

# 控制与决策

Control and Decision

二阶多智能体系统包含控制的时滞范围优化

李瑶珀, 马丹

引用本文:

李瑶珀, 马丹. 二阶多智能体系统包含控制的时滞范围优化[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1345–1351.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0604>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法

Distributed nonsmooth resource allocation algorithms over second-order multi-agent systems

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1336–1344 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1262>

#### 非仿射非线性多智能体系统迭代学习一致跟踪

Iterative learning consensus tracking for non-affine nonlinear multi-agent systems

*控制与决策*. 2023, 38(4): 929–934 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1069>

#### 基于事件驱动的多智能体有限时间分群一致控制

Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with event-triggered control

*控制与决策*. 2022, 37(11): 2925–2933 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0162>

#### 低阶多智能体系统快速一致性优化设计的解析方法

Analytic solutions to the optimal design for fast consensus of low-order multi-agent systems

*控制与决策*. 2022, 37(10): 2543–2551 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0151>

#### 脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

*控制与决策*. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

## 二阶多智能体系统包含控制的时滞范围优化

李瑶珀, 马丹<sup>†</sup>

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 研究具有未知时滞的二阶多智能体系统的鲁棒包含控制问题, 考虑智能体之间同时具有通信延时和自延时, 分别在无向拓扑和有向拓扑通信下, 获得多智能体系统保持鲁棒包含控制所能允许的最大时滞范围. 借助函数的凸分析和非线性规划方法解析地获得了无向图下包含控制所允许的最大时滞范围. 对于有向图, 通过遗传算法求解非光滑的优化问题获得最大时滞范围的数值解, 同时结果可退化为领导-跟随控制所能获得的最大时滞范围. 最后, 通过仿真例子验证所提出理论和算法的有效性.

**关键词:** 鲁棒包含控制; 二阶多智能体系统; 时滞; 凸分析; 遗传算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0604

引用格式: 李瑶珀, 马丹. 二阶多智能体系统包含控制的时滞范围优化[J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1345-1351.

## Delay range optimization for containment control of second-order multi-agent systems

LI Yao-po, MA Dan<sup>†</sup>

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** We study the robust containment control problem for second-order multi-agent systems with unknown time delays, considering both the agent's communication delay and inter-agent delay, simultaneously. We derive the maximum delay range for undirected topology and directed topology respectively, such that multi-agent systems can maintain the robust containment. Via the convex analysis and nonlinear programming, the analytic maximum delay range to maintain containment under undirected graphs is derived. For the directed graph, the genetic algorithm is proposed to solve the non-smooth optimizing problem and the numerical values of maximum delay range are obtained. Meanwhile, the results can be reduced to find the maximum delay range of leader-following control. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm are verified via the simulations.

**Keywords:** robust containment control; second-order multi-agent system; time delays; convex analysis; genetic algorithm

### 0 引言

近年来, 多智能体系统在社会、工程和生物系统中得到了广泛的应用, 如传感器网络、机器人协作、无人机编队、动物群体等. 而一致性作为多智能体系统中最普遍的现象, 已经发展到很多方面, 如: 包含控制<sup>[1-3]</sup>和领导跟随控制<sup>[4-5]</sup>. 但是, 由于单个领导者的控制存在局限性, 促使多个领导者的协同控制得到深入发展, 其中包含控制是多个领导者协同控制的一种特殊情况并受到了广泛的关注, 在无人机避障、侦察以及协同作战<sup>[6-7]</sup>等军事方面得到了广泛应用. 然而, 包含控制的实现严格依赖于控制协议及其鲁棒性, 若由于智能体之间通信受限而导致通信存在时滞, 则将

极大地影响包含控制的保持. 而这一时滞通常是未知且难以准确测量的, 控制协议到底能容许多大的不确定时滞, 是决定所设计的控制协议能否安全有效进行的重要标准. 因此, 对多智能体系统包含控制的时滞鲁棒性问题的研究具有重要的意义.

关于具有时滞的多智能体系统包含控制方面的研究: 文献[8]在有向图下, 研究了单积分器的多智能体系统在分布式 PD 控制协议下的包含控制问题, 通过极点分析的方法给出了系统能够容忍的最大允许时滞; 文献[9]研究了一阶离散多智能体系统的包含控制问题, 并给出了系统实现鲁棒包含的充分必要条件; 文献[10]研究了带有输入时滞的双积分器多智能

收稿日期: 2022-04-13; 录用日期: 2022-08-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973060).

责任编辑: 杨涛.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: madan@mail.neu.edu.cn.

体系统的领导跟随一致性问题. 另外, 时滞鲁棒性研究的一个重要指标被称为时滞裕度, 因此, 多智能体系统的时滞裕度也是衡量系统鲁棒性的一个关键指标. 文献[11-12]分别研究了无向图和有向图下的一阶多智能体系统的一致性时滞裕度问题, 并通过凸分析的方法对时滞裕度进行了优化; 文献[13]在无向图下, 研究了二阶不稳定多智能体系统在PD控制协议下的一致性时滞裕度问题, 给出了时滞一致性裕度的表达式及其上界; 文献[14]在无向图下, 研究了二阶多智能体系统在PD控制协议下的时滞优化问题, 并通过凸优化和非线性规划方法, 解析地得到了时滞裕度与控制器参数的关系.

本文针对无向拓扑和有向拓扑通信两种情况, 研究二阶多智能体系统在反馈控制协议下的鲁棒包含控制问题. 不同于现有的工作<sup>[13-14]</sup>, 本文将一致性结论拓展到具有领导者的二阶多智能体系统的包含控制问题. 考虑每个智能体具有两个不稳定实极点, 智能体之间同时存在通信延时和自延时. 本文给出多智能体系统保持鲁棒包含控制所能允许的最大时滞范围, 结果可退化到领导-跟随问题. 在无向图下, 通过凸分析和非线性规划方法将包含问题的最大时滞范围描述成非光滑的拟凸优化问题, 从而进行优化求解. 而对于有向图, 由于拉普拉斯矩阵的复特征值导致凸分析方法应用存在困难, 本文针对得到的非光滑优化问题, 通过智能优化算法对其进行寻优, 得到了最大时滞范围的最优解.

## 1 问题描述

### 1.1 图论基础

本文考虑智能体之间的连接关系用拓扑图  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  表示, 图中的每个节点代表一个智能体. 其中:  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  表示所有节点的集合,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  表示边的集合, 如果节点  $i$  可以传输信息给节点  $j$ , 则边  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 且节点  $i$  是节点  $j$  的邻居. 定义节点  $i$  的邻居的集合为  $\mathcal{N}_i \triangleq \{j | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ .  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  表示图  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵, 若  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} = 1$ ; 若  $(i, j) \notin \mathcal{E}$ , 则有  $a_{ij} = 0$ . 若  $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}, \forall i, j \in \mathcal{V}$ , 则图  $\mathcal{G}$  为无向图; 反之, 称为有向图. 图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵为  $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ , 其中  $\mathcal{D} = [d_{ij}]$  表示图  $\mathcal{G}$  的入度矩阵. 若  $i \neq j$ , 则  $d_{ij} = 0$ ; 若  $i = j$ , 则  $d_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ .

**引理 1** (Fritz John 条件)<sup>[15]</sup> 考虑如下优化问题:

$$\min f(x).$$

$$\text{s.t. } g_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}_1 = 1, 2, \dots, m;$$

$$h_j(x) = 0, j \in \mathcal{I}_2 = m + 1, m + 2, \dots, k.$$

其中  $f(x)$ 、 $g_i(x)$  和  $h_j(x)$  在  $R^n$  上都存在连续的一阶偏导数. 如果  $x^*$  是  $f(x)$  的一个最优解, 则存在向量  $\mu = [\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k]$ , 使得下列各式成立:

$$\mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in \mathcal{I}_2} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0;$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_1} \mu_i g_i(x^*) = 0;$$

$$\mu_l \geq 0, l \in \{0\} \cup \mathcal{I}_1;$$

$$\mu \neq 0.$$

其中:  $\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T$  表示  $f(x)$  的梯度; 且系数  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$  是非负的, 而  $\mu_{m+1}, \dots, \mu_k$  不一定非负.

### 1.2 系统描述

考虑连续时间二阶多智能体系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \alpha v_i(t) + \beta x_i(t) + u_i(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $x_i(t) \in R^n$  表示第  $i$  个智能体的位置状态;  $v_i(t) \in R^n$  表示第  $i$  个智能体的速度状态;  $\alpha$  和  $\beta$  为智能体的参数. 考虑每个智能体都有两个不稳定的实极点

$$p_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, p_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

参数  $\alpha$  和  $\beta$  满足下列条件:

$$\alpha \geq 0, -\frac{\alpha^2}{4} \leq \beta \leq 0.$$

特别地, 当  $\alpha = \beta = 0$  时, 有  $p_1 = p_2 = 0$ , 每个智能体退化为双积分器.

本文考虑多智能体系统(1)中存在  $m$  ( $m \geq 1$ ) 个跟随者和  $N - m$  ( $N > m$ ) 个领导者. 另外, 定义跟随者的集合为  $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, m\}$ , 领导者的集合为  $\mathcal{R} = \{m + 1, \dots, N\}$ . 在通信拓扑图  $\mathcal{G}$  下, 假设领导者之间不进行通信, 跟随者可以从领导者接受信息, 并可以与其他跟随者进行通信. 在这种情况下, 拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}$  可以表示为

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{0}_{(N-m) \times m} & \mathbf{0}_{(N-m) \times (N-m)} \end{bmatrix}.$$

其中:  $\mathcal{L}_1 \in R^{m \times m}$ ,  $\mathcal{L}_2 \in R^{m \times (N-m)}$ .

对于多智能体系统(1), 考虑如下位置和速度反馈控制协议:

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, i \in \mathcal{R}; \\ -k_p \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [x_i(t - \tau) - x_j(t - \tau)] - \\ k_d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [v_i(t - \tau) - v_j(t - \tau)], i \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\tau \geq 0$  为未知的常数时滞,表示智能体中同时存在的通信延时和自延时;  $k_p, k_d$  分别表示位置和速度反馈增益,也可称为网络连接强度

**假设1** 当图  $\mathcal{G}$  为无向图时,跟随者之间为无向通信,且对于每个跟随者,至少存在一条路径到达任意领导者.

**假设2** 当图  $\mathcal{G}$  为有向图时,对于每个跟随者,至少存在一条有向路径到达任意领导者.

**假设3**<sup>[13]</sup> 定义  $L_i(s)$  为开环传递函数,对于任意智能体  $i \in \mathcal{F}$ ,满足  $|L_i(0)| > 1$ .

**引理2**<sup>[3]</sup> 当图  $\mathcal{G}$  满足假设1时,  $\mathcal{L}_1$  的所有特征值是正实数.  $-\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$  的每个元素都是非负的,且每一行和为1.

**引理3**<sup>[16]</sup> 当图  $\mathcal{G}$  满足假设2时,  $\mathcal{L}_1$  的所有特征值具有正实部.  $-\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$  的每个元素都是非负的,且每一行和为1.

**定义1**<sup>[17]</sup> 当  $N - m > 1$  时,如果对于任意初始状态的智能体,使得跟随者的状态最终能够渐近收敛到领导者状态所形成的凸包中,则在控制协议(2)的作用下,称多智能体系统(1)实现包含控制.

**定义2**<sup>[18]</sup> 当  $N - m = 1$  时,如果对于任意初始状态的智能体,使得跟随者的状态  $(x_i(t), v_i(t))$  能够渐近收敛于领导者的状态  $(x_N(t), v_N(t))$ ,即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_N(t)\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_N(t)\| &= 0, \quad i \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

领导者集合退化为  $\mathcal{R} = \{N\}$ ,则在控制协议(2)的作用下,称多智能体系统(1)实现领导跟随控制.

定义扩维状态变量  $z_i = [x_i^T, v_i^T]^T (i \in 1, 2, \dots, N)$ ,以及跟随者状态  $z_{\mathcal{F}} = [z_1^T, \dots, z_m^T]^T$  和领导者状态  $z_{\mathcal{R}} = [z_{m+1}^T, \dots, z_N^T]^T$ ,可得闭环系统(1)和(2)为

$$\begin{cases} \dot{z}_{\mathcal{R}}(t) = (I_{(N-m)} \otimes A)z_{\mathcal{R}}(t), \\ \dot{z}_{\mathcal{F}}(t) = (I_m \otimes A)z_{\mathcal{F}}(t) - (\mathcal{L}_2 \otimes B)z_{\mathcal{R}}(t - \tau) - \\ (\mathcal{L}_1 \otimes B)z_{\mathcal{F}}(t - \tau). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ \beta I_n & \alpha I_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ k_p I_n & k_d I_n \end{bmatrix}$ ,  $\otimes$  为克罗内克积,  $0_n$  为  $n \times n$  全零矩阵,  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵.

进一步,定义误差变量  $\xi_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}[z_i(t) - z_j(t)], i \in \mathcal{F}$ ,以及  $\xi(t) = (\mathcal{L}_2 \otimes I_{2n})z_{\mathcal{R}}(t) + (\mathcal{L}_1 \otimes I_{2n})z_{\mathcal{F}}(t)$ . 系统(3)重写为如下误差系统:

$$\dot{\xi}(t) = (I_m \otimes A)\xi(t) - (\mathcal{L}_1 \otimes B)\xi(t - \tau), \quad (4)$$

当且仅当  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$  时,误差系统(4)实现渐近稳定,此时

$$z_{\mathcal{F}}(t) = (-\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_{2n})z_{\mathcal{R}}(t).$$

由引理3可得,随着  $t \rightarrow \infty$ ,跟随者的位置和速度能渐近收敛于由领导者形成的凸包中,即实现包含控制.

误差系统(4)的特征方程为

$$F(s, \tau) = \prod_{i=1}^m (s^2 - \alpha s - \beta + (k_d s + k_p) \lambda_i e^{-\tau s}).$$

定义

$$F_i(s, \tau) = s^2 - \alpha s - \beta + (k_d s + k_p) \lambda_i e^{-\tau s}, \quad i \in \mathcal{F},$$

其中  $\lambda_i$  为拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}_1$  的特征值. 因此,对误差系统(4)的稳定性分析转换为对特征方程  $F(s, \tau)$  的特征根分析. 如果在复平面的右半平面(CRHP)中  $F_i(s, \tau) \neq 0$ ,则  $F_i(s, \tau)$  是稳定的. 当且仅当所有  $i \in \mathcal{F}, F_i(s, \tau)$  都是稳定的,则误差系统(4)渐近稳定.

将  $F_i(s, \tau)$  表示的闭环特征方程写成开环传递函数的形式,即

$$1 + \frac{(k_d s + k_p) \lambda_i e^{-\tau s}}{s^2 - \alpha s - \beta} \neq 0, \quad \forall s \in \text{CRHP},$$

定义无时滞时第  $i$  个智能体的开环传递函数为

$$L_i(s) = \frac{(k_d s + k_p) \lambda_i}{s^2 - \alpha s - \beta}, \quad i \in \mathcal{F}. \quad (5)$$

当  $\tau = 0$  时,多智能体系统(1)在控制协议(2)的作用下能够实现包含控制. 换言之,对于  $\forall i \in \mathcal{F}$ ,存在共同的  $(k_p, k_d)$  使得  $F_i(s, \tau)$  稳定. 此时,有可行参数域  $\Omega$ . 当  $\tau \neq 0$  时,对于任意  $(k_p, k_d) \in \Omega$  和  $i \in \mathcal{F}$ ,有

$$\tau_i(k_p, k_d) = \sup\{\mu \geq 0 : F_i(s, \tau) \text{ 在 } (k_p, k_d) \text{ 的作用下是稳定的, } \forall \tau \in [0, \mu)\}, \quad (6)$$

则有  $\bar{\tau}(k_p, k_d) = \min_{i \in \mathcal{F}} \tau_i(k_p, k_d)$ ,因此,多智能体系统(1)在控制协议(2)的作用下保持包含控制所能允许的最大时滞范围为

$$\bar{\tau} = \sup_{(k_p, k_d) \in \Omega} \bar{\tau}(k_p, k_d) = \sup_{(k_p, k_d) \in \Omega} \min_{i \in \mathcal{F}} \tau_i(k_p, k_d).$$

## 2 包含控制的时滞优化: 无向图

本节将给出多智能体系统(1)和(2)在无向图下保持包含控制所能允许的最大时滞范围. 由引理2可知,矩阵  $\mathcal{L}_1$  的特征值为正实数,且满足  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ . 通过Routh-Hurwitz稳定判据对传递函数(5)进行分析,可得  $k_d > \alpha/\lambda_i, \forall i \in \mathcal{F}$ . 结合假设3,控制协议(2)必须满足以下可行参数域:

$$\Omega_u = \left\{ (k_p, k_d) : k_p > \frac{|\beta|}{\lambda_1}, k_d > \frac{\alpha}{\lambda_1} \right\}.$$

**定理1** 在无向图下,多智能体系统(1)在反馈控

制协议(2)的作用下实现包含控制的最大时滞范围为

$$\bar{\tau} = \sup_{k_d > \frac{p_1+p_2}{\lambda_1}} \hat{\tau}(k_d). \quad (7)$$

其中

$$\hat{\tau}(k_d) = \min\{\tau_1(k_d), \tau_m(k_d)\}, \quad (8)$$

$$\tau_i(k_d) = \tau_i\left(\frac{p_1 p_2}{\lambda_1}, k_d\right) = \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_1}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_2}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{k_d \omega_i \lambda_1}{p_1 p_2}}{\omega_i} - \frac{\pi}{\omega_i}, \quad (9)$$

$$\omega_i^2 = \frac{\sqrt{(k_d^2 \lambda_i^2 - (p_1^2 + p_2^2))^2 + 4(k_p^2 \lambda_i^2 - p_1^2 p_2^2)}}{2} + \frac{k_d^2 \lambda_i^2 - (p_1^2 + p_2^2)}{2}, \quad i = 1, m. \quad (10)$$

**证明** 根据假设3以及 $|L_i(\infty)| = 0$ 的事实,由连续性可知,存在 $\omega_i > 0$ 使得 $|L_i(\omega_i)| = 1$ ,其中

$$|L_i(\omega_i)|^2 = \frac{(k_d^2 \omega_i^2 + k_p^2) \lambda_i^2}{(\omega_i^2 + p_1^2)(\omega_i^2 + p_2^2)} = 1,$$

$\omega_i > 0$ 可以通过求解如下多项式得到唯一解:

$$\omega_i^4 - (k_d^2 \lambda_i^2 - (p_1^2 + p_2^2)) \omega_i^2 - (k_p^2 \lambda_i^2 - p_1^2 p_2^2) = 0.$$

同时,对于 $\omega_i > 0$ ,使得相角条件满足

$$\angle L_i(j\omega_i) = 2\pi + \arctan \frac{\omega_i}{p_1} + \arctan \frac{\omega_i}{p_2} + \arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p},$$

以及存在时滞 $\tau_i > 0$ ,使得 $F_i(j\omega_i, \tau_i) = 0$ ,可得

$$\tau_i \omega_i = \arctan \frac{\omega_i}{p_1} + \arctan \frac{\omega_i}{p_2} + \arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p} - \pi.$$

因此,对于任意 $\tau < \tau_i$ 和全部 $\omega \geq 0$ ,都有 $F_i(j\omega, \tau) \neq 0$ ,即特征方程 $F_i(s, \tau)$ 是稳定的.从而可得与 $k_p, k_d$ 相关的时滞范围

$$\tau_i(k_p, k_d) = \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_1}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_2}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p}}{\omega_i} - \frac{\pi}{\omega_i}, \quad (11)$$

定义函数

$$h(\omega) = \frac{\arctan \frac{\omega}{p_1}}{\omega} + \frac{\arctan \frac{\omega}{p_2}}{\omega} + \frac{\arctan \frac{k_d \omega}{k_p}}{\omega} - \frac{\pi}{\omega}, \quad (12)$$

$$\omega(\lambda) = \frac{\sqrt{(k_d^2 \lambda^2 - (p_1^2 + p_2^2))^2 + 4(k_p^2 \lambda^2 - p_1^2 p_2^2)}}{2} + \frac{k_d^2 \lambda^2 - (p_1^2 + p_2^2)}{2}, \quad (13)$$

容易得到 $h(\omega(\lambda_i)) = \tau_i(k_p, k_d)$ .

类似于文献[14,19]的证明,可得函数 $h(\omega(\lambda))$ 是关于 $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$ 的伪凹函数.这表明函数的极小值在边界处,有 $\min\{h(\omega(\lambda))\} = \min\{h(\lambda_1), h(\lambda_m)\} =$

$$\min\{\tau_1(k_p, k_d), \tau_m(k_p, k_d)\}.$$

接下来,证明 $\tau_1(k_p, k_d), \tau_m(k_p, k_d)$ 能够在 $k_p^* = p_1 p_2 / \lambda_1$ 处实现极大值.首先,考虑 $\tau_1(k_p, k_d)$ 的情况,有 $\lambda_i = \lambda_1, \omega_i = \omega_1$ ,结合式(11)可得

$$\tau_1(k_p, k_d) = \frac{\arctan \frac{\omega_1}{p_1}}{\omega_1} + \frac{\arctan \frac{\omega_1}{p_2}}{\omega_1} + \frac{\arctan \frac{k_d \omega_1}{k_p}}{\omega_1} - \frac{\pi}{\omega_1}, \quad (14)$$

其中 $\omega_1 > 0$ 为如下多项式的唯一解:

$$\omega_1^4 - (k_d^2 \lambda_1^2 - (p_1^2 + p_2^2)) \omega_1^2 - (k_p^2 \lambda_1^2 - p_1^2 p_2^2) = 0.$$

为了找到 $\tau_1(k_p, k_d)$ 的极大值,将式(14)转化为如下非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(k_p, k_d, \omega_1); \\ \text{s.t.} \quad & g_1(k_p, k_d, \omega_1) = p_1 + p_2 - k_d \lambda_1 \leq 0, \\ & g_2(k_p, k_d, \omega_1) = p_1 p_2 - k_p \lambda_1 \leq 0, \\ & h(k_p, k_d, \omega_1) = \omega_1^4 - (k_d^2 \lambda_1^2 - (p_1^2 + p_2^2)) \omega_1^2 - (k_p^2 \lambda_1^2 - p_1^2 p_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $f_1(k_p, k_d, \omega_1) = -\tau_1(k_p, k_d)$ .

根据引理1,分别计算函数 $f_1, g_1, g_2, h$ 对于 $k_p, k_d$ 的偏导数,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_p} : \mu_0 \frac{1}{1 + \Delta_{\min}^2} \frac{k_d^*}{k_p^{*2}} - \mu_2 \lambda_1 - 2\mu_3 k_p^* \lambda_1^2 &= 0, \quad (16) \\ \frac{\partial}{\partial k_d} : \mu_0 \frac{1}{1 + \Delta_{\min}^2} \frac{1}{k_p^*} + \mu_1 \lambda_1 + 2\mu_3 k_d^* \omega_1^{*2} \lambda_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\Delta_{\min} = k_d^* \omega_1^* / k_p^*$ .

由 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ 可得式(17)的前两项是非负的.假设 $\mu_0 = \mu_1 = \mu_3 = 0$ 使式(17)成立,此时只有当 $\mu_2 = 0$ 才能使式(16)成立,违背了 $\mu \neq 0$ 的条件.这就意味着 $\mu_3 < 0$ 以及 $\mu_1, \mu_2$ 不同时为零.在这种情况下,可以确定 $\mu_2 > 0$ 能够使式(16)和(17)同时成立.根据条件 $\sum_{i=1}^2 \mu_i g_i(k_p^*, k_d^*, \omega_1^*) = 0$ ,有 $g_2(k_p^*, k_d^*, \omega_{\min}^*) = 0$ ,通过计算可得 $k_p^* = p_1 p_2 / \lambda_1$ ,说明目标函数 $f_1(k_p, k_d, \omega_1)$ 在 $k_p^* = p_1 p_2 / \lambda_1$ 处存在极小值.等价地, $\tau_1(k_p, k_d)$ 在 $k_p$ 的边界处存在极大值.

同样,对于 $\tau_m(k_p, k_d)$ 的情况,通过Fritz John条件<sup>[16]</sup>,可得 $\tau_m(k_p, k_d)$ 在 $k_p^* = p_1 p_2 / \lambda_1$ 处实现极大值.

综上所述,得到结论(7)~(10),即

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = \sup_{k_p, k_d \in \Omega_u} \min\{\tau_1(k_p, k_d), \tau_m(k_p, k_d)\} &= \\ \sup_{k_d > \frac{p_1+p_2}{\lambda_1}} \min\left\{\tau_1\left(\frac{p_1 p_2}{\lambda_1}, k_d\right), \tau_m\left(\frac{p_1 p_2}{\lambda_1}, k_d\right)\right\} &= \\ \sup_{k_d > \frac{p_1+p_2}{\lambda_1}} \hat{\tau}(k_d). \end{aligned}$$

另外,类似于文献[14]的证明,可知 $\hat{\tau}(k_d)$ 关于 $k_d \in [(p_1 + p_2)/\lambda_1, \infty)$ 是拟凹函数.  $\square$

**注1** 考虑领导者数量为单个( $N - m = 1$ )时, $-\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$ 为单位向量,若误差系统(4)渐近稳定,则有 $z_{\mathcal{F}}(t) = z_{\mathcal{R}}(t), t \rightarrow \infty$ . 即定理1退化为求解无向图下多智能体系统(1)和(2)的领导-跟随控制的最大时滞范围问题.

### 3 包含控制的时滞优化: 有向图

本节将给出多智能体系统(1)和(2)在有向图下保持包含控制所能允许的最大时滞范围的表达式,并通过遗传算法对结果进行优化求解.

**定理2** 在有向图下,多智能体系统(1)在反馈控制协议(2)的作用下实现包含控制的最大时滞范围为

$$\bar{\tau} = \sup_{(k_p, k_d) \in \Omega_d} \min_{i \in \mathcal{F}} \tau_i(k_p, k_d). \quad (18)$$

其中

$$\tau_i(k_p, k_d) = \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_1}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{\omega_i}{p_2}}{\omega_i} + \frac{\arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p}}{\omega_i} + \frac{\frac{\phi_i}{\omega_i} - \frac{\pi}{\omega_i}}{\omega_i}; \quad (19)$$

$$\omega_i^2 = \frac{\sqrt{(k_d^2 |\lambda_i|^2 - (p_1^2 + p_2^2))^2 + 4(k_p^2 |\lambda_i|^2 - p_1^2 p_2^2)}}{2} + \frac{k_d^2 |\lambda_i|^2 - (p_1^2 + p_2^2)}{2}; \quad (20)$$

$$\phi_i = \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)}, \phi_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad (21)$$

$$\Omega_d = \left\{ (k_p, k_d) : k_p > \frac{|\beta|}{|\lambda_i|_{\min}}, k_d > \frac{\alpha}{\text{Re}(\lambda_i)_{\min}}; (k_d \text{Re}(\lambda_i) - \alpha)^2 (k_p \text{Re}(\lambda_i) - \beta) + ((k_d \text{Re}(\lambda_i) - \alpha)k_d - k_p)k_p \text{Im}(\lambda_i)^2 > 0, i \in \mathcal{F} \right\}. \quad (22)$$

**证明** 首先,由复系数多项式稳定判据以及假设3,给出了传递函数(5)在有向图下的可行参数域 $\Omega_d$ . 其中: $|\lambda_i|_{\min} = \min\{|\lambda_i|, i \in \mathcal{F}\}$ ,  $\text{Re}(\lambda_i)_{\min} = \min\{\text{Re}(\lambda_i), i \in \mathcal{F}\}$ .

类似于定理1的证明,存在 $\omega_i > 0$ ,即式(20),满足相角条件

$$\angle L_i(j\omega_i) = 2\pi + \phi_i + \arctan \frac{\omega_i}{p_1} + \arctan \frac{\omega_i}{p_2} + \arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p}.$$

对于存在时滞 $\tau_i > 0$ ,使得 $F_i(j\omega_i, \tau_i) = 0$ ,可得

$$\tau_i \omega_i = \phi_i - \pi + \arctan \frac{\omega_i}{p_1} + \arctan \frac{\omega_i}{p_2} + \arctan \frac{k_d \omega_i}{k_p},$$

因此,对于任意 $\tau < \tau_i$ 以及全部 $\omega \geq 0$ ,都有 $F_i(j\omega, \tau) \neq 0$ ,即特征方程 $F_i(s, \tau)$ 是稳定的. 可得与 $k_p, k_d$ 相

关的时滞范围为 $\tau_i(k_p, k_d)$ ,即式(19).  $\square$

同理,当领导者数量为单个时,定理2退化为有向图情况下领导-跟随控制的最大时滞范围问题.

**注2** 相比于无向图,对于有向图的分析变得更加困难. 由于拉普拉斯矩阵复数特征值的存在及可行参数域的复杂性,很难通过函数分析以及非线性规划的方法获得解析解. 因此,本文将提出智能优化算法进行求解.

接下来,将定理2转换成如下非光滑优化问题:

$$\begin{aligned} \min & f(k_p, k_d). \\ \text{s.t.} & p_1 p_2 - |\lambda|_{\min} k_p \leq 0; \\ & p_1 + p_2 - \text{Re}(\lambda)_{\min} k_d \leq 0; \\ & -(k_d \text{Re}(\lambda_i) - (p_1 + p_2))^2 (k_p \text{Re}(\lambda_i) + p_1 p_2) - \\ & ((k_d \text{Re}(\lambda_i) - (p_1 + p_2))k_d - k_p)k_p \text{Im}(\lambda_i)^2 \leq 0; \\ & \omega_i^4 - (k_d^2 |\lambda_i|^2 - (p_1^2 + p_2^2))\omega_i^2 - \\ & (k_p^2 |\lambda_i|^2 - p_1^2 p_2^2) = 0, i \in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$f(k_p, k_d) = \max_{i \in \mathcal{F}} f_i(k_p, k_d), \quad (24)$$

$$f_i(k_p, k_d) = -\tau_i(k_p, k_d), i \in \mathcal{F}. \quad (25)$$

非光滑优化问题的求解算法步骤如下.

**step 1: 初始化.** 给定系统的不稳定极点 $p_1, p_2$ ,并将 $\Omega_d$ 也就是式(23)的约束条件作为输入参数的初始范围.

**step 2: 编码.** 因为 $k_p, k_d$ 为式(23)的输入参数,使用二进制编码的方式将 $k_p, k_d$ 转换为染色体(个体)的形式,并选择合适的初始种群大小.

**step 3: 适应度函数.** 考虑目标函数值非负,将式(23)转换为求解极大值问题,因此,目标函数为 $\min_{i \in \mathcal{F}} -f_i(k_p, k_d)$ ,并设计合适的适应度函数.

**step 4: 遗传算子.** 采用精英保留策略的选择方式,将运行过程中适应度最高的个体直接保留下来,遗传到下一代;同时,选择合适的参数对本代个体进行交叉变异,产生下一代种群. 最后,再评估种群中个体的适应度;

**step 5: 终止条件.** 设置遗传算法的终止条件,重复step 4直到算法运行到满足终止条件,停止运行并输出最优值以及解码所对应的个体. 此时,可以得到系统能够容忍的最大时滞范围 $\bar{\tau}$ 和对应的控制器参数 $k_p, k_d$ .

**注3** 与传统解析优化算法相比,遗传算法可以同时搜索多个最优解,不容易陷入局部最优解;是一种随机算法,用概率规则调整搜索方向,具有全局寻优能力;在优化过程中只需要目标函数信息,并不依

赖梯度信息以及其他信息,适用性广. 遗传算法相较于其他智能算法具有实现简单、通用性强的特点,并且结论与初始条件无关. 尽管遗传算法能够得到本问题的全局最优解,但是其作为通用型算法,仍存在收敛速度较慢以及局部搜索能力较差的问题.

### 4 仿真实例

**例1** 考虑具有6个智能体的多智能体系统(1)和(2),其中包含2个领导者和4个跟随者. 根据图1的通信拓扑图可以得到其拉普拉斯矩阵有2个零特征值,其余4个特征值为 $\lambda_1 = 0.6571, \lambda_2 = 2.5293, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4.8136$ . 可以验证矩阵 $\mathcal{L}_1$ 的特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$ . 设系统的不稳定极点为 $p_1 = 0.1, p_2 = 0.5$ ,可得控制协议(2)的可行参数域为

$$\Omega_u = \{(k_p, k_d) : k_p > 0.0761, k_d > 0.9131\}.$$

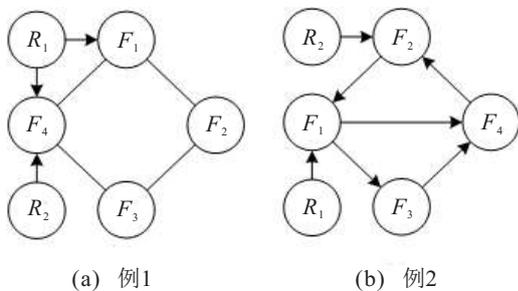


图1 通信拓扑图

通过定理1,计算得到多智能体系统(1)和(2)在无向图下保持包含控制所能允许的最大时滞范围 $\bar{\tau} = 0.3149$ 及 $\bar{\tau}$ 与 $k_d$ 的关系,如图2所示. 选取控制器参数 $(k_p, k_d) = (0.2, 1.5)$ ,与不同的时滞 $\tau = 0.15 < \bar{\tau}$ 和 $\tau = 0.4 > \bar{\tau}$ 进行仿真,图3给出了分别为 $\tau = 0.15$ 和 $\tau = 0.4$ 时系统的位置速度状态曲线. 可见:当 $\tau$ 小于最大时滞范围时,系统能够保持包含控制;反之,当 $\tau$ 大于最大时滞范围时,包含控制遭到破坏.

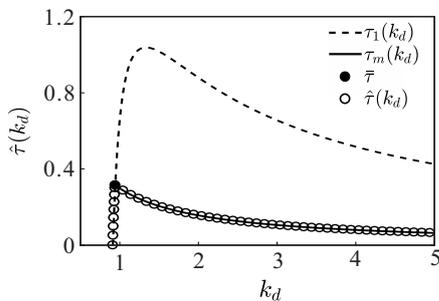


图2 最大时滞范围 $\bar{\tau}$ 与 $k_d$ 的关系

**例2** 考虑具有6个智能体的多智能体系统(1)和(2),其中包含2个领导者和4个跟随者. 根据图1的通信拓扑图可以得到其拉普拉斯矩阵有2个零特征值,其余4个特征值为 $\lambda_1 = 0.5344, \lambda_2 = 2.2328 + j0.7926, \lambda_3 = 2.2328 - j0.7926, \lambda_4 = 2$ ,等同于矩阵

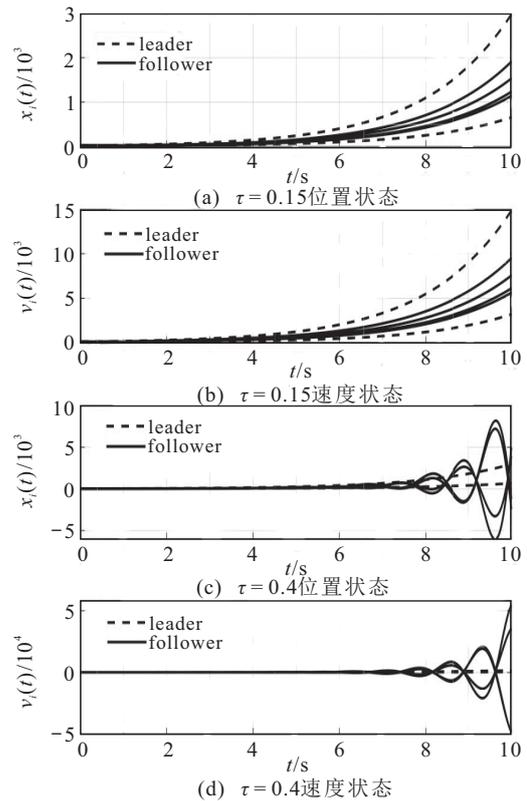


图3  $\tau = 0.15$ 和 $\tau = 0.4$ 时系统位置速度状态曲线

$\mathcal{L}_1$ 的特征值. 设系统的不稳定极点为 $p_1 = 0.1, p_2 = 0.5$ ,考虑以下非光滑优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} f_i(k_p, k_d). \\ \text{s.t.} \quad & 0.05 - 0.5344k_p \leq 0, \\ & 0.6 - 0.5344k_d \leq 0, \\ & -(k_d \text{Re}(\lambda_i) - 0.6)^2(k_p \text{Re}(\lambda_i) + 0.05) - \\ & ((k_d \text{Re}(\lambda_i) - 0.6)k_d - k_p)k_p \text{Im}(\lambda_i)^2 \leq 0, \\ & \omega_i^4 - (k_d^2 |\lambda_i|^2 - 0.26)\omega_i^2 - (k_p^2 |\lambda_i|^2 - 0.0025) = 0, \\ & i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{26}$$

通过算法1求解,得到系统(1)和(2)在有向图下保持包含控制所能允许的最大时滞范围 $\bar{\tau} = 0.3613$ . 选取控制器参数 $(k_p, k_d) = (0.2, 2)$ ,与不同的时滞 $\tau =$

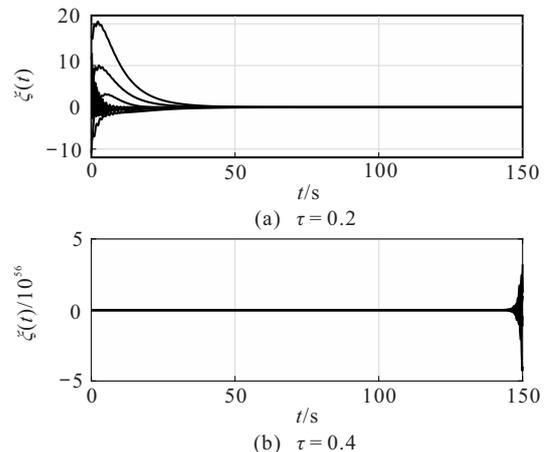


图4  $\tau = 0.2$ 和 $\tau = 0.4$ 时系统误差状态曲线

$0.2 < \bar{\tau}$ 和 $\tau = 0.4 > \bar{\tau}$ 对系统进行仿真,图4为 $\tau = 0.2$ 和 $\tau = 0.4$ 时系统的包含控制误差状态曲线。可见:在 $\tau$ 小于最大时滞范围时,系统能够保持包含控制;反之,当 $\tau$ 大于最大时滞范围时,包含控制遭到破坏。

## 5 结论

本文考虑了无向图和有向图两种情况下,针对同时存在通信延时和自延时的不稳定二阶多智能体系统,研究了在反馈控制协议下闭环系统的鲁棒包含控制问题。针对无向图,给出了系统实现鲁棒包含控制所能允许的最大时滞范围的表达式,并通过凸优化方法解析地获得了最大时滞范围的最优解。在有向图的情况下,尽管给出了最大时滞范围的表达式,但由于矩阵 $\mathcal{L}$ 的复特征值带来的复杂性,导致凸分析等方法解析获取最优解的困难性,本文采用智能优化方法寻得了最大时滞范围的最优解。另外,以上结果均可退化到具有一个领导者的领导-跟随控制问题。对于有向图,探索复特征值情况下的非光滑优化方法,将是未来需要关注的方向。

## 参考文献(References)

- [1] Cao Y C, Ren W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph[C]. Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, 2009: 3014-3019.
- [2] Liu H Y, Xie G M, Wang L. Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1415-1422.
- [3] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [4] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [5] Hu J P, Hong Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 374(2): 853-863.
- [6] Zhao X Y, Zhou S L, Wang S L, et al. Formation containment control based on multiple unmanned aerial vehicle system[J]. Computer Engineering, 2020, 46(8): 284-289.
- [7] Wei Z Q, Weng Z M, Hua Y Z, et al. Formation-containment tracking control for heterogeneous unmanned swarm systems with switching topologies[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42: 1-16.
- [8] Rong L N, Shen H. Distributed PD-type protocol based containment control of multi-agent systems with input delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(9): 3600-3611.
- [9] Wang D, Wang D, Wang W. Necessary and sufficient conditions for containment control of multi-agent systems with time delay[J]. Automatica, 2019, 103: 418-423.
- [10] Yang H Y, Zhu X L, Zhang S Y. Consensus of second-order delayed multi-agent systems with leader-following[J]. European Journal of Control, 2010, 16(2): 188-199.
- [11] Ma D, Chen J Q, Lu R Q, et al. Delay consensus margin of first-order multiagent systems with undirected graphs and PD protocols[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(9): 4192-4198.
- [12] Ma D, Chen J Q, Lu R Q, et al. Delay effect on first-order consensus over directed graphs: Optimizing PID protocols for maximal robustness[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2022, 60(1): 233-258.
- [13] Ma D, Tian R, Zulfiqar A, et al. Bounds on delay consensus margin of second-order multiagent systems with robust position and velocity feedback protocol[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(9): 3780-3787.
- [14] Ma D, Chen J, Chai T Y. Exact computation of maximal allowable delay for general second-order multi-agents consensus[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, DOI: 10.1002/rnc.548.
- [15] Bertsekas D. Nonlinear programming[M]. The 3rd edition. MA: Athena Scientific, 2016.
- [16] Cao Y C, Ren W, Egerstedt M. Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1586-1597.
- [17] Li Z K, Ren W, Liu X D, et al. Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(5): 534-547.
- [18] Mei J, Ren W, Ma G F. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(6): 1415-1421.
- [19] Chen J Q, Ma D, Xu Y, et al. Delay robustness of PID control of second-order systems: Pseudoconcavity, exact delay margin, and performance tradeoff[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(3): 1194-1209.

## 作者简介

李瑶珀(1998—),男,硕士生,从事多智能体系统控制、时滞系统控制等研究, E-mail: 2070693@stu.neu.edu.cn;

马丹(1977—),女,教授,博士生导师,从事时滞系统鲁棒性能优化、复杂系统控制等研究, E-mail: madan@mail.neu.edu.cn.