

控制与决策

Control and Decision

二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法

时侠圣, 孙佳月, 徐磊, 杨涛

引用本文:

时侠圣, 孙佳月, 徐磊, 杨涛. 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1336–1344.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1262>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化

Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication

控制与决策. 2023, 38(5): 1412–1419 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0369>

二阶多智能体系统包含控制的时滞范围优化

Delay range optimization for containment control of second-order multi-agent systems

控制与决策. 2023, 38(5): 1345–1351 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0604>

输出死区下的随机多智能体系统一致性饱和控制

Consensus saturation control for stochastic multi-agent systems with output dead zones

控制与决策. 2023, 38(5): 1249–1257 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0296>

一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法

Active disturbance rejection distributed optimization algorithm for first-order multi-agent disturbance systems

控制与决策. 2022, 37(6): 1559–1566 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1572>

一种自适应拟牛顿-状态转移混合智能优化算法及应用

A hybrid state transition optimization algorithm based on adaptive quasi-newton method and its application

控制与决策. 2021, 36(10): 2451–2458 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0214>

二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法

时侠圣^{1,2}, 孙佳月^{3†}, 徐磊³, 杨涛³

- (1. 安徽大学 人工智能学院, 合肥 230601;
2. 大连理工大学 工业装备智能控制与优化教育部重点实验室, 辽宁 大连 116024;
3. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110004)

摘要: 分布式资源分配问题旨在满足局部约束下完成一定量资源分配的同时使全局成本函数最小. 首先, 针对无向连通网络下二阶积分器型线性智能体系统, 结合 Karush-Kuhn-Tucker 条件, 提出一种初始值任意的分布式优化算法, 其中, 全局等式约束对偶变量实现比例积分控制, 局部凸函数不等式约束对偶变量实现自动获取. 当全局成本函数为非光滑凸函数时, 借助集值 LaSalle 不变性原理理论证明所提出算法渐近收敛到全局最优解. 其次, 将所提出算法推广至无向连通网络下参数未知的 Euler-Lagrange 多智能体系统. 当全局成本函数为非光滑凸函数时, 借助 Barbalat 引理理论证明所提出算法渐近收敛到全局最优解. 最后, 通过数值仿真验证了所提算法的有效性.

关键词: 自适应; 初始值任意; 非光滑; 资源分配; 二阶系统

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1262

引用格式: 时侠圣, 孙佳月, 徐磊, 等. 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法[J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1336-1344.

Distributed nonsmooth resource allocation algorithms over second-order multi-agent systems

SHI Xia-sheng^{1,2}, SUN Jia-yue^{3†}, XU Lei³, YANG Tao³

- (1. School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Control and Optimization for Industrial Equipment of Ministry of Education, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 3. The State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The distributed resource allocation problem aims to allocate a mount of resources under some local constraints while minimizing the total cost function. First, based on the Karush-Kuhn-Tucker conditions, an initialization-free distributed optimization algorithm is proposed for second-order multi-agent systems over an undirected connected network. The global equality constraint dual variable is developed with a proportional-integral control, and the local convex function inequality constraint dual variable is sought adaptively. Based on the set-value LaSalle's invariance principle, it is shown that the designed algorithm asymptotically converges to the optimal point if the global cost function is nonsmooth convex. Then, the proposed algorithm is extended to Euler-Lagrange multi-agent systems over an undirected connected network. Furthermore, by virtual of the Barbalat's lemma, it is shown that the proposed algorithm asymptotically converges to the optimal solution if the global cost function is nonsmooth convex. Finally, several numerical examples are used to illustrate the performance of the proposed algorithms.

Keywords: adaptive; initialization-free; nonsmooth; resource allocation; second-order systems

0 引言

随着多智能体系统规模不断增大, 诸如无人侦察机编队^[1]、机器人网络^[2]、传感网络^[3]和能源系统^[4]等, 传统的集中式算法无法有效处理大规模网络系统

中的优化问题. 因此, 具有灵活扩展性、无需中央控制节点等特性的分布式优化策略受到广泛关注. 分布式优化策略旨在仅通过邻居智能体间的局部信息交互解决大规模系统的优化问题. 文献[5]对分布式

收稿日期: 2022-07-15; 录用日期: 2022-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(62133003); 国家自然科学基金重大项目(61991403, 61991400); 大连理工大学工业装备智能控制与优化教育部重点实验室项目(LICO2022TB02).

†通讯作者. E-mail: sunjiayue@isc.neu.edu.cn.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

优化算法进行了全面总结与归纳,并将其分为离散时间算法和连续时间算法两大类.由于分布式优化算法的执行一般多依赖于实际信息物理系统,而大多数实际物理系统都是连续时间系统,越来越多的学者尝试将智能体动力学特性融入到连续时间算法设计中^[6].例如文献[7-13]分别研究了一阶积分器型、二阶积分器型、一般高阶和一般线性多智能体系统的分布式协同优化问题,即各智能体协同合作实现决策量的最优一致性.相比于最优一致性问题,从智能电网、边缘计算等新兴领域中总结出来的亟须解决的分布式资源分配问题更为复杂^[4].资源分配问题旨在协同寻求局部目标函数之和的最优值,且所有决策变量受到耦合等式约束和局部不等式或集合约束.资源分配问题在很多领域都存在广泛的应用前景^[15],因而吸引了许多学者的关注.

针对资源分配问题中的局部凸集约束,文献[16]利用映射算子和原始对偶思想设计了一种适用于无向图的分布式优化算法,且该算法可以任意选取初始值.上述映射算子方法被广泛应用于分布式资源分配求解中,随后,一系列优化算法相继涌现.例如,文献[17-20]分别研究了无初始值约束、带扰动特性动力学系统和成本函数非光滑下的资源分配问题.其中:文献[20]利用次微分表示不可微凸成本函数的梯度,并利用集值Lie微分分析算法收敛性;文献[18]则将成本函数表示为可微与不可微两项之和,并利用邻近算子处理成本函数中非光滑项.资源分配问题作为具有约束的分布式优化问题特例,利用惩罚函数法(内点法)将智能体局部约束转移至成本函数中.文献[21-23]分别研究了动态期望资源总量、预设时间收敛和动态通信网络下的资源分配问题,其中文献[22]使用时基生成器实现算法在预定时间收敛至最优解邻域内.基于内点法的分布式资源分配算法要求智能体初始状态必须在局部约束范围内,而当约束比较复杂时,初始点的选择较为困难.为此,文献[24-26]基于惩罚函数法(外点法)设计了一类初始值任意的自适应分布式资源分配算法.

可以发现,上述算法普遍面向一阶动力学特性多智能体系统.而在实际应用中,二阶及以上阶次多智能体系统更为普遍,例如四旋翼无人机、移动机器人、气垫船等均可描述为二阶微分方程^[27].针对二阶多智能体系统中分布式资源分配问题,文献[28-31]分别研究了一般多智能体系统、带有非线性项动力学特性多智能体系统、带扰动项动力学系统以及带局部约束项的资源分配问题,其中文献[31]利用微

分映射算子处理智能体局部凸约束.此外,文献[32]利用精确惩罚函数法将智能体局部箱式约束转移至成本函数中,并利用比例积分策略设计了一种分布式资源分配算法.与文献[31]类似,基于跟踪思想,文献[33-34]分别利用固定时间收敛方法和精确惩罚函数法设计了一种分布式资源算法,其中文献[33]所设计的算法能够在固定时间内满足智能体局部凸集约束.文献[35]针对已知和未知扰动分别设计了内模观测器和扩张状态观测器,实现了带扰动项二阶积分器型系统的分布式资源分配.

上述基于误差跟踪策略的算法虽然能够实现资源分配问题求解,但需要智能体额外设置虚拟一阶或二阶系统变量,即大部分现有算法并没有完全将智能体动力学特性与算法设计结合起来.此外,上述二阶系统为理想的线性系统.相比于线性系统,非线性的欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange, EL)二阶多智能体系统能更精确地描述许多实际物理系统的动力学行为^[36].已有很多成果是针对EL系统的分布式最优一致性问题展开研究的,其中包括无约束分布式优化问题^[37-44]和局部约束分布式优化问题^[45-47].例如:文献[37-40]利用事件触发通信机制实现了智能体间的按需通信;文献[41]利用自适应通信权重设计了一类分布式优化算法;文献[45-46]利用映射算子解决了智能体局部约束;文献[47]利用惩罚函数法将智能体局部约束转移至成本函数中,实现了局部约束求解.相比于上述最优一致性问题,分布式资源分配问题中的全局等式或不等式约束增加了算法设计和分析难度.文献[48]设计了一类自适应算法以解决全局不等式约束下的资源分配问题.文献[49]利用误差跟踪策略,分别针对参数已知和参数未知情形下的EL系统设计了分布式资源分配算法,其中各智能体成本函数不仅与自身信息相关,也与其他智能体决策信息相关.然而,上述算法并没有同时考虑全局等式约束和局部不等式约束下的资源分配问题.在许多实际应用中,智能体决策量或资源分配量会受到物理环境或能量的限制.例如:在智能电网经济调度问题中,发电机组发电能力存在上下限约束;移动边缘计算资源分配中存在能耗约束等.所以智能体局部约束在资源分配问题中是必不可少的.

受上述讨论启发,本文研究线性二阶积分器和非线性EL多智能体系统的分布式非光滑资源分配问题,并设计一系列初始值任意的自适应分布式优化算法.本文的贡献点可总结如下:

1) 面对线性二阶积分器系统,本文利用 Karush-

Kuhn-Tucker (KKT) 条件直接针对智能体设计控制策略, 利用局部约束梯度及其对偶变量实现智能体决策变量局部约束. 与现有误差跟踪策略不同^[31], 本文所设计的算法收敛速度较快且结构简单. 与惩罚函数法相比^[32], 本文算法不存在抖颤现象.

2) 针对 EL 系统, 本文利用对偶思想同时考虑智能体局部约束和全局智能体耦合等式约束, 并利用集值 LaSalle 不变性原理和 Barbalat 引理完成算法收敛性分析.

3) 本文算法适用范围更广. 相比于现有算法中可微强凸且梯度 Lipschitz 光滑的成本函数^[28-34,48], 本文所设计的算法无此要求, 仅要求成本函数为非光滑(不可微)凸函数.

符号说明: \mathbf{R} 表示实数集. $\exp(\cdot)$ 和 $\ln(\cdot)$ 分别表示自然指数函数和自然对数函数. $\|\cdot\|$ 默认为 2 范数. 0_n 、 1_n 和 I_n 分别表示 n 阶全 0、全 1 向量和单位阵. 对于向量 $x \in \mathbf{R}^m$, 其转置记为 x^T . 若向量 x 中每一个元素都小于等于零或小于零, 则记为 $x \leq 0$ 或 $x < 0$. 符号 $>$ 、 \geq 类似. 对于向量 $x \in \mathbf{R}^n$, 定义符号 $(x)^+ = [\max\{0, x_1\}, \dots, \max\{0, x_n\}] \in \mathbf{R}^n$. A^{-1} 表示矩阵 A 的逆. $\text{diag}\{x_1, \dots, x_n\}$ 表示由一串实数或矩阵 x_1, \dots, x_n 构成的对角矩阵或块对角矩阵. \otimes 表示 Kronecker 积. $\nabla f(\cdot)$ 表示函数 $f(x)$ 的梯度. 对于局部 Lipschitz 函数(一种局部一致的连续函数) $f(x): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, 其广义梯度定义为

$$\partial f = \text{co}\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, x_k \notin \Pi \cup S_f\right\}.$$

其中: $\text{co}(\cdot)$ 表示凸包, Π 表示一个测度为零的集合, S_f 表示函数 f 不可微点组成的集合. 若 $f(x)$ 为凸函数, 其广义梯度 $\partial f(x)$ 与其次梯度一致, 则 $\partial f(x) = \{\zeta \in \mathbf{R}^m \mid f(y) - f(x) \geq \zeta^T(y - x), \forall y \in \mathbf{R}^m\}$.

1 基础知识介绍

1.1 代数图论

在多智能体系统中, 用图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 描述智能体间的通信网络拓扑. 其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示所有智能体节点组成的集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示智能体间的通信链路集合. 若智能体 i, j 之间存在直接通信链路, 则图 G 对应伴随矩阵 $\mathbf{A} := [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素定义为 $a_{ij} > 0$; 否则记为 $a_{ij} = 0$. 若任意两智能体间都可通过有限个智能体实现通信, 则图 G 称为连通网络. 此外, 图 G 对应的拉普拉斯矩阵定义为 $L = B - \mathbf{A}$, 其中对角阵 $B := [b_{ij}]_{n \times n}$ 定义为 $b_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \forall i \in \mathcal{V}$.

假设 1 G 为连通无向简单图(无环和平行边).

注 1 上述假设 1 表明在图 G 中任意两智能体间

都存在路径, 这样能够确保每个智能体的局部信息都可通过相邻智能体间的信息交互分散至整个网络, 进而确保每个智能体都能够以分布式方式收敛至全局最优解. 该假设在多智能体系统分布式一致性、分布式优化等问题中经常见到^[5-6,18,32].

引理 1 若假设 1 成立, 则存在正交矩阵 $Q = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}1_n, R\right] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得下式^[50]成立:

$$RA_1^{-1}R^T L = LRA_1^{-1}R^T = K_n. \quad (1)$$

其中: $K_n = I_n - \frac{1}{n}1_n 1_n^T$, $R \in \mathbf{R}^{n \times n-1}$, $\Lambda = \text{diag}\{\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n\}$ 且 $\rho_i (i \in \mathcal{V})$ 为拉普拉斯矩阵 L 的非降序排列特征根.

1.2 资源分配问题描述

资源分配问题数学模型可归纳如下:

$$\begin{aligned} \min & f(x); \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n d_i, g_i(x_i) \leq 0, \forall i \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $g_i(x_i) = [g_{i,1}(x_i), \dots, g_{i,q_i}]^T \in \mathbf{R}^{q_i}$, q_i 表示智能体 i 局部凸函数不等式约束个数. 智能体局部凸函数约束定义为 $g_{i,j}(x_i): \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, q_i$, $f_i(x_i): \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ 分别为智能体 i 局部成本函数和全局成本函数. 以智能电网经济调度问题为例, 每个发电机组都有自己的发电能力约束, 此时智能体局部凸函数不等式约束个数仅有一项, 即 $g_i(x_i) = (x_i - x_i^{\min})(x_i - x_i^{\max})$. 其中: x_i^{\max} 、 x_i^{\min} 分别为发电机组的发电能力上下限, d_i 为每个智能体的局部期望资源量. 此外, 为提高算法鲁棒性, 各智能体隐私性信息 d_i 、 $\partial f_i(x_i)$ 、 $g_i(x_i)$ 等不允许在网络间传播. 为确保算法收敛, 下面的假设是必要的.

假设 2 $f(x)(g_{i,j}, j = 1, 2, \dots, q_i, \forall i \in \mathcal{V})$ 为凸函数, 且至少存在一点 \tilde{x} 使得 $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^n d_i$ 和 $g(\tilde{x}) < 0_q$. 其中: $q = \sum_{i=1}^n q_i$, $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T$, $g = [g_1^T, g_2^T, \dots, g_n^T]^T$, $\tilde{x} = [\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T, \dots, \tilde{x}_n^T]^T$.

引理 2 若假设 2 成立, 则 x^* 是问题(2)的最优解当且仅当存在实数向量 $(x^*, y^*, \tau^*) \in \mathbf{R}^{ns} \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^q$ 满足如下条件^[25]:

$$\begin{aligned} \zeta^* + (\eta^*)^T \tau^* - 1_n \otimes y^* &= 0_{ns}, \\ \sum_{i=1}^n x_i^* &= \sum_{i=1}^n d_i, \\ g(x^*) &\leq 0_q, \tau^* \geq 0_q, (\tau^*)^T g(x^*) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\zeta^* \in \partial f(x^*)$, $\eta^* \in \partial g(x^*)$.

1.3 微分包含与非光滑分析

考虑如下微分包含系统:

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x), x(0) = x_0, \quad (4)$$

其中 $\mathcal{F} : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ 表示一个集值映射. 若存在一绝对连续映射 $x : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 在时间 $t \in [0, T]$ 几乎处处满足系统(4), 则称 x 为系统(4)的一个Caratheodory解. 若对于任意 $x(0) \in S$, 至少存在一条(或任意)解使得 $x(t)$ 都属于集合 S , 则称集合 S 是系统(4)的弱(或强)正不变集. 令 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续可微函数, 则函数 V 在系统(4)上的集值Lie微分定义为 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(x) = \{v^T \nabla V(x) | v \in \mathcal{F}(x)\}$.

引理3(文献[19]中引理4) 假设 \mathcal{F} 取值是非空的、凸的和紧的, 并且满足上半连续和局部有界. 令 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续可微函数, S 是系统(4)的强正不变集. 对于所有 $x \in S$, 如果满足 $\max \mathcal{L}_{\mathcal{F}}V(x) \leq 0$, 则每个从 S 出发的解 $x(t)$ 都收敛到其最大弱正不变集 $S \cap \{0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(x)\}$. 若上述集合有限, 则系统(4)的任一解都收敛至该集合.

2 二阶积分器型系统算法设计与分析

首先考虑简单的二阶积分器型线性系统, 例如加速驱动车辆可构建为二阶系统^[51]. 每个智能体的动力学特性描述如下:

$$\ddot{x}_i = u_i. \quad (5)$$

其中: $u_i \in \mathbf{R}^s$ 为智能体 i 的控制策略, x_i 同时也是资源分配问题(2)中资源分配量. 本节旨在针对具有式(5)特性的多智能体系统设计合适的控制策略 u_i , 使得智能体位置量 x_i 收敛至问题(2)的最优解.

2.1 算法设计

从引理2可知, 资源分配求解关键在于寻找全局最优拉格朗日乘子 y^* 和局部最优对偶变量 τ^* . 本文借鉴多智能体一致性控制思想, 给每个智能体分配一局部拉格朗日乘子 λ_i , 然后设计比例积分控制策略, 使得所有智能体协同收敛至 y^* . 此外, 利用 \max 算子实现智能体对偶变量 τ_i 的自适应获取. 若 $g_i(x_i) \leq 0$, 则 τ_i 不变; 否则 τ_i 增大. 最后基于引理2中KKT条件, 利用 λ_i, τ_i 设计梯度下降策略. 具体的迭代策略设计如下(算法1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= -v_i - (\alpha \zeta_i + \eta_i^T (\tau_i + g_i(x_i + v_i))^+ - \lambda_i), \\ \dot{\lambda}_i &= - \sum_{j=1}^n a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j) - z_i - x_i - v_i + d_i, \\ \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j), \end{aligned}$$

$$\dot{\tau}_i = -\tau_i + (\tau_i + g_i(x_i + v_i))^+. \quad (6)$$

其中: $\zeta_i \in \partial f_i(x_i + v_i), \eta_i \in \partial g_i(x_i + v_i) \subset \mathbf{R}^{q_i \times s}; z_i(0) = 0, \tau_i(0) \geq 0$; 控制参数 $\alpha > 0, \alpha$ 的增加不会改变问题最优解, 且随着 α 的减小, 相应的 λ^* 会减小, 进而提高算法的收敛速度. 在式(6)中, z_i 与 $\sum_{j=1}^n a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j)$ 一起实现局部拉格朗日乘子 λ_i 的比例积分控制. 此外, 变量 z_i 能够弥补实际资源量 x_i 与局部期望资源量 d_i 的差值, 确保资源分配问题(2)中等式约束成立, 实现一定量资源的精确分配. 变量 τ_i 的作用是确保智能体局部凸函数不等式约束成立, 且在式(6)中自适应变动直至智能体状态满足局部凸函数不等式约束. 最后, 利用成本函数和局部约束凸函数梯度信息驱动智能体状态到达最优值.

注2 与已有二阶多智能体系统分布式资源分配算法相比, 本文设计的算法1具有以下优势: 1) 在实际工程中, 智能体局部状态一般都会存在约束项, 比如智能电网经济调度问题中各发电机组的输出功率存在上下限. 与文献[28-30, 35]相比, 本文将智能体局部约束考虑进来, 更具实用性. 2) 与文献[31, 33-34]中误差跟踪策略相比, 本文算法直接针对智能体二阶导设计控制策略, 算法设计更为简单, 且智能体所需变量储存空间较少. 3) 与文献[32]中精确罚函数法(内点法)相比, 本文所设计的算法不存在抖动现象, 且无需手动设置全局性惩罚因子, 惩罚因子(对偶变量) τ_i 自适应变化. 4) 文献[31-32]中要求算法初始状态满足智能体局部约束, 面对复杂约束情形时初始点不易选取. 与之相比, 本文算法对智能体初始状态无约束, 可高效解决复杂约束和动态约束资源分配问题. 5) 本文研究资源分配问题中智能体成本函数 $f(x)$ 仅为一般非光滑(不可微)凸函数. 相比于已有文献的强凸函数以及Lipschitz光滑梯度, 本文所设计的算法应用对象更广.

2.2 算法收敛性分析

引理4 令式(6)的稳定点为 $(x^*, v^*, \lambda^*, z^*, \tau^*)$, 且假设1和假设2成立, 则 x^* 为问题(2)的最优解, 其中 x, v, λ, z, τ 分别表示变量 $x_i, v_i, \lambda_i, z_i, \tau_i$ 的聚合向量.

定理1 若假设1和假设2成立, 且参数 $\alpha > 0$, 则系统(5)在算法1的作用下收敛至问题(2)的最优解.

3 欧拉-拉格朗日系统算法设计与分析

考虑EL系统的分布式资源分配问题, 其中每个智能体 i 的动力学方程为

$$M_i(x_i) \ddot{x}_i + C_i(x_i, \dot{x}_i) \dot{x}_i + G_i(x_i) = u_i. \quad (7)$$

其中: x_i, \dot{x}_i 和 \ddot{x}_i 分别表示广义坐标及其一次微分和二次微分, $M_i(x_i)$ 为正定惯性矩阵, $C_i(x_i, \dot{x}_i)$ 为科里

奥利矢量和向心力, $G_i(x_i)$ 表示重力效应. EL 系统能够描述许多物理系统, 比如: 自动驾驶汽车、航天器和移动机器人^[52]. 上述系统具有以下性质:

1) $\dot{M}_i(x_i) - 2C_i(x_i, \dot{x}_i)$ 斜对称.

2) 对于任意 $p, q \in \mathbf{R}^m$, $M_i(x_i)p + C_i(x_i, \dot{x}_i)q + G_i(x_i) = \Omega_i(x_i, \dot{x}_i, p, q)m_i$. 其中: m_i 包含上述 EL 系统的所有内部参数, 回归矩阵 $\Omega_i(x_i, \dot{x}_i, p, q)$ 仅依赖于 x_i, \dot{x}_i, p, q .

3.1 算法设计

现在对 EL 系统进行算法设计. 在实际系统中, EL 系统(7)中参数常常是未知的, 因而不可直接用来设计算法. 基于 EL 系统性质 2), 利用矩阵 Ω_i 设计分布式跟踪优化算法. 此外, 由于常数向量 m_i 未知, 拟对其进行自适应预测. 具体地, 对于任意智能体 $i \in \mathcal{V}$, 其控制策略设计如下(算法 2):

$$\begin{aligned} u_i &= -\gamma_i(\dot{x}_i - x_{ri}) + \Omega_i \hat{m}_i, \\ \dot{\hat{m}}_i &= -\Omega_i^T(\dot{x}_i - x_{ri}), \\ \dot{\hat{x}}_i &= \hat{v}_i, \\ \dot{\hat{v}}_i &= -\hat{v}_i - (\alpha\zeta_i + \eta_i^T(\tau_i + g_i(\hat{x}_i + \hat{v}_i))^+ - \lambda_i), \\ \dot{\lambda}_i &= -\sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) - z_i - \hat{x}_i - \hat{v}_i + d_i, \\ \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \\ \dot{\tau}_i &= -\tau_i + (\tau_i + g_i(\hat{x}_i + \hat{v}_i))^+. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $\zeta_i \in \partial f_i(\hat{x}_i + \hat{v}_i)$, $\eta_i \in \partial g_i(\hat{x}_i + \hat{v}_i) \subset \mathbf{R}^{q_i \times s}$; $x_{ri} = \hat{x}_i - (x_i - \hat{x}_i)$; $\Omega_i(\hat{x}_i, \dot{\hat{x}}_i, x_{ri}, \dot{x}_{ri})$ 中 \dot{x}_{ri} 计算方法为 $\ddot{\hat{x}}_i - (\dot{x}_i - \dot{\hat{x}}_i)$; 控制参数 $\gamma_i > 0$, $\hat{\theta}_i$ 为局部参考轨迹. 在算法 2 中: 首先 \hat{x}_i, \hat{v}_i 构成虚拟二阶积分器型线性系统, 状态 \hat{x}_i 收敛至问题(2)的最优解; 其次, EL 系统跟踪 \hat{x}_i , 从而实现 x_i 收敛至 x^* .

注 3 针对 EL 系统的分布式约束优化问题, 文献[45, 47]仅考虑了智能体局部约束. 当面对复杂约束集时, 文献[45]的映射算子在局部约束上的投影操作处理起来较为复杂; 而文献[47]的固定惩罚因子极易导致算法在稳定点处振荡, 且该算法所选择的初始状态必须满足智能体局部约束, 无法实现初始值任意选取. 文献[49]研究 EL 系统等式约束下的聚合博弈约束问题, 由于聚合项的存在, 无法直接有效推广至带局部约束资源分配问题中. 文献[46]将网络全局等式约束看作聚合项, 实现了参数已知 EL 系统的资源分配问题求解. 但该算法仅能够处理智能体局部约束较为简单的情形, 且算法要求初始状态满足约束条件. 而本文所设计的算法不但初始值任意, 而且可以实现参数未知 EL 系统的资源分配问题求解.

3.2 算法收敛性分析

由引理 4 可知算法 2 稳定点 \hat{x}_i^* 是问题(2)的最优解; 同时也有 $0 = \dot{x}_i^* = \dot{\hat{x}}_i^* - (x_i^* - \hat{x}_i^*)$, 可得 $x_i^* = \hat{x}_i^*$. 最终可得算法 2 稳定点 x_i^* 是问题(2)的最优解.

定理 2 若假设 1 和假设 2 成立, 且参数 $\alpha > 0$, 则 EL 系统(7)在算法 2 的作用下收敛至问题(2)的最优解.

4 案例仿真

首先, 针对一维资源分配问题, 以智能电网中经济调度问题^[34]为例(案例 1). 假设系统含有 6 组发电机组, 且采用通信权重为 1 的环形通信网络. 每个发电机组成本函数定义为 $f_i(x_i) = a_{i,1}x_i^2 + a_{i,2}|x_i - a_{i,3}| + a_{i,4}$, 其中 $x_i \in \mathbf{R}$ 为发电机组输出功率值, 单位为 MW. 绝对值项的存在使得上述函数 $f_i(x_i)$ 不可微. 此外, 每个发电机组的输出功率约束范围为 $x_i \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$, 转换为凸函数不等式, 即 $g_i(x_i) = (x_i - x_i^{\min})(x_i - x_i^{\max}) \leq 0$. 机组参数设定为 $a_1 = [2, 1, 0.5, 1.5, 1, 1.5]^T \in \mathbf{R}^6$, $a_2 = [3, 4, 5, 2, 3.5, 4.5]^T \in \mathbf{R}^6$, $a_3 = [30, 28, 45, 35, 35, 40, 35]^T \in \mathbf{R}^6$, $x^{\min} = [20, 25, 35, 25, 20, 28]^T \in \mathbf{R}^6$, $x^{\max} = [40, 35, 50, 45, 47, 42]^T \in \mathbf{R}^6$, 网络期望资源量为 $d = [45, 40, 25, 35, 30, 40]^T \in \mathbf{R}^6$. 令控制参数 $\alpha = 0.5$, 算法 1 中 $x_i(t)$ 运行轨迹如图 1 所示. 从图 1 可以看出, 本文所设计的算法收敛至最优解 $x^* = [23.4853, 35, 50, 30.9804, 43.7206, 31.8137]^T \in \mathbf{R}^6$, 且各智能体状态都在约束范围内.

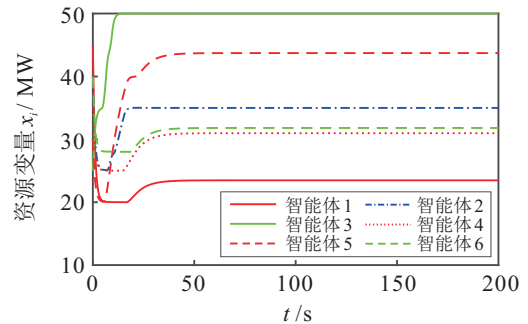


图 1 案例 1 中各智能体资源变量 x_i 的轨迹

接下来, 将已有算法与本文算法进行对比分析, 包括微分映射算子法^[31]、罚函数法^[32]、基于距离函数的精确罚函数法^[34]、映射算子法(算法 1)^[33]和基于 max 算子的精确罚函数法(算法 2)^[33]. 上述算法的共同点都是利用误差跟踪策略使得二阶智能体跟踪虚拟一阶或二阶智能体分布式资源分配算法. 具体地, 文献[31]的算法设计框为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -v_i - (x_i - \chi_i), \\ \dot{\chi}_i &= \epsilon \Pi_{\Omega_i}(\chi_i, -\nabla f_i(x_i) + \lambda_i). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: χ_i 为辅助变量, 局部凸约束集定义为 $\Omega_i = \{x_i | g_i(x_i) \leq 0\}$, ϵ 为无穷小正数. 文献[34]的算法设计框架为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -kv_i - (x_i - \chi_i), \\ \dot{\chi}_i &= -\alpha(\nabla f_i(x_i) + c_i \partial d(\chi_i, \Omega_i)) + \lambda_i. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: k, α 为正控制参数, c_i 为惩罚因子, $\partial d(\chi_i, \Omega_i)$ 为距离函数梯度. 文献[33]算法2的设计框架为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \ddot{\chi}_i - \kappa(v_i - \dot{\chi}_i + x_i - \chi_i), \\ \dot{\chi}_i &= -(\zeta_i + \eta_i^T(\tau_i + g_i(x_i))^+ - \lambda_i). \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $\zeta_i \in \partial f_i(\chi_i)$, $\kappa > 0$ 为控制参数. 已有算法的仿真结果如图2所示, 其中误差定义为 $e(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_i^*)^2$. 从图2可以看出, 本文算法同时拥有较快的收敛速度和收敛精度. 同时, 从式(9)~(11)能够看出, 文献[31,33-34]利用误差跟踪策略设计二阶智能体分布式资源分配算法, 其中辅助变量 χ_i 为各智能体的跟踪量, 所以算法收敛速度相对降低. 此外, 文献[31]利用微分映射算子 $\Pi_{\Omega_i}(\cdot)$ 处理智能体局部约束, 所以其收敛精度受到影响, 但该精度已达到实际工程要求. 虽然文献[33]的算法2也利用误差跟踪策略, 但因该算法增加一参数 κ 来控制跟踪反馈量, 所以可通过增大该控制参数提高算法收敛速度. 另一方面, 文献[33]的算法1收敛最快的原因是其对智能体局部凸约束集采用基于符号函数的固定时间收敛策略, 缺点在于符号函数 $\text{sign}(\cdot)$ 导致算法容易在稳定点处产生抖颤现象且收敛精度不高. 虽然文献[32]中没有利用跟踪误差控制策略, 但该算法需要手动设置一固定常数作为惩罚因子, 不当的惩罚因子容易导致算法在稳定点处抖颤, 这一点也同样在图2中得以验证.

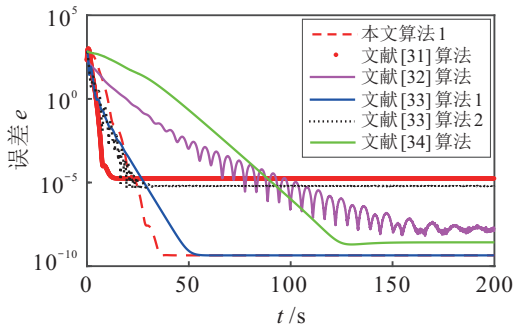


图2 案例1已有算法仿真结果

与上述误差跟踪策略不同, 本文所设计的算法1并不直接计算智能体位置 x_i 的梯度信息, 而是计算位置 $x_i + v_i$ 处的梯度信息. 此外, 算法1设置一控制参数 α 来调节最优拉格朗日乘子 λ^* , 最终实现算法速度提升. 然而从算法1可以看出, 减小 α 会降低速度

量驱动力 \dot{v}_i 的值, 从而导致智能体状态量收敛速度降低. 所以一直减小参数 α 并不会始终增加算法的收敛速度, 这一点与图3仿真结果一致. 建议参数 α 默认设置为0.5即可.

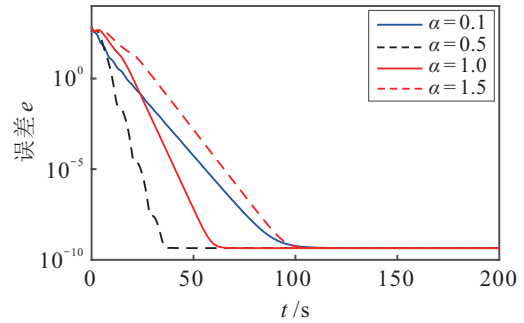


图3 案例1不同参数 α 仿真结果

其次, 验证所设计的算法在二维资源分配问题上的有效性, 其中资源量 $x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T \in \mathbf{R}^2$, 仿真案例来自文献[34](案例2). 系统中含有4个智能体, 通信拓扑是通信链路权重为1的环形网络. 每个智能体的成本函数定义如下:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_{11}^2 + x_{12}^2 + \sqrt{(x_{11} - 2)^2 + (x_{12} - 2)^2}, \\ f_2(x_2) &= x_{21}^2 + x_{22}^2 + \frac{x_{21}^2}{20\sqrt{x_{21}^2 + 1}} + \frac{x_{22}^2}{20\sqrt{x_{22}^2 + 1}}, \\ f_3(x_3) &= (x_{31} - 2)^2 + (x_{32} - 3)^2, \\ f_4(x_4) &= \ln(\exp(-0.05x_{41}) + \exp(0.05x_{41})) + \\ &\quad \|x_4\|^2 + \ln(\exp(-0.05x_{42}) + \exp(0.05x_{42})). \end{aligned} \quad (12)$$

智能体局部凸函数不等式约束项为 $g_1(x_1) = \|x_1 - [2, 2]^T\|^2 - 4$, $g_{2,1}(x_2) = (x_{21} - 1)(x_{21} - 2)$, $g_{2,2}(x_2) = x_{22}(x_{22} - 1)$, $g_{3,1}(x_3) = 0.5 - x_{31}$, $g_{3,2}(x_3) = 1 - x_{32}$, $g_{3,3}(x_3) = x_{31} + x_{32} - 6$, $g_4(x_4) = \|x_4 - [3, 5]^T\|^2 - 4$. 网络期望资源量为 $d = [2, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 5]^T \in \mathbf{R}^8$, 令控制参数为 $\alpha = 0.5$. 本文算法1中 $x_i(t)$ 运行轨迹如图4所示. 其中, 每个子图中*表示最优解所在位置, 分别为 $x^* = [[1.8884, 3.4729], [1.8237, 1], [1.4396, 4.5604], [1.8483, 3.9666]]^T \in \mathbf{R}^8$. 从图4可以看出, 本文所设计的算法最终收敛至资源分配问题的最优解. 令误差 $e(t)$ 与案例1中相同定义, 则本文算法与文献[31, 33-34]的仿真结果对比如图5所示. 从图5可以看出, 虽然文献[34]中精确罚函数法收敛速度相对较快, 但是其算法在稳定点处来回波动, 且其收敛精确低于本文算法. 此外, 在式(9)和(10)中分别使用微分映射算子和距离函数梯度解决智能体局部约束, 相比于本文算法中的梯度计算, 文献[31]中智能体局部约束的切锥和文献[34]中距离

函数 $d(\chi_i, \Omega_i) = \inf_{p \in \Omega_i} \|p - \chi_i\|$ 计算起来相对较为复杂,且其采用的跟踪控制框架增加了智能体变量个数(即式(9)~(11)中的虚拟变量 χ_i),从而提高了算法复杂度.

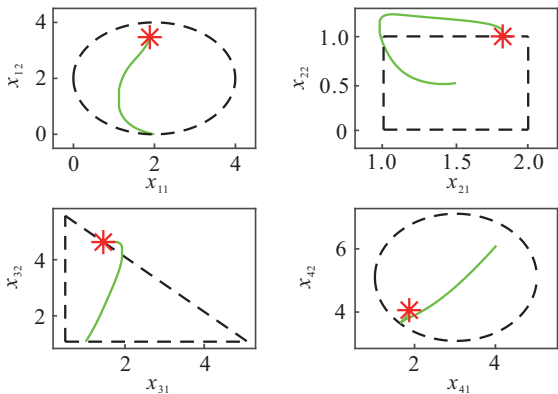


图4 案例2中各智能体资源变量 x_i 的轨迹

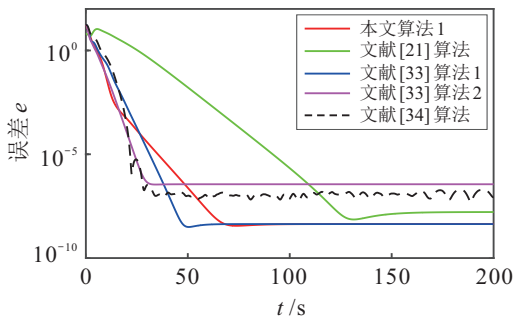


图5 案例2已有算法仿真结果

最后,通过一组案例(案例3)仿真验证本文所设计的算法在EL系统上的有效性.当忽略机械和电磁损耗时,汽轮发电系统的动力学方程^[28]可描述为

$$\frac{T_{mi}T_{ei}}{K_{mi}}\ddot{P}_i + \frac{T_{mi} + T_{ei}}{K_{mi}}\dot{P}_i + \frac{1}{K_{mi}}P_i = u_i. \quad (13)$$

假定系统节点数和通信拓扑与案例1一致,且令系统参数为 $T_m = [0.35, 0.30, 0.28, 0.40, 0.43, 0.35]$, $T_e = [0.1, 0.12, 0.08, 0.11, 0.90, 0.10]$, $K_m = [1.0, 1.1, 0.9, 1.2, 0.8, 1.0]$,则本文的算法2执行过程中系统功率输出值 P_i 的运行轨迹如图6所示.可以发现其结果与案例1一致,且收敛速度大致相当.最终可以验证本文所设计的算法在线性二阶系统和非线性二阶系统资源分配问题上都是有效的.

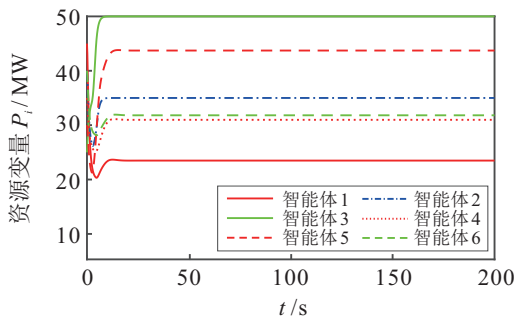


图6 案例3中各智能体资源变量 P_i 的轨迹

5 结论

针对二阶积分器型线性多智能体系统的分布式资源分配问题,不同于现有误差跟踪策略,本文利用KKT条件设计了一类新型分布式优化算法.将智能体速度量与状态量耦合起来,实现对智能体速度量的直接驱动.为了研究智能体局部凸函数不等式约束,本文利用max算子实现自适应控制.其次,将本文算法推广至更普遍的不可测异构EL系统.然而,在本文算法执行过程中,各智能体与邻居智能体需要连续通信,此举势必造成不必要的通信资源浪费.未来工作将尝试设计离散时间通信算法.

参考文献(References)

- [1] 任敏, 王克波, 沈林成. 多UAV协同突防规划与仿真[J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 157-160.
(Ren M, Wang K B, Shen L C. Planning and simulation for multi-UAV cooperative penetration mission[J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 157-160.)
- [2] 尹翌, 贺威, 邹尧, 等. 基于“雁阵效应”的扑翼飞行器机器人高效集群编队研究[J]. 自动化学报, 2021, 47(6): 1355-1367.
(Yin Z, He W, Zou Y, et al. Efficient formation of flapping-wing aerial vehicles based on wild geese queue effect[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(6): 1355-1367.)
- [3] 牛建军, 邓志东, 李超. 无线传感器网络分布式调度方法研究[J]. 自动化学报, 2011, 37(5): 517-528.
(Niu J J, Deng Z D, Li C. Distributed scheduling approaches in wireless sensor network[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(5): 517-528.)
- [4] 滕菲, 单麒麟, 李铁山. 智能船舶综合能源系统及其分布式优化调度方法[J]. 自动化学报, 2020, 46(9): 1809-1817.
(Teng F, Shan Q H, Li T S. Intelligent ship integrated energy system and its distributed optimal scheduling algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2020, 46(9): 1809-1817.)
- [5] 杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望[J]. 中国科学: 技术科学, 2020, 50(11): 1414-1425.
(Yang T, Chai T Y. Research status and prospects of distributed collaborative optimization[J]. Scientia Sinica: Technologica, 2020, 50(11): 1414-1425.)
- [6] 杨涛, 徐磊, 易新蕾, 等. 基于事件触发的分布式优化算法[J]. 自动化学报, 2022, 48(1): 133-143.
(Yang T, Xu L, Yi X L, et al. Event-triggered distributed optimization algorithms[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(1): 133-143.)
- [7] Liang S, Zeng X L, Hong Y G. Distributed nonsmooth optimization with coupled inequality constraints via modified Lagrangian function[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(6): 1753-1759.
- [8] Yi X L, Yao L S, Yang T, et al. Distributed

- optimization for second-order multi-agent systems with dynamic event-triggered communication[C]. 2018 IEEE Conference on Decision and Control. Miami, 2019: 3397-3402.
- [9] Deng Z H. Distributed algorithm design for resource allocation problems of high-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(1): 177-186.
- [10] Li G P, Wang X Y, Li S H. Finite-time distributed approximate optimization algorithms of higher order multiagent systems via penalty-function-based method[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(10): 6174-6182.
- [11] Li Z H, Wu Z Z, Li Z K, et al. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems with event-triggered mechanisms[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(4): 1763-1770.
- [12] Li L, Yu Y, Li X X, et al. Exponential convergence of distributed optimization for heterogeneous linear multi-agent systems over unbalanced digraphs[J]. Automatica, 2022, 141: 110259.
- [13] An L W, Yang G H. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(12): 6850-6857.
- [14] Zhang J Q, You K Y, Cai K. Distributed dual gradient tracking for resource allocation in unbalanced networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 2186-2198.
- [15] Shi X S, Zheng R H, Lin Z Y, et al. An exponentially convergent distributed algorithm for resource allocation problem[J]. Asian Journal of Control, 2021, 23(2): 1072-1082.
- [16] Yi P, Hong Y G, Liu F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems[J]. Automatica, 2016, 74: 259-269.
- [17] Zhu Y N, Ren W, Yu W W, et al. Distributed resource allocation over directed graphs via continuous-time algorithms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(2): 1097-1106.
- [18] Zhu Y N, Wen G H, Yu W W, et al. Nonsmooth resource allocation of multiagent systems with disturbances: A proximal approach[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(3): 1454-1464.
- [19] Zhu Y N, Wen G H, Yu W W, et al. Continuous-time distributed proximal gradient algorithms for nonsmooth resource allocation over general digraphs[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2021, 8(2): 1733-1744.
- [20] Zeng X L, Yi P, Hong Y G, et al. Distributed continuous-time algorithms for nonsmooth extended monotropic optimization problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(6): 3973-3993.
- [21] Cherukuri A, Cortés J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment[J]. Automatica, 2016, 74: 183-193.
- [22] Guo Z J, Chen G. Predefined-time distributed optimal allocation of resources: A time-base generator scheme[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(1): 438-447.
- [23] Li C J, Yu X H, Huang T W, et al. Distributed optimal consensus over resource allocation network and its application to dynamical economic dispatch[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(6): 2407-2418.
- [24] Guo Z Y, Lian M K, Wen S P, et al. An adaptive multi-agent system with duplex control laws for distributed resource allocation[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2022, 9(2): 389-400.
- [25] Chen G, Yang Q, Song Y D, et al. A distributed continuous-time algorithm for nonsmooth constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(11): 4914-4921.
- [26] Jia W W, Liu N, Qin S T. An adaptive continuous-time algorithm for nonsmooth convex resource allocation optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(11): 6038-6044.
- [27] 任远红. 非线性二阶 leader-following 多智能体系统指定时间协同控制研究[D]. 上海: 东华大学, 2021. (Ren Y H. Prescribed-time consensus control of a class of nonlinear second-order leader-following multi-agent systems[D]. Shanghai: Donghua University, 2021.)
- [28] Deng Z, Liang S, Yu W. Distributed optimal resource allocation of second-order multiagent systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(14): 4246-4260.
- [29] Li S L, Nian X H, Deng Z H. Distributed resource allocation of second-order multiagent systems with exogenous disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(3): 1298-1310.
- [30] Li S L, Nian X H, Deng Z H, et al. Distributed resource allocation of second-order nonlinear multiagent systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(11): 5330-5342.
- [31] Chen T, Luo J, Deng Z H, et al. Distributed algorithm design for resource allocation problems of second-order multi-agent systems[C]. The 41st Chinese Control Conference. Hefei, 2022: 4538-4542.
- [32] Wang D, Wang Z, Wen C Y, et al. Second-order continuous-time algorithm for optimal resource allocation in power systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(2): 626-637.
- [33] 时侠圣, 杨涛, 林志贇, 等. 基于连续时间的二阶多智能体分布式资源分配算法[J]. 自动化学报, 2021, 47(8): 2050-2060. (Shi X S, Yang T, Lin Z Y, et al. Distributed resource

- allocation algorithm for second-order multi-agent systems in continuous-time[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(8): 2050-2060.)
- [34] 时侠圣, 徐磊, 杨涛. 基于自适应精确罚函数的分布式资源分配算法[J]. *控制理论与应用*, 2022, 39(10): 1937-1945.
(Shi X S, Xu L, Yang T. An adaptive exact-penalty-based distributed resource allocation algorithm[J]. *Control Theory and Application*, 2022, 39(10): 1937-1945.)
- [35] Shi X S, Meng Z, Dong S J, et al. Distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems with external disturbances[J]. *International Journal of Control*, DOI: 10.1080/00207179.2022.2086927.
- [36] Spong M W, Vidyasagar M. *Robot dynamics and control*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008: 1-301.
- [37] Wang X F, Deng Z H, Ma S, et al. Event-triggered design for multi-agent optimal consensus of Euler-Lagrangian systems[J]. *Kybernetika*, 2017, 53(1): 179-194.
- [38] Huang Y, Meng Z Y. Fully distributed event-triggered optimal coordinated control for multiple Euler-Lagrangian systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(9): 9120-9131.
- [39] Wang S W, Jin X, Mao S, et al. Model-free event-triggered optimal consensus control of multiple Euler-Lagrange systems via reinforcement learning[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2021, 8(1): 246-258.
- [40] Wang Q, Chen J, Xin B, et al. Distributed optimal consensus for Euler-Lagrange systems based on event-triggered control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(7): 4588-4598.
- [41] Zou Y, Meng Z Y, Hong Y G. Adaptive distributed optimization algorithms for Euler-Lagrange systems[J]. *Automatica*, 2020, 119: 109060.
- [42] Zhang Y Q, Deng Z H, Hong Y G. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems[J]. *Automatica*, 2017, 79: 207-213.
- [43] Deng Z H, Liang S. Distributed algorithms for aggregative games of multiple heterogeneous Euler-Lagrange systems[J]. *Automatica*, 2019, 99: 246-252.
- [44] An L W, Yang G H. Collisions-free distributed optimal coordination for multiple Euler-Lagrangian systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(1): 460-467.
- [45] Zou Y, Huang B M, Meng Z Y. Distributed continuous-time algorithm for constrained optimization of networked Euler-Lagrange systems[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(2): 1034-1042.
- [46] Zhang Y Q, Liu C Q, Tian Y P. Distributed constrained aggregative games of uncertain Euler-Lagrange systems under unbalanced digraphs[J]. *Autonomous Intelligent Systems*, 2022, 2(1): 9.
- [47] Guo Z J, Chen G. Fully distributed optimal position control of networked uncertain Euler-Lagrange systems under unbalanced digraphs[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(10): 10592-10603.
- [48] Wang Z, Liu J X, Wang D, et al. Distributed cooperative optimization for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems under global equality and inequality constraints[J]. *Information Sciences*, 2021, 577: 449-466.
- [49] Deng Z H. Distributed algorithm design for aggregative games of Euler-Lagrange systems and its application to smart grids[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(8): 8315-8325.
- [50] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [51] Ai X L, Yu J Q. Flatness-based finite-time leader-follower formation control of multiple quadrotors with external disturbances[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 92: 20-33.
- [52] Lu M B, Liu L, Feng G. Adaptive tracking control of uncertain Euler-Lagrange systems subject to external disturbances[J]. *Automatica*, 2019, 104: 207-219.
- [53] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. The 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002: 1-750.

作者简介

时侠圣(1992—), 男, 讲师, 博士后, 从事多智能体系统分布式优化、自适应动态规划、事件触发和量化通信机制等研究, E-mail: shixiasheng@zju.edu.cn;

孙佳月(1990—), 女, 博士后, 从事分布式智能协同优化控制、复杂非线性动态系统容错控制等研究, E-mail: sunjiayue@ise.neu.edu.cn;

徐磊(1994—), 男, 博士生, 从事非凸分布式优化的研究, E-mail: 2010345@stu.neu.edu.cn;

杨涛(1981—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息物理系统、复杂工业过程的分布式优化等研究, E-mail: yangtao@mail.neu.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)