

# 控制与决策

Control and Decision

## 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化

杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 黄达

引用本文:

杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 黄达. 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1412–1419.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0369>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性

Fixed-time group consensus control for nonlinear multi-agent systems based on event-triggered mechanism  
*控制与决策*. 2023, 38(5): 1278–1285 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0406>

#### 网络攻击下多智能体系统动态事件触发一致性

Dynamic event-triggered consensus of multi-agent systems under cyber-attacks  
*控制与决策*. 2023, 38(5): 1295–1302 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0725>

#### 基于事件驱动的多智能体有限时间分群一致控制

Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with event-triggered control  
*控制与决策*. 2022, 37(11): 2925–2933 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0162>

#### 多智能体系统的事件触发无模型迭代学习双向一致性

Event-triggered model-free adaptive iterative learning bipartite consensus control for multi-agent systems  
*控制与决策*. 2022, 37(10): 2552–2558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0401>

#### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems  
*控制与决策*. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化

杨菲阳<sup>1</sup>, 于志永<sup>1†</sup>, 蒋海军<sup>1</sup>, 黄 达<sup>2</sup>

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830017; 2. 新疆工程学院 数理学院, 乌鲁木齐 830023)

**摘要:** 针对多智能体系统的分布式优化问题, 提出一种新的事件触发非周期间歇通讯控制方法, 并研究该控制方法下系统的固定时间收敛性. 首先, 考虑一类更一般的分布式优化问题, 其优化目标是局部目标函数的凸组合. 其次, 为了减少控制过程中智能体之间的通讯花费, 设计一种新的事件触发间歇控制协议. 通过引入两个辅助动力系统, 并运用固定时间稳定性理论、代数图论和不等式放缩技巧, 证明智能体的状态在固定时间内达到一致并渐近收敛到优化问题的最优解. 结合事件触发条件以及间歇控制机制, 排除控制过程中的 Zeno 行为. 最后, 通过数值仿真验证所得结论的有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 分布式优化; 凸函数; 事件触发; 固定时间; 间歇控制

中图分类号: O231 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0369

引用格式: 杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 等. 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化 [J]. 控制与决策, 2023, 38(5): 1412-1419.

## Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication

YANG Fei-yang<sup>1</sup>, YU Zhi-yong<sup>1†</sup>, JIANG Hai-jun<sup>1</sup>, HUANG Da<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830017, China; 2. Department of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi 830023, China)

**Abstract:** For the distributed optimization problem of multi-agent systems (MASs), this paper proposes a new event-triggered aperiodic intermittent communication control method and studies the fixed-time convergence of the MASs. Firstly, compared with existing distributed optimization problems, a more general one is considered in which the optimization objective is a convex combination of local objective functions. Secondly, to reduce the communication cost, a new event-triggered intermittent control protocol is designed. By introducing two auxiliary dynamical systems, and using fixed-time stability theory, algebraic graph theory and inequality techniques, it is proved that agents' states can reach consensus in a fixed-time interval and asymptotically converge to the optimal solution of the optimization problem. In a combination with the event-triggering condition and intermittent control mechanism, Zeno behavior can be avoided. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness of the conclusion.

**Keywords:** multi-agent systems; distributed optimization; convex function; event-trigger; fixed-time; intermittent control

## 0 引言

近年来, 多智能体系统的分布式协同控制问题在仿生集群、机器人控制以及无人机编队控制等众多领域得到广泛应用. 分布式优化一致性是多智能体系统协同控制的一个重要问题, 它是指智能体的状态随着时间的演化趋于一致的同时又要合作地解决全局优化问题. 由于在资源优化配置<sup>[1]</sup>和传感器网络<sup>[2]</sup>

等方面的应用, 这一问题已成为众多学者研究的热点.

根据模型的不同, 分布式优化问题可分为离散时间模型和连续时间模型. 早期的研究大多基于离散时间模型<sup>[3-5]</sup>. 许多实际系统, 如智能电网系统、无人机控制系统等可以用连续时间模型来描述, 因此, 连续系统的分布优化问题引起诸多学者的关注, 并

收稿日期: 2022-03-11; 录用日期: 2022-08-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62003289, 62163035); 中国博士后科学基金项目 (2021M690400); 中央引导地方科技发展专项资金项目 (ZY YD2022A05).

责任编辑: 杨涛.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: yzygsts@163.com.

取得了许多重要的成果. Xie等<sup>[6]</sup>研究了具有输入饱和的分布式优化问题,其中智能体之间的通讯是连续的.在实际应用中,通讯网络的带宽和智能体的能量通常是有限的,频繁的通讯不可避免地导致高能耗.因此,为了减少智能体之间的通讯频率,学者们提出了一些不连续控制方法;Kia等<sup>[7]</sup>分别利用周期和事件触发采样控制方法研究了强连通加权平衡网络上的分布式优化问题;Yu等<sup>[8]</sup>运用事件触发采样控制方法研究了一类异构线性多智能体系统的分布式优化协同问题;Tran等<sup>[9]</sup>考虑二阶无向网络上多智能体系统的分布式优化问题,分别提出了时间触发和事件触发采样控制协议;杨涛等<sup>[10]</sup>通过设计基于比例积分策略的连续控制协议和事件触发采样控制协议,研究了无向网络上的分布式优化问题.然而,很少有工作通过设计事件触发通讯协议来研究有向网络上的分布式优化问题.

虽然事件触发采样控制可以降低控制器的更新频率,但是,控制器在整个控制过程中仍然处于运行状态.为了减少控制器的工作时间,文献[11]提出了间歇控制方法.间歇控制是指控制器在一些时间段工作,另一些时间段休息.与连续控制相比,间歇控制可以有效地减少控制器工作时间以及信息传输成本.近年来,间歇控制也用于多智能体系统的分布式协同控制问题. Wen等<sup>[12]</sup>研究了周期间歇通讯下二阶多智能体系统的一致性;Huang等<sup>[13]</sup>研究了周期间歇通讯下二阶多智能体系统的领导者追踪问题;Yu等<sup>[14]</sup>考虑了非周期间歇通讯下的多智能体系统一致性.在这些工作中,智能体在每个控制区间的通讯是连续的.进一步,Hu等<sup>[15]</sup>在周期间歇控制的每个工作区间内考虑事件触发通讯策略,研究了多智能体系统的一致性;Liu等<sup>[16]</sup>研究了间歇事件触发控制下多智能体系统的领导者追踪问题.这些工作<sup>[15-16]</sup>都是在控制区间内引入事件触发采样控制机制,但控制区间仍然是周期的.据笔者所知,目前很少有工作考虑控制与非控制区间是由触发函数决定的情况.此外,利用间歇控制研究系统的分布式优化问题的结果很少,这也是本文的研究动机之一.

在多智能体系统的分布式优化中,系统在控制协议下的收敛性是判断协议是否实用的一个重要因素.结合实际应用,使多智能体系统在有限时间内解决优化问题是非常有意义的.对于不同的优化问题,Lin等<sup>[17]</sup>设计了一系列分布式协议并研究了控制协议下系统的有限时间收敛性;Wang等<sup>[18-19]</sup>分别研究了具有外部干扰的链式积分器系统和二阶系

统的有限时间优化问题.然而,在有限时间收敛中,停息时间的估计依赖于系统的初值,当系统初值未知时,很难得到停息时间的估计值.为了解决这一问题,Polyakov<sup>[20]</sup>提出了固定时间稳定性理论.随后,这一理论也被用于多智能体系统的分布式优化问题的研究.Chen等<sup>[21]</sup>通过变量转换的方法研究了具有等式约束的多智能体系统的固定时间优化问题;Ning等<sup>[22]</sup>考虑时不变和时变优化问题,研究了多智能体系统的固定时间分布式优化问题;Wang等<sup>[23]</sup>提出了一个两阶段的分布式协议,研究任意初值下系统的固定时间优化问题;Jin等<sup>[24]</sup>通过设计事件触发采样控制协议研究了无向网络上多智能体系统的固定时间优化问题;进一步,Yu等<sup>[25]</sup>分别设计了连续和事件触发采样控制协议,研究有向网络上多智能体系统的固定时间优化问题.然而,对于多智能体系统固定时间分布式优化问题的研究结果较少,有待于进一步完善.

基于上述分析,本文旨在设计事件触发间歇控制协议来研究多智能体系统的固定时间优化一致性问题.与现有的工作相比,本文的贡献主要包括以下3点:

- 1) 本文考虑的全局优化目标是由局部目标函数的凸组合构成.特别地,当优化问题中权重参数相同时,本文考虑的优化问题可以类似化简为文献[7,10,18-19,22-23]中的优化问题.因此,本文考虑的优化问题更具有有一般性.

- 2) 本文通过构造辅助系统,提出一种新的事件触发间歇控制协议,分析并证明了该协议可以使所有智能体的状态在固定时间内实现一致并渐近收敛到优化问题的最优解.此外,对于间歇控制下系统的收敛性分析,现有文献<sup>[12-16]</sup>通常运用相关微分不等式引理来保证系统的收敛性,而本文结合辅助系统的固定时间收敛性与函数的极限性质,证明了协议下系统的固定时间收敛性,为间歇控制下系统的收敛性分析提供一种新的方法.

- 3) 在传统的周期和非周期间歇控制中,控制时刻的选择是时间依赖的,而且控制区间的选择依赖于Lyapunov稳定性条件.由于通常得到的是充分条件并且具有保守性,这会使控制过程中产生一些冗余信息和不必要的控制行为,增加系统的控制花费.因此,本文提出依赖系统状态的事件触发间歇控制协议,该协议可以通过降低控制器工作的时间和减少控制次数达到降低通讯花费的目的.

## 1 预备知识和模型描述

### 1.1 符号说明

$\mathbf{R}^N$  代表  $N$  维欧几里德空间;  $\mathbf{R}^{N \times n}$  代表  $N \times n$  维实矩阵;  $\mathbf{N}$  代表自然数集;  $\mathcal{I}$  代表指标集  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;  $I_n$  是  $n$  维单位矩阵;  $1_N$  和  $0_N$  分别代表分量全为 1 和 0 的  $N$  维列向量;  $\otimes$  代表矩阵的 Kronecker 积;  $\nabla f(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  代表函数  $f(\cdot)$  的梯度;  $\text{sign}(\cdot)$  表示符号函数. 令  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $\text{sign}(y) = [\text{sign}(y_1), \text{sign}(y_2), \dots, \text{sign}(y_n)]^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $\text{sig}^\alpha(y) = [\text{sig}^\alpha(y_1), \text{sig}^\alpha(y_2), \dots, \text{sig}^\alpha(y_n)]^T \in \mathbf{R}^n$ , 其中  $\text{sig}^\alpha(y_i) = \text{sign}(y_i)|y_i|^\alpha$ ,  $i \in \mathcal{I}$ . 对于向量  $y$ ,  $y^T$  代表  $y$  的转置,  $\|y\|_r = (|y_1|^r + |y_2|^r + \dots + |y_n|^r)^{1/r}$  代表向量  $y$  的  $r$ -范数, 其中  $r > 0$ .  $P_W(y)$  代表向量  $y$  在闭凸集  $W$  上的投影.

### 1.2 代数图论

对于由  $N$  个智能体组成的多智能系统, 智能体之间的通讯连接可以用赋权有向图  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$  来表示. 其中:  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  表示顶点集,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  表示边集,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$  表示赋权邻接矩阵. 在矩阵  $\mathcal{A}$  中,  $a_{ii} = 0$ . 若  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} > 0$ ; 否则,  $a_{ij} = 0$ . 对于一条有向边  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ,  $v_i$  表示起点,  $v_j$  表示终点. 如果在图  $\mathcal{G}$  的任意两个节点之间存在一条有向路径, 则称图  $\mathcal{G}$  是强连通的. 图  $\mathcal{G}$  的入度矩阵定义为  $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ , 其中  $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ . 图  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵定义为  $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ . 若存在着一个正向量  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N)^T$  使得  $\vartheta_i a_{ij} = \vartheta_j a_{ji}$ ,  $i, j \in \mathcal{I}$ , 则称有向图  $\mathcal{G}$  是  $\vartheta$ -细平衡的. 不失一般性, 本文假设有向细平衡图满足  $\sum_{i=1}^N \vartheta_i = 1$ . 令  $\Theta = \text{diag}\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N\}$ ,  $A = \Theta \mathcal{A}$ ,  $L = \Theta \mathcal{L}$ , 则矩阵  $L$  是一个对称 Laplacian 矩阵, 其特征值表示为  $\lambda_i(L)$ ,  $i \in \mathcal{I}$ . 若矩阵  $L$  所对应的图  $\mathcal{G}$  是连通的, 则特征值满足  $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L)$ .

### 1.3 相关引理

**引理1**<sup>[25]</sup> 若  $z_1, z_2, \dots, z_n$  均为非负实数, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^\eta \leq \sum_{i=1}^n z_i^\eta, \quad 0 < \eta \leq 1;$$

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^\eta \leq n^{1-\eta} \sum_{i=1}^n z_i^\eta, \quad 1 < \eta < \infty.$$

**引理2**<sup>[26]</sup> 对于任意向量  $v \in \mathbf{R}^n$ , 如果  $0 < p < q$ , 则下述不等式成立:

$$\|v\|_q \leq \|v\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|v\|_q.$$

**引理3**<sup>[27]</sup> 若  $f_0(y): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是一个连续可微的凸函数, 则  $f_0(y)$  达到最小值当且仅当  $\nabla f_0(y) = 0$ .

**引理4**<sup>[28]</sup> 考虑一个局部可测且满足  $f(0) = 0$  的非线性系统  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . 如果存在一个  $C$ -正则函数  $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$  使得

$$\dot{V}(x) \leq -aV^\alpha(x) - bV^\beta(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

其中:  $a > 0, b > 0, \alpha > 1, 0 \leq \beta < 1$ . 则系统以  $x_0$  为初值的解  $x(t)$  在固定时间内收敛到原点, 且收敛时间  $\mathcal{T}(x_0)$  满足

$$\mathcal{T}(x_0) \leq \mathcal{T}_2 = \frac{\pi}{(\alpha - \beta)b} \left(\frac{b}{a}\right)^\epsilon \csc(\epsilon\pi),$$

其中  $\epsilon = [(1 - \beta)/(\alpha - \beta)]$ .

### 1.4 问题描述

考虑由  $N$  个智能体组成的多智能体系统, 第  $i$  个智能体的动力学描述为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (1)$$

其中  $x_i(t), u_i(t) \in \mathbf{R}^n$  分别表示智能体的状态和控制输入.

本文的主要目的是通过设计控制协议  $u_i(t)$ , 使系统(1)中所有智能体的状态达到一致且收敛到以下优化问题的最优解:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} F(x) = \sum_{i=1}^N \vartheta_i f_i(x). \quad (2)$$

其中:  $x \in \mathbf{R}^n$  是决策向量;  $\vartheta_i \in (0, 1)$ ,  $i \in \mathcal{I}$  为权重参数, 且满足  $\sum_{i=1}^N \vartheta_i = 1$ ;  $F(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是全局目标函数;  $f_i(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  表示第  $i$  个智能体的局部目标函数.

**假设1** 对于每个  $i \in \mathcal{I}$ , 局部目标函数  $f_i(x)$  是  $x$  的连续可微凸函数, 且其梯度满足  $\nabla f_i(x) = \varepsilon x + \Phi_i(x)$ . 其中:  $\varepsilon > 0, \phi > 0, \|\Phi_i(x)\|_2 \leq \phi$ .

**假设2** 智能体之间的通讯拓扑图  $\mathcal{G}$  是有向强连通且  $\vartheta$ -细平衡的.

结合网络拓扑结构, 上述优化问题(2)可以等价如下形式:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^{Nn}} F(x) = \sum_{i=1}^N \vartheta_i f_i(x_i);$$

$$\text{s.t. } (\mathcal{L} \otimes I_n)x = 0, \quad (3)$$

其中  $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$  是智能体的状态向量.

## 2 事件触发间歇控制协议的设计及分析

本节提出一个新的事件触发间歇通讯协议来解决有向细平衡网络上的分布式优化问题(3).

为了解决优化问题(3), 提出如下控制协议:

$$u_i(t) = \begin{cases} k_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}^\alpha(\psi_{ji}(t)) + k_2 \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sig}^\beta(\psi_{ji}(t)) + \\ k_3 \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sign}(\psi_{ji}(t)) + k_4 \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_{ji}(t) - \\ k_5 \nabla f_i(x_i(t)), t \in [t_k, s_k); \\ -k_5 \nabla f_i(x_i(t)), t \in [s_k, t_{k+1}). \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\psi_{ji}(t) = x_j(t) - x_i(t)$ ;  $k_1, k_2, k_3, k_5 > 0, k_4 \geq 0$ ;  $0 < \alpha < 1$  以及  $\beta > 1$  是控制参数; 时间段  $[t_k, s_k)$  为通讯区间;  $[s_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbf{N}$  为非通讯区间;  $t_k \geq 0 (t_0 = 0)$  和  $s_k > 0$  分别是通讯与非通讯控制时刻.

记  $\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^N \vartheta_j x_j(t)$ , 定义系统(1)的一致性误差为  $e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}(t)$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}$ . 为了后续方便, 定义  $\mathcal{G}_{\chi_1}, \mathcal{G}_{\chi_2}, \mathcal{G}_{\chi_3}$  为3个新的网络拓扑图, 其对应的邻接矩阵分别为  $A_{\chi_1} = [a_{ij}^{\chi_1}]_{N \times N} = [(\vartheta_i a_{ij})^2]_{N \times N}$ ,  $A_{\chi_2} = [a_{ij}^{\chi_2}]_{N \times N} = [(\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\alpha}}]_{N \times N}$ ,  $A_{\chi_3} = [a_{ij}^{\chi_3}]_{N \times N} = [(\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\beta}}]_{N \times N}$ , 且相应的Laplacian矩阵分别为  $L_{\chi_1} = [l_{ij}^{\chi_1}]_{N \times N}$ ,  $L_{\chi_2} = [l_{ij}^{\chi_2}]_{N \times N}$  和  $L_{\chi_3} = [l_{ij}^{\chi_3}]_{N \times N}$ . 因此, 根据假设2易知图  $\mathcal{G}_{\chi_1}, \mathcal{G}_{\chi_2}$  和  $\mathcal{G}_{\chi_3}$  是3个无向连通图. 此外, 记  $e(t) = [e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t)]^T$ ,  $\vartheta = [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N]^T$ ,  $\zeta = 2^{\frac{\beta-1}{2}} (nN(N-1))^{\frac{1-\beta}{2}} k_2$ ,  $A = 2^{\frac{\alpha-1}{2}} k_1 \left( \frac{\lambda_2(L_{\chi_2})}{N \|\vartheta\|_2^2 \vartheta_{\max}} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ ,  $B = \zeta \left( \frac{\lambda_2(L_{\chi_3})}{N \|\vartheta\|_2^2 \vartheta_{\max}} \right)^{\frac{1+\beta}{2}}$ . 其中:  $\lambda_2(L_{\chi_2}), \lambda_2(L_{\chi_3})$  分别表示矩阵  $L_{\chi_2}$  和  $L_{\chi_3}$  的最小非零特征值,  $\vartheta_{\max} = \max_{i \in \mathcal{I}} \{\vartheta_i\}$ .

为了设计间歇控制机制, 引入如下两个辅助动力系统:

$$\dot{y}(t) = -py^{\frac{1+\alpha}{2}}(t) - qy^{\frac{1+\beta}{2}}(t), \quad (5)$$

$$\dot{z}(t) = -pz^{\frac{1+\alpha}{2}}(t) - qz^{\frac{1+\beta}{2}}(t). \quad (6)$$

其中:  $0 < p < A, 0 < q < B, 0 < \varrho_2 < 1 < \varrho_1$  是待定常数,  $y(0) = \frac{\varrho_1}{2} e^T(0)(\Theta \otimes I_n)e(0), z(0) = \frac{\varrho_2}{2} e^T(0)(\Theta \otimes I_n)e(0)$ .

根据引理4, 易知辅助动力系统(5)和(6)在固定时间内收敛到零, 且收敛时间  $T_1$  满足

$$T_1 \leq \frac{2\pi}{(\beta - \alpha)p} \left( \frac{p}{q} \right)^{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} \csc \left( \frac{(1-\alpha)\pi}{\beta-\alpha} \right). \quad (7)$$

根据系统(5)和(6)以及控制协议(4), 给出如下事件触发条件:

$$s_k = \inf_{t > t_k} \{t : e^T(t)(\Theta \otimes I_n)e(t) \leq 2z(t)\}, \\ t_{k+1} = \inf_{t > s_k} \{t : e^T(t)(\Theta \otimes I_n)e(t) \geq 2y(t)\}, \quad (8)$$

其中  $k \in \mathbf{N}$ .

**定理1** 对于具有优化问题(2)的多智能体系统(1), 若假设1和假设2成立且控制协议(4)中的参数满足以下条件:

$$k_5 < \frac{k_3}{N\phi\vartheta_{\max}\|\vartheta\|_2} \sqrt{\frac{\lambda_2(L_{\chi_1})}{2}}, \quad (9)$$

其中  $\lambda_2(L_{\chi_1})$  是矩阵  $L_{\chi_1}$  的最小非零特征值, 则在控制协议(4)下系统(1)的状态固定时间内达到一致并且渐近收敛到优化问题(2)的最优解.

**证明** 首先, 证明多智能体系统(1)的状态在固定时间内达到一致.

考虑Lyapunov函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) e_i(t). \quad (10)$$

当  $t \in [t_k, s_k)$  时, 对  $V_1(t)$  沿着状态误差  $e_i(t)$  求导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) \dot{e}_i(t) = \\ & \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) (k_1 \text{sig}^\alpha(\psi_{ji}(t)) + k_2 \text{sig}^\beta(\psi_{ji}(t)) + \\ & k_3 \text{sign}(\psi_{ji}(t)) + k_4 \psi_{ji}(t)) - k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) \nabla f_i(x_i(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

根据  $\sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i(t) = 0_n$  可知,  $\sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) \dot{x}(t) = 0$ .

基于有向细平衡图的性质, 对于任意  $i, j \in \mathcal{I}$ ,  $\vartheta_i a_{ij} = \vartheta_j a_{ji}$  成立. 结合假设2, 有

$$\begin{aligned} k_1 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \text{sig}^\alpha(\psi_{ji}(t)) &= \\ -k_1 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \text{sig}^\alpha(e_i(t) - e_j(t)) &\leq \\ -\frac{k_1}{2} \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^{1+\alpha} &\leq \\ -2^{\frac{\alpha-1}{2}} k_1 \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\alpha}} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1+\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} -k_2 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \text{sig}^\beta(\psi_{ji}(t)) &\leq \\ -\zeta \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\beta}} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1+\beta}{2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 k_4 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \psi_{ji}(t) &\leq \\
 - \frac{k_4}{2} \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2. &\quad (14)
 \end{aligned}$$

由引理1和引理2可得

$$\begin{aligned}
 k_3 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \text{sign}(\psi_{ji}(t)) &= \\
 - \frac{k_3}{2} \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} \|e_i(t) - e_j(t)\|_1 &\leq \\
 - \frac{k_3}{2} \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2 &\leq \\
 - \frac{k_3}{2} \left( \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i^2 a_{ij}^2 \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. &\quad (15)
 \end{aligned}$$

由文献[29]中的引理3可知,不等式(15)可以改写成

$$\begin{aligned}
 k_3 \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i a_{ij} e_i^T(t) \text{sign}(\psi_{ji}(t)) &\leq \\
 - \frac{k_3}{2} \left( \sum_{i,j=1}^N \vartheta_i^2 a_{ij}^2 \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \\
 - \frac{k_3}{\|\vartheta\|_2^2} \sqrt{\frac{\lambda_2(L_{\chi 1})}{2N}} \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_2. &\quad (16)
 \end{aligned}$$

基于假设1,有

$$\begin{aligned}
 -k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) \nabla f_i(x_i(t)) &= \\
 -k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) (\varepsilon x_i(t) + \Phi_i(x_i(t))) &\leq \\
 -k_5 \varepsilon \sum_{i=1}^N \vartheta_i \|e_i(t)\|_2^2 + k_5 \sqrt{N} \phi \vartheta_{\max} \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_2. &\quad (17)
 \end{aligned}$$

结合条件(9),将式(12)~(17)代入(11)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &\leq \\
 -2^{\frac{\alpha-1}{2}} k_1 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\beta}} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} &- \\
 \zeta \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vartheta_i a_{ij})^{\frac{2}{1+\beta}} \|e_i(t) - e_j(t)\|_2^2 \right]^{\frac{1+\beta}{2}} &\leq \\
 -2^{\frac{\alpha-1}{2}} k_1 [e^T(t)(L_{\chi 2} \otimes I_n)e(t)]^{\frac{1+\alpha}{2}} &- \\
 \zeta [e^T(t)(L_{\chi 3} \otimes I_n)e(t)]^{\frac{1+\beta}{2}} &\leq \\
 -AV_1^{\frac{1+\alpha}{2}}(t) - BV_1^{\frac{1+\beta}{2}}(t). &\quad (18)
 \end{aligned}$$

当 $t \in [s_k, t_{k+1})$ 时,智能体之间不进行通讯,则有

$$\dot{V}_1(t) = -k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i e_i^T(t) \nabla f_i(x_i(t)) \leq$$

$$\begin{aligned}
 k_5 \phi \sqrt{\vartheta_{\max}} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\vartheta_i} \|e_i(t)\|_2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\
 k_5 \phi \sqrt{N \vartheta_{\max}} \left[ \sum_{i=1}^N \vartheta_i \|e_i(t)\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= \\
 HV_1^{\frac{1}{2}}(t), &\quad (19)
 \end{aligned}$$

其中 $H = k_5 \phi \sqrt{N \vartheta_{\max}}$ .

根据不等式(18),当 $t \in [t_k, s_k)$ 时,由 $V_1(t_k) = y(t_k)$ 和 $\dot{V}_1(t) < \dot{y}(t)$ 可知, $V_1(t) \leq y(t)$ .当 $t \in [s_k, t_{k+1})$ 时,有 $V_1(t) < y(t)$ .因此,对于任意的 $t > 0$ ,都满足 $0 \leq V_1(t) \leq y(t)$ .因为函数 $y(t)$ 在固定时间 $T_1$ 内收敛到0,所以 $\lim_{t \rightarrow T_1} V_1(t) = 0$ .故所有智能体的状态在 $t \geq T_1$ 之后达到一致.

其次,证明所有多智能体的状态都渐近收敛到优化问题(2)的最优解.

根据上述的分析可知,对于任意的 $t \geq T_1, i \in \mathcal{I}$ ,都有 $x_i(t) = \bar{x}(t)$ .因此,当 $t \geq T_1$ 时,有

$$\dot{\bar{x}}(t) = -k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i \nabla f_i(\bar{x}(t)). \quad (20)$$

考虑如下Lyapunov函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2} (\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t)))^T (\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t))), \quad (21)$$

其中 $W = \left\{ x^* \mid \sum_{i=1}^N \vartheta_i \nabla f_i(x^*) = 0 \right\}$ .

依据假设1可知, $\sum_{i=1}^N \vartheta_i f_i(x(t))$ 为凸函数.当 $t > T_1$ 时,对 $V_2(t)$ 求导数可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) &= -k_5 [\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t))]^T \sum_{i=1}^N \vartheta_i \nabla f_i(\bar{x}(t)) = \\
 -k_5 \sum_{i=1}^N \vartheta_i [\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t))]^T \nabla f_i(\bar{x}(t)) &\leq \\
 -k_5 \left[ \sum_{i=1}^N \vartheta_i f_i(\bar{x}(t)) - \sum_{i=1}^N \vartheta_i f_i(P_W(\bar{x}(t))) \right]. &\quad (22)
 \end{aligned}$$

令

$$X = \{ \bar{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\bar{x} - P_W(\bar{x})\|_2 \leq \omega \},$$

$$\mu = \min_{\bar{x} \in \partial X} \sum_{i=1}^N \{ \vartheta_i (f_i(\bar{x}) - f_i(P_W(\bar{x}))) \}.$$

其中: $\omega$ 是任意正常数, $\partial X$ 表示 $X$ 的边界.根据 $P_W(\bar{x}) \in W$ 以及文献[17]中的引理2可得 $\mu > 0$ .受文献[17]中引理3的启发易知,对于任意 $\bar{x} \notin X$ 有 $\sum_{i=1}^N \vartheta_i (f_i(\bar{x}) - f_i(P_W(\bar{x}))) > \mu$ .因此,对于任意的

$t > T_1$  以及  $\bar{x} \notin X$ , 有  $\dot{V}_2(t) \leq -k_5\mu$ . 这意味着对于任意的  $\omega > 0$ , 存在常数  $T_2 \geq T_1$ , 使得当  $t > T_2$  时,  $\|\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t))\|_2 \leq \omega$ . 再由  $\omega$  的任意性, 令  $\omega \rightarrow 0$ , 得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - P_W(\bar{x}(t))\|_2 = 0$ . 因此,  $x(t)$  渐近收敛到优化问题(2)的最优解  $x^*$ .

最后, 证明Zeno现象不会发生.

由事件触发条件(8)可知, 在时刻  $t_k (k \in \mathbf{N}, t_0 = 0)$ , 控制器从非通讯状态转变为通讯状态, 则有  $z(t_k) < V_1(t_k) = y(t_k)$ . 当  $t \in [t_k, s_k)$  时, 由式(18)可知  $\dot{V}_1(t) < \dot{z}(t)$ . 根据函数的连续性可知, 必定存在一个正常数  $\Delta_k > 0$ , 使得  $s_k = t_k + \Delta_k$  且  $V_1(s_k) = z(s_k)$ . 当  $t \in [s_k, t_{k+1})$  时, 由式(19)可知

$$V_1^{\frac{1}{2}}(t) \leq \frac{1}{2}H(t - s_k) + V_1^{\frac{1}{2}}(s_k),$$

且

$$V_1^{\frac{1}{2}}(t_{k+1}) = y^{\frac{1}{2}}(t_{k+1}) \leq \frac{1}{2}H(t_{k+1} - s_k) + V_1^{\frac{1}{2}}(s_k).$$

令  $\Pi_k = t_{k+1} - s_k$ , 则有

$$\Pi_k \geq \frac{2}{H}(y^{\frac{1}{2}}(t_{k+1}) - z^{\frac{1}{2}}(s_k)).$$

当  $y(t_{k+1}) \neq 0$  时, 结合辅助系统(5)和(6)可知,  $(y^{\frac{1}{2}}(t_{k+1}) - z^{\frac{1}{2}}(s_k)) > 0$ . 因此, 对于  $k \in \mathbf{N}$  和  $t < T_1$ , 有  $\Pi_k > 0$ . 即Zeno现象不可能发生. □

**注1** 在文献[24-25]中, 通过设计事件触发采样控制协议, 分别研究了无向和有向网络上多智能体系统的固定时间优化问题, 其中全局优化目标是由智能体的局部目标函数的和组成. 然而, 本文考虑的全局优化目标是局部目标函数的凸组合, 并且提出了事件触发间歇通讯协议. 事件触发采样控制可以降低控制器的更新频率, 但控制器需要持续工作. 本文提出的事件触发间歇控制协议可以减少智能体之间的通讯时间, 但每个通讯区间内控制器需要连续更新. 如何设计控制协议既能降低控制器的更新频率又能减少控制器的工作时间是今后需要进一步考虑的问题.

**注2** 本文考虑的局部目标函数是可微的凸函数, 而文献[30-32]研究了具有非凸目标函数的离散多智能体系统分布式优化问题. 受这些文献的启发, 未来工作中将进一步考虑具有非凸目标函数的多智能体系统固定时间分布式优化问题.

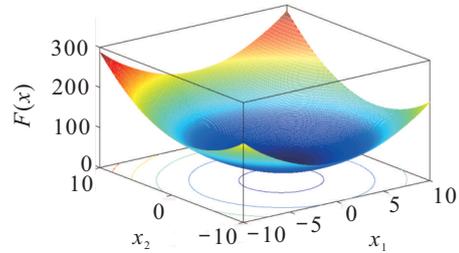
### 3 仿真实验

通过下列数值算例来验证本文定理1结论的正确性和控制协议(4)的可行性.

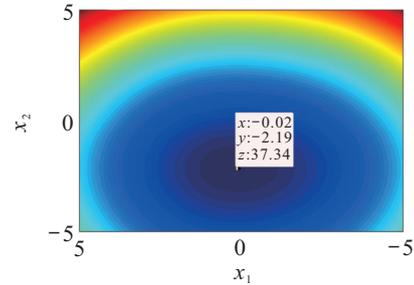
考虑由5个智能体构成的多智能体系统(1), 其优化问题(2)描述为

$$\min_{x \in \mathbf{R}^2} F(x) = \sum_{i=1}^5 \vartheta_i f_i(x).$$

其中:  $\vartheta = [0.15, 0.1, 0.25, 0.3, 0.2]^T$ ,  $f_1(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + \cos x_1 + 9$ ,  $f_2(x) = (x_1 + 6)^2 + (x_2 - 4)^2 + \sin x_2$ ,  $f_3(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 6)^2 + \cos x_1 + 20$ ,  $f_4(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + \sin x_1 - 13$ ,  $f_5(x) = (x_1 + 6)^2 + (x_2 + 5)^2 + \sin x_2 + 5$ . 显然假设1成立. 通过计算可知, 目标函数的最优值为37.34, 最优解为  $x^* = [-0.02, -2.19]^T$ , 如图1所示.



(a)  $F(x)$



(b)  $F(x)$ 的相图

图1  $F(x)$ 及其相图

设智能体之间的通讯拓扑图  $\mathcal{G}$  如图2所示, 容易验证, 有向拓扑图  $\mathcal{G}$  满足假设2.

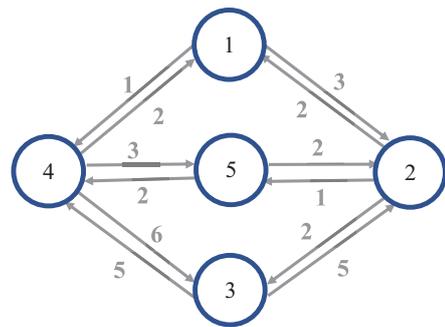


图2 通讯拓扑图  $\mathcal{G}$

经过计算可得,  $\lambda_2(L_{\chi_1}) = 0.20$ ,  $\lambda_2(L_{\chi_2}) = 0.43$  以及  $\lambda_2(L_{\chi_3}) = 0.79$ . 在控制协议(4)中, 选择  $k_1 = 0.2, k_2 = 0.4, k_3 = 0.3, k_4 = 0.3, k_5 = 0.01, \alpha = 0.5, \beta = 1.5$ . 在辅助系统(5)和(6)中, 选择  $p = 0.05, q = 0.06, \varrho_1 = 2, \varrho_2 = 0.4$ . 通过计算, 定理1的条件成立. 易知收敛时间  $T \leq 114.7$ . 随机取  $x(t)$  的初始状态分别为  $x_1(0) = [-0, 15]^T, x_2(0) = [13, 6]^T, x_3(0) = [11, 3]^T, x_4(0) = [-5, -5]^T, x_5(0) = [13, -1]^T$ . 图3分别模拟了5个智能体的状态轨迹, 即  $x_{i1}(t)$  和  $x_{i2}(t)$ . 从图3中可以看出, 所有智能体的状

态都在固定时间内达到一致.

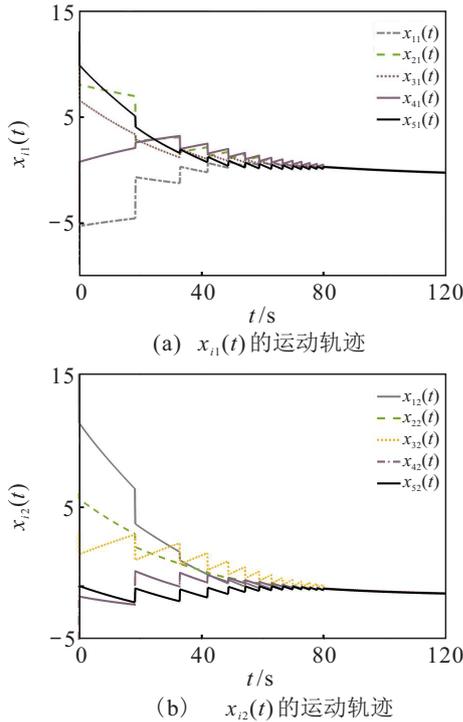


图3 位置状态 $x(t)$ 的运动轨迹

图4给出了全局目标函数 $F(x(t))$ 的变化轨迹. 当 $t = 85$ 时, $F(x(t)) = 38.53$ ;当 $t = 100$ 时, $F(x(t)) = 38.17$ . 显然, $F(x(t))$ 在逐渐趋于目标函数的最小值37.34,这与本文中能得到最优值的渐近可达性是吻合的. 图5表示的是事件触发间歇控制时刻. 其中: $t_k$ 为通讯时刻, $s_k$ 为非通讯时刻, $[t_k, s_k)$ 为通讯区间, $[s_k, t_{k+1})$ 为非通讯区间. 通过模拟可以发现,智能体之间的通讯区间非常少,并且间歇控制的次数也是非常有限的. 因此,控制协议(4)可以有效地

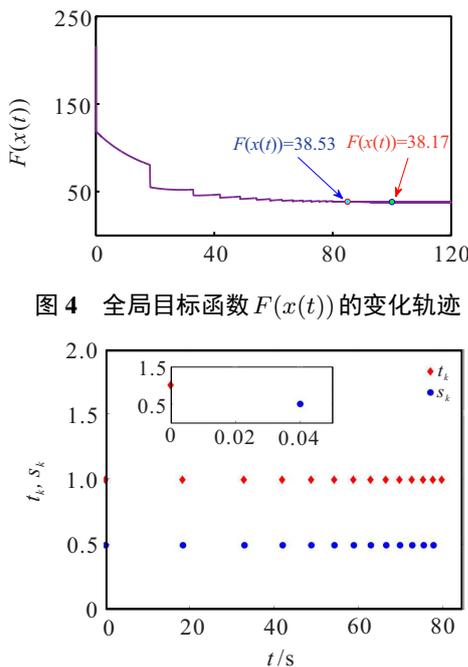


图4 全局目标函数 $F(x(t))$ 的变化轨迹

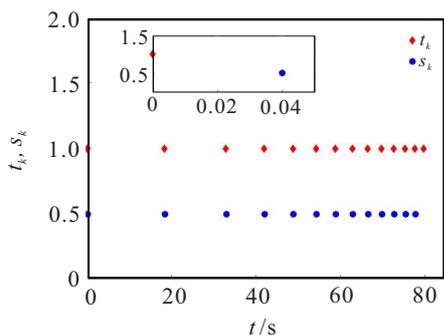


图5 事件触发时刻 $t_k$ 和 $s_k$

减少通讯控制成本.

### 4 结论

本文研究了有向网络上多智能体系统的固定时间分布式优化问题. 首先,提出了一种新的事件触发间歇控制方法,并设计了有向网络上的分布式优化协议;其次,利用Lyapunov稳定性理论、投影方法、代数图论以及矩阵不等式技巧得到多智能体系统在固定时间内达到一致的相关条件,证明了多智能体系统的状态可以渐近地收敛到全局优化问题的最优解,并且排除了Zeno现象;最后,通过一个数值例子验证了理论结果的正确性. 在未来的工作中,将考虑具有非凸目标函数的多智能体系统固定时间分布式优化问题.

### 参考文献(References)

- [1] Madan R, Lall S. Distributed algorithms for maximum lifetime routing in wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2006, 5(8): 2185-2193.
- [2] Zhang Y Q, Lou Y C, Hong Y G, et al. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(6): 3131-3142.
- [3] Xiao L, Boyd S, Kim S J. Distributed average consensus with least-mean-square deviation[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2007, 67(1): 33-46.
- [4] Li C Y, Chen S, Li J Q, et al. Distributed multi-step subgradient optimization for multi-agent system[J]. Systems & Control Letters, 2019, 128: 26-33.
- [5] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(1): 48-61.
- [6] Xie Y J, Lin Z L. Global optimal consensus for higher-order multi-agent systems with bounded controls[J]. Automatica, 2019, 99: 301-307.
- [7] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. Automatica, 2015, 55: 254-264.
- [8] Yu H, Chen T W. A new Zeno-free event-triggered scheme for robust distributed optimal coordination[J]. Automatica, 2021, 129: 109639.
- [9] Tran N T, Wang Y W, Liu X K, et al. Distributed optimization problem for second-order multi-agent systems with event-triggered and time-triggered communication[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(17): 10196-10215.
- [10] 杨涛, 徐磊, 易新蕾, 等. 基于事件触发的分布式优化算法[J]. 自动化学报, 2022, 48(1): 133-143. (Yang T, Xu L, Yi X L, et al. Event-triggered distributed optimization algorithms[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(1): 133-143.)
- [11] Li C D, Feng G, Liao X F. Stabilization of nonlinear

- systems via periodically intermittent control[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2007, 54(11): 1019-1023.
- [12] Wen G H, Duan Z S, Yu W W, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with delayed nonlinear dynamics and intermittent communications[J]. International Journal of Control, 2013, 86(2): 322-331.
- [13] Huang N, Duan Z S, Zhao Y. Leader-following consensus of second-order non-linear multi-agent systems with directed intermittent communication[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(10): 782-795.
- [14] Yu Z Y, Jiang H J, Hu C, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with delayed nonlinear dynamics and aperiodically intermittent communications[J]. International Journal of Control, 2017, 90(5): 909-922.
- [15] Hu A H, Cao J D. Consensus of multi-agent systems via intermittent event-triggered control[J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(2): 280-287.
- [16] Liu C, Liu L, Cao J D, et al. Intermittent event-triggered optimal leader-following consensus for nonlinear multi-agent systems via actor-critic algorithm[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021(99): 1-15.
- [17] Lin P, Ren W, Farrell J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5): 2239-2253.
- [18] Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for integrator chain multiagent systems with disturbances[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(12): 5296-5311.
- [19] Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for disturbed second-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4634-4647.
- [20] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [21] Chen G, Li Z Y. A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems[J]. Automatica, 2018, 95: 539-543.
- [22] Ning B D, Han Q L, Zuo Z Y. Distributed optimization for multiagent systems: An edge-based fixed-time consensus approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(1): 122-132.
- [23] Wang X Y, Wang G D, Li S H. A distributed fixed-time optimization algorithm for multi-agent systems[J]. Automatica, 2020, 122: 109289.
- [24] Jin K K, Lu Q, Yin K. Fixed-time distributed optimization for multi-agent systems using an event-triggered communication scheme[C]. The 39th Chinese Control Conference (CCC). Shenyang, 2020: 5080-5085.
- [25] Yu Z Y, Yu S Z, Jiang H J, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems over a directed network[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(1): 775-789.
- [26] Hardy G, Littlewood J, Pplya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952: 1-324.
- [27] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [28] Hu C, He H B, Jiang H J. Fixed/preassigned-time synchronization of complex networks via improving fixed-time stability[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 2882-2892.
- [29] Hong H F, Yu W W, Fu J J, et al. A novel class of distributed fixed-time consensus protocols for second-order nonlinear and disturbed multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2019, 6(4): 760-772.
- [30] Welikala S, Cassandras C G. Distributed non-convex optimization of multi-agent systems using boosting functions to escape local optima[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(11): 5175-5190.
- [31] Pang Y P, Hu G Q. A gradient-free distributed optimization method for convex sum of nonconvex cost functions[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(14): 8086-8101.
- [32] Yi X L, Zhang S J, Yang T, et al. Zeroth-order algorithms for stochastic distributed nonconvex optimization[J]. Automatica, 2022, 142: 110353.

## 作者简介

杨菲阳(1997—), 女, 硕士, 从事多智能体系统分布式优化的研究, E-mail: yangfeiyang98@163.com;

于志永(1991—), 男, 副教授, 博士, 从事多智能体系统一致性、分布式优化等研究, E-mail: yzygsts@163.com;

蒋海军(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力系统、复杂系统理论及其应用等研究, E-mail: jianghaijunxju@163.com;

黄达(1986—), 男, 副教授, 博士, 从事多智能体系统分布式协同控制的研究, E-mail: xiaoda86op@163.com.

(责任编辑: 孙艺红)