时间为

$$T \leq \frac{1}{2(1-c)\alpha(4\lambda_2)^{\frac{p+1}{2}}(1-p)} +$$

$$\frac{1}{2(1-c)\beta n^{\frac{1-q}{2}}(4\lambda_2)^{\frac{1+q}{2}}(q-1)}. \tag{14}$$

其中: 当  $\vartheta_i(t) \geq 0$  时触发控制器更新, 否则不触发;  $c$  是触发参数且  $c \in (0, 1)$ ;  $\lambda_2$  是系统的Laplacian矩阵的非零最小特征值.

**证明** 构造一个Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2}e^T L e, \tag{15}$$

对  $V$  关于时间  $t$  求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T(t)L\dot{e}(t) = e^T(t)L(u_i(t) + f_i(t)) = \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{xi}^T(t)l_{ij}(\xi_i(t) + \alpha \text{sig}[y_i(t)]^p + \\ & \beta \text{sig}[y_i(t)]^q + \gamma \text{sig}[y_i(t)] - f_i(t)). \end{aligned} \tag{16}$$

又由  $\text{sig}[y_i(t)]^\alpha \leq |y_i(t)|^\alpha$ , 且  $i \neq j$  时  $l_{ij} < 0$ , 有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} \text{sig}[y_i(t)]^\alpha \geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} |y_i(t)|^\alpha, \tag{17}$$

可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{xi}^T(t)l_{ij}(\alpha \text{sig}[y_i(t)]^p + \\ & \beta \text{sig}[y_i(t)]^q + \gamma \text{sig}[y_i(t)]) \geq \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{xi}^T(t)l_{ij}(\alpha|y_i(t)|^p + \beta|y_i(t)|^q + \gamma|y_i(t)|). \end{aligned} \tag{18}$$

由式(16)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{xi}^T(t)l_{ij}(\xi_i(t) + \alpha \text{sig}[y_i(t)]^p + \\ & \beta \text{sig}[y_i(t)]^q + \gamma \text{sig}[y_i(t)] - f_i(t)) \leq \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i^T(t)(\xi_i(t) + \alpha|y_i(t)|^p + \\ & \beta|y_i(t)|^q + \gamma|y_i(t)| - f_i(t)) \leq \\ & - \sum_{i=1}^N |y_i(t)|(|\xi_i(t)| + \alpha|y_i(t)|^p + \\ & \beta|y_i(t)|^q + \gamma|y_i(t)| - f_i(t)). \end{aligned} \tag{19}$$

由假设2非线性项  $f_i(t)$  满足的条件, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N |y_i(t)||f_i(t)| = \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}|e_{xi}(t) - e_{xj}(t)||f_i(t)| \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}|e_{xi}(t) - e_{xj}(t)||f_i(t) - f_j(t)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(e_{x_i}(t) - e_{x_j}(t))^2 \leq \\ & \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij}(e_{x_i}(t) - e_{x_j}(t)))^2 = \\ & \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^N y_i^2. \end{aligned} \tag{20}$$

由式(12)的触发函数在触发时刻值不小于0,可知

$$|\xi_i(t)| \geq c\alpha|y_i(t)|^p + c\beta|y_i(t)|^q + c\gamma|y_i(t)|. \tag{21}$$

把式(20)和(21)代入(19),得

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq \left( |y(t)|(c\alpha|y_i(t)|^p + c\beta|y_i(t)|^q + c\gamma|y_i(t)|) - \right. \\ & \alpha \sum_{i=1}^N y_i^{p+1}(t) - \beta \sum_{i=1}^N y_i^{q+1}(t) - \\ & \left. \gamma \sum_{i=1}^N y_i(t)^2 + \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^N y_i^2 \right) = \\ & - (1-c)\alpha \left( \sum_{i=1}^N y_i^2(t) \right)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (1-c)\beta \left( \sum_{i=1}^N y_i^2(t) \right)^{\frac{q+1}{2}} - \\ & \left( \gamma - c\gamma - \frac{1}{2}\rho \right) \sum_{i=1}^N y_i^2(t). \end{aligned} \tag{22}$$

由引理1可知

$$\lambda_2 e^T(t)Le(t) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i^2(t) \leq \lambda_N e^T(t)Le(t), \tag{23}$$

其中 $\lambda_N$ 是Laplacian矩阵最大特征值.

基于引理3和式(23),由式(22)可推得

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq - (1-c)\alpha(4\lambda_2 V)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (1-c)\beta(4\lambda_2 V)^{\frac{q+1}{2}} - \left( \gamma - c\gamma - \frac{1}{2}\rho \right) \lambda_2 V \leq \\ & - (1-c)\alpha(4\lambda_2)^{\frac{p+1}{2}} (V)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (1-c)\beta N^{\frac{1-q}{2}} (4\lambda_2)^{\frac{1+q}{2}} (V)^{\frac{q+1}{2}} - \\ & \left( \gamma - c\gamma - \frac{1}{2}\rho \right) \lambda_2 V. \end{aligned} \tag{24}$$

又因系统满足不等式(13),则有

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq - (1-c)\alpha(4\lambda_2)^{\frac{p+1}{2}} (V)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (1-c)\beta N^{\frac{1-q}{2}} (4\lambda_2)^{\frac{1+q}{2}} (V)^{\frac{q+1}{2}} = \\ & - aV^m - bV^n. \end{aligned} \tag{25}$$

其中:  $a = (1-c)\alpha(4\lambda_2)^{\frac{p+1}{2}}$ ,  $m = (p+1)/2$ ,  $b = (1-c)\beta N^{\frac{1-q}{2}}(4\lambda_2)^{\frac{1+q}{2}}$ ,  $n = (q+1)/2$ .

由引理2可知,系统(1)在控制协议(3)的作用下可实现基于分布式事件触发控制策略的固定时间分群一致,且固定收敛时间为

$$\begin{aligned} T & \leq \frac{1}{2(1-c)\alpha(4\lambda_2)^{\frac{p+1}{2}}(1-p)} + \\ & \frac{1}{2(1-c)\beta n^{\frac{1-q}{2}}(4\lambda_2)^{\frac{1+q}{2}}(q-1)}. \end{aligned} \quad \square$$

**定理2** 多智能体系统(1)在控制协议(3)和触发条件(12)的作用下,系统排除Zeno行为且系统的事件最小触发间隔为

$$\min(\tau_i) = \frac{c\gamma N^{\frac{q-1}{2}}}{\eta_1 \eta_2^2 + c\gamma N^{\frac{q-1}{2}} \eta_1 \eta_2}. \tag{26}$$

**证明** 由式(4)知,  $|y_i(t)|^p < |y_i(t)| < |y_i(t)|^q$ , 在时间 $[0, T]$ 内定义 $\psi_i = \frac{|\xi_i(t)|}{|y_i(t)|^q}$ , 对 $\psi_i$ 关于时间 $t$ 求导, 则在每个时间段 $[t_k^i, t_{k+1}^i]$ 内有

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) & = \\ & \frac{\xi(t)^T \dot{\xi}(t)}{|\xi(t)||y(t)|^q} - \frac{|\xi(t)|(y^q(t))^T (y^q(t))'}{|y(t)|^q |y(t)|^q} \leq \\ & \frac{\alpha(|y(t)|^p)' + \beta(|y(t)|^q)' + \gamma|y(t)|'}{|y(t)|^q} + \frac{|\xi(t)|(y^q(t))'}{|y(t)|^q} = \\ & \frac{\alpha(|y(t)|^p)' + \beta(|y(t)|^q)' + \gamma|y(t)|'}{|y(t)|^q} + \psi(t) \frac{(y^q(t))'}{|y(t)|^q} \leq \\ & (1+\psi(t)) \left( \frac{\alpha(|y(t)|^p)' + (1+\beta)(|y(t)|^q)' + \gamma|y(t)|'}{|y(t)|^q} \right) \leq \\ & \frac{(1+\psi(t))|L||e|}{|y(t)|^q} (\alpha p|y(t)|^{p-1} + \beta q|y(t)|^{q-1} + \gamma) \times \\ & (|\xi(t)| + c\alpha|y(t)|^p + c\beta|y(t)|^q + c\gamma|y(t)|^q + 1) \leq \\ & (1+\psi(t))|L||e|(\alpha p|y(t)|^{p-1} + \beta q|y(t)|^{q-1} + \gamma) \times \\ & (\psi(t) + c\alpha|y(t)|^{p-q} + c\beta + c\gamma|y(t)|^1 + |y(t)|^{-q} + 1) \leq \\ & |L||e|(\alpha p|y(t)|^{p-1} + \beta q|y(t)|^{q-1} + \gamma)(\psi(t) + \\ & c\alpha|y(t)|^{p-q} + c\beta + c\gamma|y(t)|^1 + |y(t)|^{-q} + 1)^2 = \\ & \chi_1(\chi_2 + \psi(t))^2. \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_1 & = |L||e|(\alpha p|y(t)|^{p-1} + \beta q|y(t)|^{q-1} + \gamma), \\ \chi_2 & = c\alpha|y(t)|^{p-q} + c\beta + c\gamma|y(t)|^1 + |y(t)|^{-q} + 1. \end{aligned}$$

由引理1和式(23),有

$$\sum_{i=1}^N y_i^2(t) \leq \lambda_N e^T(t)Le(t) \leq 2\lambda_N V \leq 2\lambda_N V_0, \tag{28}$$

其中 $V_0 = (1/2)e^T(0)Le(0)$ . 则有

$$|y(t)| = \sqrt{4\lambda_N V_0}, \tag{29}$$

也即可得出 $|y(t)|$ 的任何幂次方的值都恒大于零. 因此,可推出 $\chi_1$ 和 $\chi_2$ 定存在最大值,令其最大值为

$$\begin{cases} \max(\chi_1) = \eta_1, \\ \max(\chi_2) = \eta_2. \end{cases} \tag{30}$$

由式(27)可得

$$\dot{\psi}(t) \leq \eta_1(\eta_2 + \psi(t))^2, \quad (31)$$

因此,  $\dot{\psi}_i(t)$  满足

$$\dot{\psi}_i(t) \leq \phi_i(t, \phi_0^i), \quad (32)$$

且  $\phi_i(0, \phi_0^i) = \phi_0^i$ . 于是  $\phi_i(t, \phi_0^i)$  是下式的解:

$$\dot{\phi}_i = \eta_1(\eta_2 + \phi_i)^2, \quad (33)$$

解为

$$\phi_i(\tau_i, 0) = \frac{\tau_i \eta_1 \eta_2^2}{1 - \tau_i \eta_1 \eta_2}. \quad (34)$$

由事件触发条件(4)和式(21)可得

$$|\xi_i(t)| \geq c\alpha|y_i(t)|^p + c\beta|y_i(t)|^q + c\gamma|y_i(t)| \geq c(\alpha + \beta + \gamma)|y_i(t)|^q, \quad (35)$$

则有

$$\frac{|\xi_i(t)|}{|y_i(t)|^q} \geq c\gamma. \quad (36)$$

由引理3得

$$\frac{|\xi_i(t)|}{|y_i(t)|^q} \leq \frac{1}{N^{1-q}} \frac{|\xi_i(t)|}{|y_i(t)|^q}, \quad (37)$$

则式(36)可写为

$$\frac{|\xi_i(t)|}{|y_i(t)|^q} \geq N^{\frac{q-1}{2}} c\gamma. \quad (38)$$

于是在时间间隔  $[t_k^i, t_{k+1}^i)$  内, 有

$$\phi_i(\tau_i, 0) \geq N^{\frac{q-1}{2}} c\gamma. \quad (39)$$

结合式(34)和(38), 可得触发时间间隔

$$\tau_i \geq \frac{c\gamma N^{\frac{q-1}{2}}}{\eta_1 \eta_2^2 + c\gamma N^{\frac{q-1}{2}} \eta_1 \eta_2},$$

故可得事件触发最小时间间隔为

$$\min(\tau_i) = \frac{c\gamma N^{\frac{q-1}{2}}}{\eta_1 \eta_2^2 + c\gamma N^{\frac{q-1}{2}} \eta_1 \eta_2}.$$

显然,  $\min(\tau_i)$  恒大于0, 故系统排除Zeno行为.  $\square$

### 3 实例仿真

假设系统的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + 0.3x_i(t) + \sin(t). \quad (40)$$

其中非线性项  $f_i(t) = 0.3x_i(t) + \sin(t)$  满足假设2, 可得  $\rho = 0.3$ .

考虑由10个智能体构成的多智能体系统, 智能体间的无向连通拓扑结构如图1所示. 将多智能体系统分为3个子群且分群参数为1、4、-1, 即  $x_{\sigma_i} = [1, 4, 4, -1, 1, 1, 4, -1, -1, 4]^T$ ,  $\zeta_1 = \{1, 5, 6\}$ ,  $\zeta_2 = \{2, 3, 7, 10\}$ ,  $\zeta_3 = \{4, 8, 9\}$ . 由图1算得  $\lambda_2(L) = 0.302$ . 取系统的各个智能体初始状态为  $x(0) = [5, -4, 3, -3, 8, -2, -5, -7, 4, 6]^T$ , 系统增益参数为  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $p = 0.6$ ,  $q = 1.1$ ,  $c = 0.5$ . 由式

(14)得出  $T_{\max} = 21.627$  s.

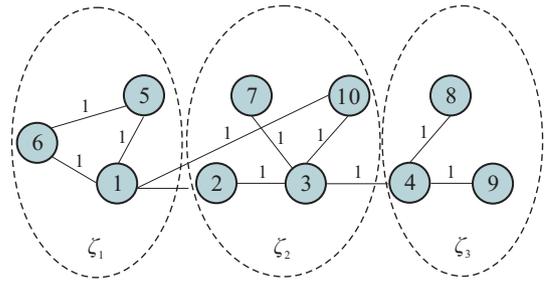


图1 拓扑图

图2表示控制协议(3)作用下的智能体的状态轨迹, 可以看出, 系统大概在4.5s左右实现分群一致. 收敛时间明显小于  $T_{\max}$ .

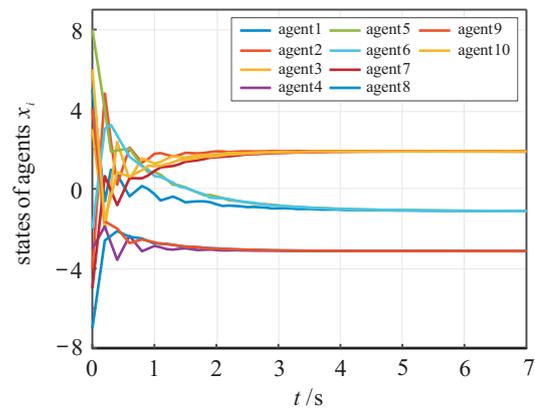


图2 智能体状态轨迹

为了便于分析所提出协议的快速收敛性, 图3为多智能体系统在相同智能体初始状态下, 不结合固定时间控制器设计的协议作用下的各个智能体的状态轨迹. 由图3可以看出, 系统在8s之后才能实现分群一致. 通过对比, 图2中的智能体收敛速度明显比图3快, 且固定时间控制器不影响系统智能体状态的最终分群收敛值.

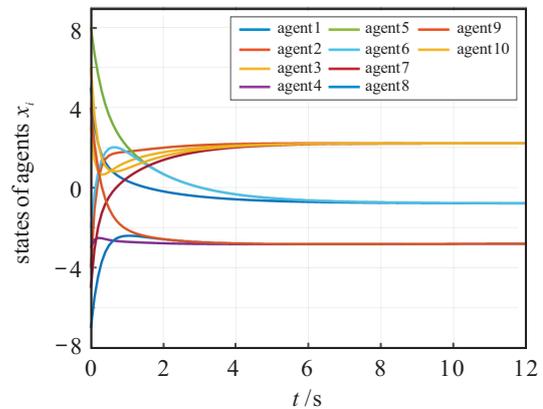


图3 不加固定时间控制器的智能体状态轨迹

图4是各智能体控制输入轨迹. 可以看出, 系统达到固定时间分群一致后控制输入维持稳定, 稳定值为0.

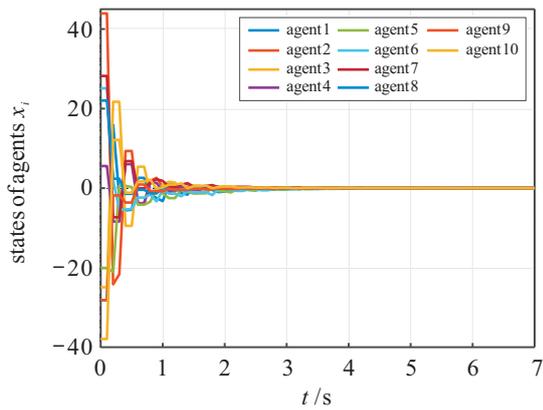


图4 控制输入轨迹

图5表示控制器在事件触发控制作用下接收到智能体状态输入轨迹。可以看出:当触发函数小于0时,传输到控制器的状态保持不变,也即说明在此阶段控制器不更新智能体输入状态;当触发函数值 $\geq 0$ 时,控制器更新智能体输入状态。

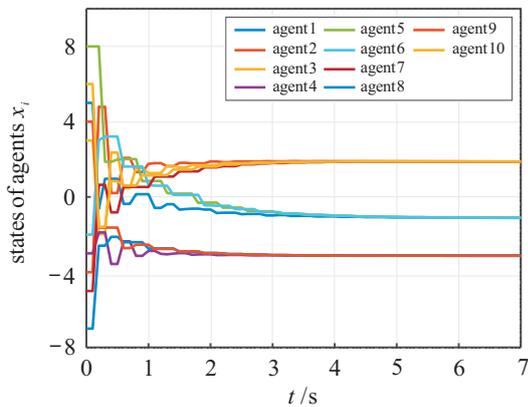


图5 传输到控制器的触发状态轨迹

图6表示协议(3)作用下采样步长为0.01s的各个智能体的事件触发时刻,作为对比,图6中也给出了系统不结合事件触发控制方法的控制器更新时刻。可以看出,在事件触发机制作用下,控制器的智能体状态更新次数明显减少。还可以看出分布式事件触发控制器的特点,即每个智能体的事件触发时刻以及

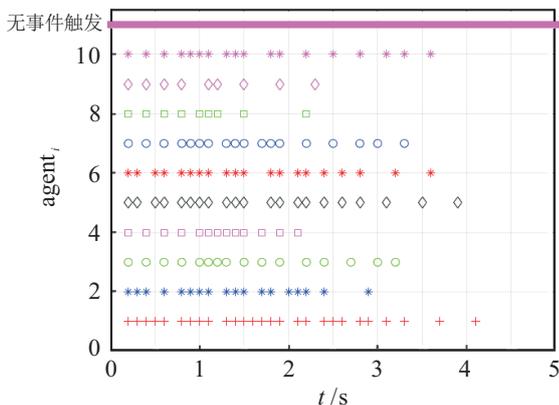


图6 智能体的触发时刻

触发间隔都不相同,能更好地针对各个智能体实现更有效的节能控制;而且所提出控制协议能明显减少控制器更新频次,进而使系统减少能量浪费。

### 4 结论

本文研究了基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性问题。给出的分布式分群一致性控制协议不仅能节省系统的能耗,而且还使系统拥有快速的收敛速度。在所提出协议控制下系统收敛时间不受智能体初始条件的影响,收敛时间上界可估计且系统不存在Zeno行为。另外,该协议不受入度平衡条件限制,可通过设置分群参数对系统任意划分子群。下一步的工作是针对有向拓扑,结合事件触发控制机制研究带有扰动的多智能体系统的固定时间分群一致性问题。

### 参考文献(References)

- [1] Su W S, Hu Y P, Li K B, et al. Rigidity of similarity-based formation and formation shape stabilization[J]. Automatica, 2020, 121: 109183.
- [2] Chu X, Peng Z X, Wen G G, et al. Distributed formation tracking of multi-robot systems with nonholonomic constraint via event-triggered approach[J]. Neurocomputing, 2018, 275: 121-131.
- [3] Chen T P, Wu T, Qing X L, et al. A distributed robust state estimation algorithm for power systems considering maximum exponential absolute value[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2021, 133: 107267.
- [4] Xia Y Q, Na X T, Sun Z Q, et al. Formation control and collision avoidance for multi-agent systems based on position estimation[J]. ISA Transactions, 2016, 61: 287-296.
- [5] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs[C]. Proceedings of the Asian Control Conference. Hong Kong, 2009: 105-110.
- [6] Cui Q, Xie D M, Jiang F C. Group consensus tracking control of second-order multi-agent systems with directed fixed topology[J]. Neurocomputing, 2016, 218: 286-295.
- [7] Li X B, Yu Z H, Li Z W, et al. Group consensus via pinning control for a class of heterogeneous multi-agent systems with input constraints[J]. Information Sciences, 2021, 542: 247-262.
- [8] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(2): 334-348.
- [9] Yu J Y, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays[J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(6): 340-348.
- [10] Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems

- with diverse input and communication delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2122-2128.
- [11] An B R, Liu G P, Tan C. Group consensus control for networked multi-agent systems with communication delays[J]. ISA Transactions, 2018, 76: 78-87.
- [12] Qin J H, Ma Q C, Zheng W X, et al.  $H_\infty$  group consensus for clusters of agents with model uncertainty and external disturbance[C]. The 54th IEEE Conference on Decision and Control. Osaka, 2015: 2841-2846.
- [13] Chen L K, Guo L X, Yang Y Q. Projective group consensus of multi-agent systems with arbitrary parameter[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2021, 34(2): 618-631.
- [14] Shahamatkhan E, Tabatabaei M. Leader-following group consensus of discrete-time fractional-order double-integrator multi-agent systems[J]. ISA Transactions, 2020, 106: 262-270.
- [15] Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [16] Dimarogonas D V, Frazzoli E. Distributed event-triggered control strategies for multi-agent systems[C]. The 47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, 2009: 906-910.
- [17] Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5): 1291-1297.
- [18] Ma H W, Wang D, Liu D R, et al. Continuous-time group consensus using distributed event-triggered control[C]. The 7th International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI). Wuyi, 2015: 174-178.
- [19] Ma H W, Liu D R, Wang D, et al. Centralized and decentralized event-triggered control for group consensus with fixed topology in continuous time[J]. Neurocomputing, 2015, 161: 267-276.
- [20] Yu M, Yan C, Li C. Event-triggered tracking control for couple-group multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(14): 6152-6169.
- [21] Yu M, Yan C, Xie D M. Event-triggered control for couple-group multi-agent systems with logarithmic quantizers and communication delays[J]. Asian Journal of Control, 2017, 19(2): 681-691.
- [22] Hu A H, Cao J D, Hu M F, et al. Event-triggered group consensus for multi-agent systems subject to input saturation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(15): 7384-7400.
- [23] Zuo Z Q, Ma J J, Wang Y J. Layered event-triggered control for group consensus with both competition and cooperation interconnections[J]. Neurocomputing, 2018, 275: 1964-1972.
- [24] Li K Y, Ji L H, Yang S S, et al. Couple-group consensus of cooperative-competitive heterogeneous multiagent systems: A fully distributed event-triggered and pinning control method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(6): 4907-4915.
- [25] Li K Y, Ji L H, Zhang C J, et al. Fully distributed event-triggered pinning group consensus control for heterogeneous multi-agent systems with cooperative-competitive interaction strength[J]. Neurocomputing, 2021, 464: 273-281.
- [26] Ding L, Han Q L, Ge X H, et al. An overview of recent advances in event-triggered consensus of multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(4): 1110-1123.
- [27] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [28] Sun F L, Zhu W, Li Y F, et al. Finite-time consensus problem of multi-agent systems with disturbance[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(12): 2576-2587.
- [29] Li G P, Wang X Y, Li S H. Finite-time output consensus of higher-order multiagent systems with mismatched disturbances and unknown state elements[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(12): 2571-2581.
- [30] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [31] Shang Y L. Fixed-time group consensus for multi-agent systems with non-linear dynamics and uncertainties[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(3): 395-404.
- [32] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [33] Hao L L, Zhan X S, Wu J, et al. Fixed-time group consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19(1): 200-208.

## 作者简介

吴新杰(1995—),男,硕士生,从事多智能体系统协同控制的研究, E-mail: 504112011@qq.com;

陈世明(1977—),男,教授,博士生导师,从事复杂网络理论及应用、多智能体系统协同控制、PSO优化算法等研究, E-mail: c1977318@hotmail.com.

(责任编辑: 李君玲)