

控制与决策

Control and Decision

二型模糊决策理论与方法研究综述

秦晋栋, 徐婷婷

引用本文:

秦晋栋, 徐婷婷. 二型模糊决策理论与方法研究综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1510–1523.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.2124>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法](#)

Hesitant fuzzy three-way decision method based on soft rough sets

控制与决策. 2023, 38(3): 834–842 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1662>

[直觉模糊研究的知识结构及知识流动分析](#)

Knowledge structure and knowledge diffusion analysis in intuitionistic fuzzy field

控制与决策. 2022, 37(4): 1015–1024 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1603>

[基于一种新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法](#)

Pythagorean fuzzy TOPSIS based on novel score function and cumulative prospect theory

控制与决策. 2022, 37(2): 483–492 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0926>

[充电中断情景下电动汽车充电站两阶段多目标区间选址优化决策](#)

A two-stage multi-objective interval location optimization decision of electric vehicle charging station under charging interruption scenario

控制与决策. 2022, 37(4): 1005–1014 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1269>

[概率区间值直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法](#)

Probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and decision method

控制与决策. 2021, 36(5): 1249–1258 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1370>

二型模糊决策理论与方法研究综述

秦晋栋^{1,2†}, 徐婷婷¹

(1. 武汉理工大学 管理学院, 武汉 430070; 2. 武汉理工大学 数据科学与智能决策研究中心, 武汉 430070)

摘要: 二型模糊集(type-2 fuzzy set, T2FS)是将模糊集中的隶属函数拓展为一型模糊集而产生的集合,其具有表示更深层次不确定性的优势,能够极大程度地增强对客观世界不确定性的刻画能力. 因此,近年来围绕二型模糊环境下的决策理论与方法研究得到了蓬勃发展. 鉴于此,对二型模糊决策理论与方法进行系统性综述,梳理该领域的发展脉络,阐明现有工作的研究态势,总结二型模糊信息集成与决策的主要研究成果. 首先,介绍二型模糊集的发展历程和基础理论研究现状;然后,分别针对基于二型模糊信息的决策基础理论(信息融合理论、偏好关系理论和测度理论)以及决策方法的研究现状进行概述;最后,对二型模糊决策理论与方法的未来研究方向进行展望.

关键词: 二型模糊集; 信息融合理论; 偏好关系理论; 测度理论; 决策方法

中图分类号: C934 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.2124

引用格式: 秦晋栋,徐婷婷. 二型模糊决策理论与方法研究综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1510-1523.

Type-2 fuzzy decision-making theories and methodologies: A systematic review

QIN Jin-dong^{1,2†}, XU Ting-ting¹

(1. School of Management, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China; 2. Research Center for Data Science and Intelligent Decision Making, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: The type-2 fuzzy set is a set produced by expanding the membership function of fuzzy set into the type-1 fuzzy set. With the advantage of expressing deeper uncertainty, it is able to greatly enhance the description of uncertainty in the objective world. Therefore, the research on decision-making theories and methods in the type-2 fuzzy environment has been booming in recent years. This paper systematically surveys type-2 fuzzy decision-making theories and methods, sorts the development of this field, clarifies the research trend of existing work, and summarizes the main research results of type-2 fuzzy information aggregation and decision-making. Firstly, the development process and fundamental theory research of the T2FS are introduced. Then, the research status of decision fundamental theories (information fusion theory, preference relation theory and measure theory) and decision methods based on type-2 fuzzy information are summarized respectively. Finally, prospects of future research directions of type-2 fuzzy decision-making theories and methods are presented.

Keywords: type-2 fuzzy set; information fusion theory; preference relation theory; measure theory; decision-making method

0 引言

自 1965 年 Zadeh^[1] 提出模糊集(fuzzy set, FS)的概念以来,以模糊集理论为基础的应用学科,如模糊拓扑学、模糊规划、模糊控制、模糊决策和预测等已在工业、农业、军事、医学、信息科学、系统科学、计算机科学、管理科学、工程技术以及自然科学的各个领域得到了广泛应用,也产生了巨大的经济和社会

效益^[2]. 其中 Bellman 等^[3] 于 1970 年在管理科学领域旗舰期刊 Management Science 上发表的“Decision-making in a fuzzy environment”一文中首次提出了模糊决策(fuzzy decision making)的概念,标志着模糊决策正式成为模糊系统理论体系中的重要分支和组成部分,也成为现代不确定决策科学领域发展的重要基石. 经过 50 多年的发展,模糊决策已经成为决策分析

收稿日期: 2021-12-06; 录用日期: 2022-03-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72071151, 71701158); 教育部人文社会科学基金项目(17YJC630114); 湖北省自然科学基金项目(2020CFB773).

责任编辑: 刘宝碇.

[†]通讯作者. E-mail: qinjindongseu@126.com.

领域中发展最为活跃和迅猛的研究方向,吸引了越来越多来自于不同领域学者们的研究关注,也随之产生了一系列丰硕的科研成果^[2,4-8]。然而,随着社会经济环境的日益复杂和不确定,模糊集在描述不确定决策信息方面出现了一定程度的局限性。为了更好地刻画和处理这些复杂决策信息的不确定性,Zadeh^[9]在1975年将传统模糊集中的隶属函数拓展为一型模糊集(type-1 fuzzy set, T1FS),并在此基础上提出了二型模糊集的概念,其本质上是对模糊集进一步模糊化,使得所产生的二型模糊集能够表示更深层次的不确定性,极大程度地增强了对客观世界不确定性的处理和刻画能力。

尽管二型模糊集的概念已经提出40多年,但是由于二型模糊集本身在数学表示、几何呈现以及计算效率等方面所具有的复杂性,很长一段时间内并未引起国内外学者们的关注。直到2000年左右,在美国南加州大学知名学者Mendel及其学生所做的许多基础性、开创性工作^[10-16]的大力推动下,二型模糊理论的研究工作才逐渐成为不确定系统研究的热点领域^[2]。特别是近20年来,伴随着二型模糊系统和词计算理论研究的快速发展,二型模糊决策理论引起了越来越多学者的关注,并在信息融合^[8,10-11,17-26]、偏好关系理论^[27-40]、测度理论^[12-15,41-56]和决策方法^[5-7,55-76]等方面取得了一大批优秀成果。简洁易懂的数学表述、直观清晰的图形描绘以及简单方便的计算操作仍然是二型模糊决策理论研究的重点和难点问题,而区间二型模糊集(interval type-2 fuzzy set, IT2FS,也称为区间值模糊集)^[16]则更能够简明直观地表示不确定信息,有效地降低计算复杂性,所以区间二型模糊集,尤其是梯形(三角、正态)区间二型模糊集^[77]成为近年来二型模糊决策理论和应用研究的主流工具,其中二型模糊决策理论与方法的研究目前也主要集中在区间二型模糊决策环境中。

关于二型模糊集理论的文献综述,目前主要分为两个方面:逻辑与控制系统和决策方法。相较于决策方法方面,逻辑与控制系统方面的综述^[78-82]显得尤为全面。例如,Castillo等^[80]在2014年针对区间二型模糊逻辑在智能控制中的应用进行了综述。2020年,伍冬睿等^[82]对区间二型模糊集和模糊系统进行了系统而全面的综述,并阐明了二型模糊系统领域若干有价值的前沿研究方向。而决策方法方面的综述目前主要只有Celik等^[83]在2015年对区间二型模糊多准则决策方法所撰写的综述,仅针对区间二型模糊决策方法进行了较为系统的梳理。2019年,Qin^[8]给出了

关于二型模糊信息集成及其在多准则决策中的应用研究综述。其中关于二型模糊决策理论与方法(广义和区间)较为系统性的综述当前国内外较少见到报道。另外,由于二型模糊集所具有的能够表示更深层次模糊性的优势以及知识与数据驱动方法在处理大数据决策问题中的良好效果,通过基于知识与数据驱动的二型模糊决策方法解决实际大数据问题能够推动相关行业的发展取得良好的社会和经济效益。因此,对基于知识与数据驱动的二型模糊决策理论方法及其实际应用的研究现状进行综述具有重要的科学意义和理论价值。截止至2021年10月31日,在中国知网和Web of Science上分别以“二型模糊决策”和“type-2 fuzzy decision making”为主题词进行检索,共检索到相关文献660篇,其中中文文献(仅期刊文献)39篇,英文文献(去除KeyWords Plus检索)621篇。文献检索量发展态势如图1所示。相较于秦晋栋等^[2]在2017年12月31日检索到的332篇,可以看出最近4年关于二型模糊决策理论与方法的研究取得了突飞猛进的发展。

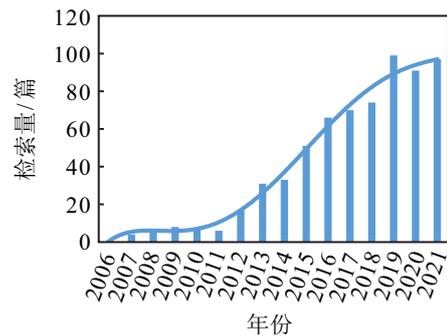


图1 二型模糊决策文献检索量发展趋势

基于上述原因可知,对二型模糊决策理论与方法进行系统性的综述十分必要。因此本文从决策基础理论(信息融合理论、测度理论和偏好关系理论)以及决策方法两个视角对二型模糊决策理论与方法进行系统性的综述,并对二型模糊决策理论与方法的未来研究方向进行全面的展望。一方面,对研究发展过程中涌现出的优秀成果进行分类总结和评述,梳理二型模糊决策理论与方法的研究现状;另一方面,对研究进程中所产生的相对薄弱和空白领域进行展望,深入分析研究领域的发展态势,也为后续的研究工作开展指明方向。

1 二型模糊集及其发展

1975年,Zadeh^[9]给出了 n 型模糊集(type- n fuzzy set, T n FS)的定义。

定义1 一个模糊集是 $n(n = 2, 3, \dots)$ 型的,如果其隶属函数取值为 $n - 1$ 型模糊集,则其中一型模

模糊集的隶属函数取值范围为[0, 1].

通常将单位闭区间[0, 1]作为一型模糊集的论域,结合上述定义可知,一型模糊集的数学表述为 $A^* = \{ \langle x, \mu_{A^*}(x) \rangle | x \in [0, 1], \mu_{A^*}(x) \in [0, 1] \}$. 即一般情况下一型模糊集是当模糊集^[1]的论域为 $X = [0, 1]$ 时所形成的一种特殊模糊集. 换句话说,一型模糊集即为单位模糊集. 另外,当 $n = 2$ 时,可以得到如下二型模糊集的原始定义.

定义2 一个二型模糊集的隶属函数取值为一型模糊集.

该定义最初仅适用于简单的计算推理,而不是决策科学领域、工程实践或者其他应用领域,因此一直缺乏具体的规范数学表述形式. 随后,许多学者对此定义做出了不同形式的改进^[16,84-92], 本文将这些改进分为两类: 集合定义和映射关系定义,具体如表1所示. 下面进一步对这两类定义进行详细介绍和分析.

表1 二型模糊集现有定义的两类分类

分类	分类依据	文献
集合定义	二型模糊集定义中的主要数学表达式以集合形式进行表述	文献[16, 87, 90, 92]
映射关系定义	二型模糊集定义中的主要数学表达式以映射关系形式进行表述	文献[84-86, 88]

Mizumoto等^[84]在1976年对原始二型模糊集的概念进行了拓展,并给出了如下定义.

定义3 若论域 X 上的一个模糊集 \tilde{A} 是二型的, 则其隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}$ 定义为

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]^J, \quad (1)$$

其中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 称为模糊度,是定义在 $[0, 1]$ (或 $[0, 1]$ 的子集 J) 上的一个模糊集.

结合定义1和定义2可知,二型模糊集的隶属函数为一型模糊集,从映射关系的严谨性方面进行考虑,定义3中隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}$ 定义为 $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow \text{TIFS}([0, 1])$ ^[85] 或 $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow \text{TIFS}([0, 1]^J)$ 更为恰当,其中 $\text{TIFS}([0, 1])$ 和 $\text{TIFS}([0, 1]^J)$ 分别表示 $[0, 1]$ 和 $[0, 1]^J$ 中全体一型模糊集构成的集合. 为了方便表述其他二型模糊集的相关定义,令 $I = [0, 1]$. 2009年,Rickard等^[86]又对二型模糊集进行了如下定义.

定义4 设 \tilde{A} 是一个二型模糊集合,其可测量的隶属函数定义为

$$\mu_{\tilde{A}} : X \times I \rightarrow I, \quad (2)$$

或

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow \{ f \in \Omega : I \rightarrow I \}, \quad (3)$$

其中 Ω 为定义在 I 上的次隶属函数集合.

值得注意的是,定义4中次隶属函数的论域为单位闭区间,实际上,在现实环境中论域为 $[0, 1]$ 的决策问题是相对较少的,为了更广泛地在实际决策中应用二型模糊信息,次隶属函数(即一型模糊集的隶属函数)的论域不仅仅局限于单位闭区间,应根据实际的决策环境进行设定. 此外,对于二型模糊集的相关定义研究最为深入的是 Mendel等^[16,87] 和 Mo等^[88-90]. 例如,Mendel等^[16]于2002年定义了目前最广泛应用的二型模糊集(如图2所示)以及区间二型

模糊集的表述式.

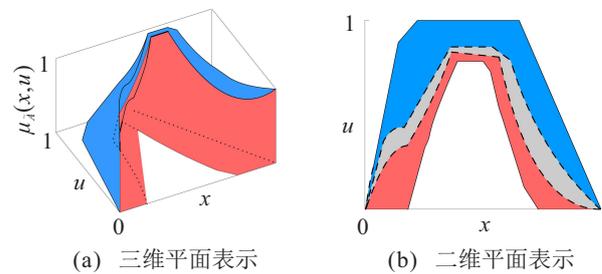


图2 二型模糊集 \tilde{A} 的不同表示

定义5 定义论域 X 上的一个二型模糊集 \tilde{A} 为

$$\tilde{A} = \{ \langle x, u, \mu_{\tilde{A}}(x, u) \rangle | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq I \}. \quad (4)$$

其中: $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$, x 为主要变量, J_x 为 x 的主隶属函数, u 为次要变量. 另外,式(4)可以等价改写为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / \langle x, u \rangle du dx, \quad J_x \subseteq I. \quad (5)$$

其中 $\int \int$ 表示所有 x 和 u 的并,对于离散论域的情形, \int 用 \sum 代替. 特别地,当 $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$ 时,称 \tilde{A} 为区间二型模糊集,其数学表述式为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} 1 / \langle x, u \rangle du dx, \quad J_x \subseteq I. \quad (6)$$

在此基础上,Zhu等^[91]于2022年给出了二型模糊数(type-2 fuzzy number, T2FN)的概念,表示为 $t(x) = (u, \mu(u))$,其中 u 和 $\mu(u)$ 分别为主要隶属和次要隶属. 需要特别说明的是,由定义2可知,二型模糊集的隶属函数为一型模糊集,所以上述定义中 $J_x \subseteq I$ (即 J_x 是单位闭区间的子区间)表述为 $J_x \in \text{TIFS}([0, 1])$ 更为严谨. 之后,Mendel等^[87]在2016年进一步对定义5进行修正和调整,给出了如下定义.

定义6 定义论域 X 上的一个二型模糊集 \tilde{A} 为

$$\tilde{A} = \{ \langle x, u, \mu_{\tilde{A}}(x, u) \rangle | x \in X, u \in I \}. \quad (7)$$

2014年,Mo等^[88]从新的视角分别给出了如下两种二型模糊集定义,其中定义8称为二型模糊集的幂

函数定义^[89].

定义7 设 \tilde{A} 为论域 X 上的一个二型模糊集合, $\mu_{\tilde{A}}^1$ 为一个多值映射,定义为

$$\mu_{\tilde{A}}^1 : X \rightarrow C(2^I), \quad (8)$$

$\mu_{\tilde{A}}^2$ 为一个常规的函数,定义为

$$\mu_{\tilde{A}}^2 : \bigcup_{x \in X} x \times J_x \rightarrow I. \quad (9)$$

其中: $C(2^I)$ 为单位区间 I 全体非空闭子集构成的集合; $\mu_{\tilde{A}}^1$ 和 $\mu_{\tilde{A}}^2$ 分别为主隶属函数和次隶属函数;对于任意 $x \in X$,主隶属度 J_x 随 x 的变化而改变.

定义8 论域 X 上的一个二型模糊集合 \tilde{A} 的隶属函数定义为

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow \bigcup_{x \in X} I^{J_x}, \quad (10)$$

即对于任意 $x \in X$,存在函数 $f \in I^{J_x}$,使得

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = f, \quad (11)$$

其中 $I^{J_x} = \{f | f : J_x \rightarrow I\}$.

2015年,Mo等^[90]定义了如下二型模糊集,也称为二型模糊集的二段式定义^[89].

定义9 设定义在论域 X 上的一个二型模糊集合 \tilde{A} 为

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{(x, u, z) | x \in X, u \in J_x \in C(2^I), \\ & z = \mu_{\tilde{A}}^2(x, u) \in I\}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中: x 、 u 和 z 分别为主、次和第3变量; J_x 为主隶属度,由一个多值映射定义而得.且

$$\mu_{\tilde{A}}^1 : X \rightarrow C(2^I), \quad (13)$$

即对于任意 $x \in X$,存在 $J_x \in C(2^I)$,使得

$$\mu_{\tilde{A}}^1(x) = J_x. \quad (14)$$

称 $\mu_{\tilde{A}}^1$ 为主隶属函数,设 $\mu_{\tilde{A}}^2$ 为次隶属函数,定义为

$$\mu_{\tilde{A}}^2 : \bigcup_{x \in X} x \times J_x \rightarrow I. \quad (15)$$

其中 $C(2^I)$ 为单位区间 I 全体非空闭子集构成的集

合,次隶属函数可以看作是一个以 $\bigcup_{x \in X} x \times J_x$ 为论域的一型模糊集合的隶属函数.

结合定义2,在定义7~定义9这3种二型模糊集的定义中,原则上 $C(2^I)$ 应表示单位区间 I 上全体一型模糊集所构成的集合,次隶属函数通常情况下是单位闭区间 I 到 I 的映射,即 $\mu_{\tilde{A}}^2 : I \rightarrow I$,次要变量 $u \in I$,并且 $I^{J_x} = \{f | f : I \rightarrow I\}$. Chiclana等^[92]在2013年对定义2进行了分析,给出了不同的二型模糊集的集合定义.

定义10 定义论域 X 上的一个二型模糊集合 \tilde{A} 为

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in \text{TIFS}(U)\}. \quad (16)$$

其中: $\mu_{\tilde{A}}(x) = \{(u, \mu_{\tilde{A}}(x)(u)) | u \in J_x \subseteq U, \mu_{\tilde{A}}(x)(u) \in U\}$, $\text{TIFS}(U)$ 是论域 U 中全体一型模糊集构成的集合.

显然,定义10中 $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in \text{TIFS}(U)\}$ 是对定义2的数学解读,最贴近二型模糊集原始定义^[9]的基本思想.但是根据定义1,一型模糊集的隶属函数的值域是单位闭区间 $[0, 1]$,所以其中隶属度 $\mu_{\tilde{A}}(x)(u)$ 的取值范围表述为 $\mu_{\tilde{A}}(x)(u) \in [0, 1]$ 更合理.

二型模糊集主要包括 r -多边形区间二型模糊集^[93-94]、梯形区间二型模糊集^[77]和区间(一般)二型模糊集^[16](如图3所示,其中UMF(A)表示上隶属函数(upper membership function),LMF(A)表示下

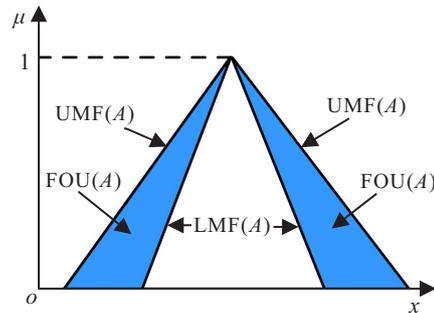


图3 区间二型模糊集A

表2 二型模糊集基础理论的研究现状

基础研究	研究内容	文献
基本运算	T2FS的交、并和补运算	文献[9,16]
	r -多边形IT2FS的加、减、乘以及数除运算	文献[94]
	IT2FS的加、减、乘以及除运算	文献[95-96]
	T2FS的否定和强否定运算	文献[97]
排序方法	IT2FS的排序方法	文献[12, 64, 98-100]
不确定测度	T2FS的质心	文献[101]
	IT2FS的质心、基数、模糊度、方差以及偏度	文献[12-13,101]
分类	离散型、(半)连通型以及复合型T2FS	文献[89,102]
FOU	T2FS的FOU	文献[16, 78, 88]

隶属函数(lower membership function), $FOU(A)$ 表示不确定覆盖域(footprint of uncertainty)). 近年来,二型模糊集基础理论方面涌现出许多优秀的研究成果^[9,12-13,16,64,94-102]. 为了便于读者更加直观地了解二型模糊集的相关基础理论研究,本文对二型模糊信息的基本运算、排序方法、不确定测度、分类以及 FOU 等5个方面的主要研究文献进行了梳理,结果如表2所示.

2 二型模糊决策的基础理论

决策基础理论是经典决策科学的重要组成部分,是开展决策分析研究的基础. 目前最受学者关注的决策基础理论研究主要集中在3个方面:信息融合理论、偏好关系理论以及测度理论. 随着二型模糊系统和词计算理论研究的快速发展,基于二型模糊信息的融合理论^[8,10-11,17-26]、偏好关系理论^[27-40]和测度理论^[12-15,41-56]等决策基础理论也成为学者们关注的焦点,并取得了较为丰硕的研究成果.

2.1 二型模糊信息的融合理论

信息融合在决策科学领域的发展过程中发挥着至关重要的作用,是决策分析中最为基础和常见的研究工具. 近几十年来,涌现出了诸多经典的集成函数,如混合平均(hybrid average, HA)算子、加权平均(weighted average, WA)算子以及加权几何(weighted geometric, WG)算子等. 对于二型模糊信息集成理论的研究现状, Qin^[8]已给出了系统和详尽的综述,这里主要对以下3类进行简单概述:

1) 二型模糊语言加权平均(linguistic weighted average, LWA)算子. 模糊加权平均(fuzzy weighted average, FWA)^[103]是二型模糊逻辑理论和决策发展中的重要工具,自提出以来受到了许多学者的关注^[104-106]. 在一个决策问题中,考虑到权重和决策信息都是利用二型模糊信息进行表示的情况以及词计算的优势, Wu等^[10]将FWA算子拓展到区间二型模糊环境下,给出了区间二型模糊LWA算子. 在此基础上, John等^[11]提出了区间二型模糊有序LWA算子. 鉴于决策者经常倾向于利用语言术语来表达自己的观点或偏好, Zhou等^[17-18]基于OWA算子研究了二型模糊OWA算子以直接集成以二型模糊集形式表征的语言信息.

2) 二型模糊对称平均(symmetric mean, SM)算子. 为了充分考虑决策问题中所有集成信息的交互关系,提高集成结果的鲁棒性, SM算子的研究工作受到了广泛关注,如区间二型模糊环境下的Maclaurin对称平均(MSM)、对偶Maclaurin对称平均(DMSM)

和指数Maclaurin对称平均(EMSM)三类集成算子^[19]和(加权)对称三角区间二型模糊HM算子^[20]以及梯形区间二型模糊MSM集成算子^[21]等.

3) 二型模糊关联积分算子. 因为模糊积分可以考虑到决策信息之间的交互作用和关联关系,所以在模糊积分和经典算子的基础上研究关联积分算子成为信息融合领域的一个研究热点,其中最常见的是基于Choquet积分或Sugeno积分的集成算子,如区间二型模糊Choquet积分集成算子^[22-24]、区间和广义二型模糊Sugeno积分算子^[25]、Banzhaf区间二型模糊Archimedean Choquet(AC)算子、区间二型模糊AC算子以及2-可加Banzhaf区间二型模糊AC算子^[26]等. 这3类集成算子在信息集成过程中分别考虑了词计算的优势和信息的交互关系以及关联作用,具有单调性、有界性以及幂等性等优良性质,极大程度地丰富了二型模糊信息融合理论.

由以上综述可知,无论是LWA算子还是SM算子亦或是关联积分算子,目前在广义二型模糊环境下的研究成果都还比较匮乏. 同时考虑概率信息和权重信息的二型模糊概率集成算子的研究当前几乎是处于空白阶段,所以基于经典方法(如WA算子、WG算子、HA算子等)的二型模糊概率集成算子需要进一步研究和完善. 其中最重要的是广义二型模糊集的基本运算和运算法则的构建,因为它们是各种广义二型模糊集成函数的基础. 另外,基于Qin^[8]的综述可以发现,现有的集成算子没有充分考虑数据驱动的集成优化问题,即基于数据驱动的二型模糊集成算子也是一个值得深入探索的研究方向. 因此,二型模糊集成算子,尤其是广义二型模糊环境下的集成算子,是未来二型模糊决策信息融合研究课题中的一个重要分支.

2.2 二型模糊信息的偏好关系理论

随着实际决策问题及其环境复杂性的日益增加,对于现实决策问题,决策者可能无法提供方案在各个属性环境下的评估值,此时偏好关系便成为决策者表达自身偏好信息的一种重要工具. 目前最受学者们青睐的经典偏好关系主要有两类:第1类是互反偏好关系(也称积性偏好关系)^[107],它是层次分析法(analytic hierarchy process, AHP)^[107]的核心基础,其主要原理是决策者从标度1/9~9中取值以刻画自身对于两个方案(或目标)进行比较后的偏好;第2类是互补偏好关系(也称模糊偏好关系)^[108],其基本思想是决策者利用单位闭区间上的某个值来表征自己对于两个方案(或目标)的偏好信息. 近五年来,二型模

糊信息的偏好关系理论取得了一定的研究进展^[27-40],其中绝大多数的成果集中在区间二型模糊偏好关系的研究和应用上,如,区间二型模糊AHP方法^[27]、区间二型模糊网络分析(analytic network process, ANP)方法^[30]以及基于积性偏好关系和多准则分类理论的区间二型模糊AHPSort(an AHP based method for sorting problems)II方法^[31]等.特别地,Runkler等^[32]在区间二型模糊环境下对风险偏好进行建模,发展了基于逻辑偏好驱动的二型模糊决策方法.Chen等^[33]在区间二型模糊环境下对经典偏好关系进行创新,研究了似然偏好关系.在此基础上,Chen^[34-35]对似然偏好矩阵进行修正,给出了区间二型模糊环境下基于偏好序关系的决策方法.Ureña等^[36]基于乘法传递性定义了区间二型模糊信息下的语言偏好关系的一致性,进而研究了一种仅利用专家偏好关系来估计不完全信息的方法.Hendiani等^[37]利用区间二型梯形模糊Bonferroni集成算子构造了基于似然性的区间二型梯形模糊偏好关系,并通过该偏好关系的上下似然性研究提高群体决策的效率.

由上述综述可以看出,二型模糊偏好关系理论的研究主要集中在区间二型模糊环境中,关于广义二型模糊偏好关系的研究成果是极其匮乏的.现有研究中绝大多数集中在对传统偏好关系的应用上,缺乏理论上的拓展性和创新性.二型模糊偏好关系的两种(加性和积性)一致性、带有残缺信息的二型模糊偏好关系以及二型模糊偏好关系排序算法等方面的研究几乎处于空白阶段.综上,对二型模糊偏好关系的一致性及其一致性检验和修正算法的研究,如何将残缺的二型模糊偏好关系转化为信息完全的二型模糊偏好关系,排序算法的研究以及它们在实际决策问题中的应用是未来二型模糊偏好关系研究领域值得重点关注的研究课题.

2.3 二型模糊信息的测度理论

测度理论不仅在风险评估、模式识别、模糊聚类、图像分割等现实问题中起着至关重要的作用,而且是逼近理想解排序(TOPSIS)方法、多准则妥协解排序(VIKOR)方法、熵权法、加权距离算子等经典决策方法和决策工具的研究基础.二型模糊信息具有能够表征高阶不确定性的优势,因此,近年来二型模糊信息的测度理论也逐渐吸引了诸多学者的研究兴趣和广泛关注.

为了测量模糊信息中所包含的不确定性,Zadeh^[1]于1965年首次提出了模糊熵的概念.此后模糊集及其拓展集熵理论的研究取得了迅猛发展,

其中二型模糊熵测度能够有效地反映二型模糊信息内部的不确定性程度,并积累了较多高质量的研究成果^[12-13,41-46,55].在区间二型模糊熵方面,Burillo等^[41]首次介绍了区间二型模糊熵的概念.之后,Zeng等^[42]进一步明确给出了区间二型模糊熵的公理化定义.在此基础上,许多学者^[12-13,43]基于各种工具构造了不同的区间二型模糊熵公式.例如,Zeng等^[43]借助标准化欧氏距离和海明距离给出了区间二型模糊熵公式.Wu等^[13]在所提出约束表现定理的基础上给出了Well-shaped的区间二型模糊集的熵公式.在广义二型模糊熵方面,Hwang等^[44]建立了广义二型模糊熵的公理化定义,并基于其所提出的包含测度给出广义二型模糊熵公式.在此基础上,王翠翠等^[45]运用模糊因子与犹豫因子介绍了一种广义二型模糊集的熵测度的公理化定义,并分别引入欧氏距离、海明距离和马氏距离给出了广义二型模糊集的熵公式.de Miguel等^[46]基于Lebesgue测度给出一型模糊集拟熵的公理化定义,并进一步提出了二型模糊熵集的概念.

距离和相似性测度在本质上是一组相对概念,它们分别测量两个不同信息单元之间的距离和贴进度,其中模糊环境下较常见的经典距离测度主要有欧氏距离、海明距离、豪斯多夫距离以及闵可夫斯基距离等.许多学者对二型模糊距离和相似性测度进行了探索性研究,其中较有代表性的工作有:Hwang等^[44]在模糊集相似性测度的公理化定义上延伸出了广义二型模糊集相似性测度的公理化定义,并利用相似性与包含度的转换关系提出了广义二型模糊相似性公式.Figueroa-García等^[47]分别基于 α -截集和质心研究了区间二型模糊数的闵可夫斯基距离公式.Wu等^[4]对现有的相似性测度^[12,15,48-50]进行了深入细致的比较分析,提出了一种可以显著降低计算成本的区间二型模糊相似性测度,并对广义二型模糊集的相似性测度进行了全面性的综述,然后基于几何解释给出了广义二型模糊集的Jaccard相似性测度^[51].McCulloch等^[52]通过比较上、下隶属度研究了区间二型模糊集的距离公式,进而给出二型模糊集的方向距离,并对现有区间和广义二型模糊环境下的相似性测度进行详细的性质分析与讨论^[53].

模糊包含测度是一种常见的模糊测度,表示两个模糊集之间相包含的程度,它与熵测度、距离测度以及相似性测度之间具有一定的转化关系.近二十年来,许多学者对二型模糊包含测度进行了拓展和完善,其中较有代表性的研究成果有:Zeng等^[43]对模糊

集包含测度的公理化定义进行拓展,给出区间二型模糊集包含测度的公理化定义,并研究了区间二型模糊集的标准化距离、相似性测度、熵测度与包含测度之间的转化关系.在此基础上,郑高等^[54]提出一种运用集合上、下隶属度函数计算区间二型模糊包含度的公式,讨论了两类公理化定义^[43,53]下相似性测度与包含测度的相互转换关系.Hwang等^[44]基于模糊集包含测度的公理化定义发展了一套新的广义二型模糊集的包含测度的公理化定义,并利用 Sugeno 积分给出包含度公式,探讨了该包含度公式与熵公式以及相似性公式之间的转化关系.

从上述综述可以看出,二型模糊环境下的测度理论研究在二型模糊基础理论研究中是较为完善的,尤其体现在四类模糊测度之间的整体性研究上.许多学者^[42-44,54]基于其中的两类、三类或四类从不同角度给出系统的分析,并探讨了它们之间的转换关系.但是其中也存在着一些薄弱环节和研究盲区,例如鲜有研究考虑信息相互作用情况下的测度构造方法,加权距离测度的研究相对较少,另外包含测度在最近几年的研究也处于相对停滞状态,熵测度的公理化定义以及熵公式的构造定理也需要进一步研究和完善.以上都是二型模糊测度理论研究中值得深入挖掘的研究方向,具有很大的研究空间和应用前景.

3 二型模糊信息的决策方法

决策是管理科学领域中一个传统且热门的研究方向,主要包含选择(selection)问题、分类(sorting)问题以及排序(ranking)问题,在解决这3类问题的过程中发展出了许多能够解决实际问题的经典决策方法和决策工具,例如 TOPSIS 方法、VIKOR 方法、交互式多属性决策(TODIM)方法、多维偏好线性规划(LINMAP)方法、消去与选择转换(ELECTRE)方法以及词计算和模糊逻辑推理技术等.

3.1 区间二型模糊集的决策方法

鉴于区间二型模糊集能够更加直观地表示决策信息的不确定性,目前基于单个经典决策方法、混合决策方法和其他决策工具的区间二型模糊决策方法的研究受到了越来越多学者的关注,并成为二型模糊决策领域中最为活跃的分支.

基于单个经典决策方法的区间二型模糊决策方法的研究成果较为丰富^[5-6,38-40,55-59],其中具有代表性的工作有:Chen等^[39]在其提出的排序值^[94]的基础上首次将 TOPSIS 方法拓展到区间二型模糊环境中,给出了区间二型模糊 TOPSIS 方法.在此基础上,多位

学者^[40,56-59]分别从 KM(Karnik-Mendel)算法、 α 截集、排序值、社会网络分析(social network analysis, SNA)、申农熵权法以及模糊相似度等多个角度对区间二型模糊环境下的 TOPSIS 方法进行完善、探索、改进和应用.此外,区间二型模糊环境下其他经典决策方法的研究和应用也受到学者们的广泛关注.例如,Chen等^[6]研究了区间二型模糊 QUALIFLEX (qualitative flexible multiple criteria method),用来解决健康医疗中的管理决策问题.Qin等^[38]在多维偏好线性规划模型和所提出距离测度的基础上给出了一种区间二型模糊 LINMAP 方法.Zhong等^[55]基于 ELECTRE-I 方法研究了区间二型模糊环境下的多准则群决策方法,并将其应用于供应商选择和医疗废弃资源管理问题中.

基于混合决策方法的区间二型模糊决策方法的研究近期也受到许多学者的青睐,这里仅列举一些代表性的研究成果.例如,Celik等^[7]在灰色关联分析和 TOPSIS 方法的基础上研究了一种解决伊斯坦布尔公共交通评价问题的区间二型模糊多准则决策方法.Qin等^[60]基于 VIKOR 方法和前景理论给出了一种新的区间二型模糊多属性决策方法,并将其应用于高科技风险投资的评估案例研究中.Qin等^[61]将 TODIM 方法与前景理论相结合,基于区间二型模糊环境提出了拓展的 TODIM 方法以解决绿色供应商选择问题.Wu等^[62]将最优-最劣方法(best-worst method, BWM)与 VIKOR 方法相融合,研究了区间二型模糊多准则群决策方法,并将其应用于绿色供应商选择问题.Liu等^[63]将 ANP 与 VIKOR 方法相融合,给出了一种融合偏好关系的区间二型模糊多准则群决策方法解决可持续供应商选择问题.

基于其他决策工具的区间二型模糊决策方法近期也吸引了许多学者的研究关注,其中较有代表性的成果有:Chen等^[64-65]分别从排序值和 EKM (enhanced KM)算法两个角度对基于群体推荐的独裁式决策方法进行了研究和应用.Tian等^[66]基于 SNA 提出了解决带有不完全区间二型模糊信息决策问题的大规模群决策方法.Türk等^[67]将模拟退火算法应用于区间二型模糊环境中,给出了一种解决充电站选址的多准则决策方法.Yu等^[68]基于区间二型模糊数的似然性,提出了多属性边界逼近比较法.Qin等^[69]基于证据推理算法研究了区间二型模糊环境下的失效模式和效果分析方法.Chiao^[96]研究了所提出的区间二型模糊集的运算法则在多准则决策集成方法中的应用.

3.2 广义二型模糊集的决策方法

由于广义二型模糊集具有能够表示更高阶不确定性的优点,利用基于模糊逻辑和数据驱动的方法对现实决策问题进行建模已成为新的研究热点,基于模糊逻辑和数据驱动的广义二型模糊决策方法的研究工作也逐步引起了相关领域学者的高度关注。

词计算的本质是模糊逻辑,因此目前广义二型模糊决策中的主流研究思路是基于模糊逻辑进行决策系统建模。根据专家的知识 and 经验建立模糊规则,采用模糊逻辑的方法进行模糊推理,以此减少决策问题中的各种不确定性,提高和改善建模的精度和效果。Naim等^[70]基于模糊逻辑推理规则给出一种广义二型模糊群决策方法,并展示了IF-Then规则建模的基本思路和方法。随后,Naim等^[71]又进一步基于BB-BC(Big Bang-Big Crunch)优化算法研究了广义二型模糊逻辑方法,用来解决多准则群决策问题。李浪等^[72]将Petri网与模糊逻辑规则进行融合,研究了广义二型模糊环境下的词计算模型,用来解决医疗救护应急决策问题。Fazel等^[73]从所收集到的医院数据中提取出模糊规则,应用近似推理技术研究了广义二型模糊环境下基于分解原理的多目标进化算法,用来解决抑郁症辅助诊断医疗决策问题。Jiang^[74]展示了两种广义二型模糊自动机:广义二型模糊有限自动机和广义二型模糊下推自动机,并在此基础上分别给出词计算的形式化模型。

对于复杂的实际决策问题,建立精准的机理模型

具有相当大的难度,但客观情况是这些现实问题时刻都在产生大量数据,因此基于数据驱动的不确定决策理论与方法就成为了新兴的研究热点。例如,Shukla等^[75]利用广义二型模糊集对决策问题中的模糊目标和模糊约束进行建模,研究了具有自适应特点的广义二型模糊动态决策分析模型。李成栋等^[76]将专家知识与客观数据相结合,系统阐述了基于知识与数据驱动的二型模糊决策建模机理。一方面,为解决二型模糊环境下的复杂决策问题提供了有效工具;另一方面,也为数据驱动环境下的二型模糊决策支持系统建模研究提供了新的理论基础和方法支撑。

以上综述表明,二型模糊决策方法的研究成果颇为丰硕,已广泛应用于管理科学的各种实际问题中,且无论是基于单个经典决策方法还是基于混合决策方法亦或是基于其他决策工具,目前区间二型模糊决策方法的研究及实际应用相对较为丰富,例如,以顾客对于店铺的在线评论为依据,对其所包含的信息进行分类,进一步对在线评论及商家干预措施进行模糊化处理,然后基于专家经验和在线评论数据构建动态模糊规则,最后确定因素集隶属函数以实现时变论域下在线评论的区间二型模糊评估^[89]。

具体典型应用如表3所示,但是其中大部分研究只是简单地将经典决策方法或决策工具与区间二型模糊信息相结合,缺少相对深入的拓展和创新。所以系统深入地对各种区间二型模糊决策方法进行完善创新仍然是二型模糊决策研究中的研究重点和前沿

表3 二型模糊决策方法的实际应用

范畴	实际应用问题	文献	应用环境
方案优选	供应商选择	文献[5,31,37,55] 文献[38,61-62,65,98] 文献[91]	区间二型模糊 区间二型模糊 广义二型模糊
	候选人推荐	文献[39,57,64-65]	区间二型模糊
	投资领域选择;分包商选择	文献[19,56,59]	区间二型模糊
	选址问题	文献[34-35,66-67]	区间二型模糊
	餐厅选择;酒店选择	文献[58,19,68]	区间二型模糊
	学习地点选择;照明水平选择	文献[70-71]	广义二型模糊
	最佳出行时间选择	文献[32,75]	区间、广义二型模糊
	最佳路径选择	文献[91]	广义二型模糊
健康医疗	医疗诊断	文献[6,73]	区间、广义二型模糊
	医疗废弃资源管理	文献[55]	区间二型模糊
	医疗救护应急决策	文献[72,77]	广义、区间二型模糊
评价/评估	智能交通	文献[7,100]	区间二型模糊
	服务质量评价	文献[21,26]	区间二型模糊
	企业技术创新能力评价	文献[30]	区间二型模糊
	论文评审	文献[10,33]	区间二型模糊
	风险评估	文献[29,60,69]	区间二型模糊
	产品销售额评估 汽车产品评价	文献[91] 文献[35,39-40,65]	广义二型模糊 区间二型模糊
交通流干预	交通灯的时间调节	文献[89]	区间二型模糊
	交叉路口拥堵分析和干预	文献[89]	区间二型模糊

方向. 目前广义二型模糊决策方法的研究相对较为匮乏, 尚处于起步阶段. 现有研究主要集中在广义二型模糊系统的基础理论研究上, 对于广义二型模糊决策方法的研究还较少, 且已有研究大多是从模型和知识驱动的两个相对独立的角度对经典决策分析方法进行简单拓展, 缺乏较深层次的系统性研究. 另外, 针对广义二型模糊环境下分类问题的基本理论和决策方法研究还处于相对空白阶段. 总之, 系统地研究广义二型模糊决策理论和方法开展基础性的研究工作, 并进行拓展和深化是二型模糊决策研究中亟需解决的课题.

4 未来研究展望

二型模糊集作为不确定决策理论中的热点和主流研究工具, 已广泛应用于管理科学的各个领域, 如表3中供应商选择^[5]、风险评估^[60]以及健康医疗^[72-73]等实际问题. 基于其表征和建模深层次不确定性的强大能力, 深入系统地研究基于二型模糊信息的决策理论、方法和应用研究具有较高的学术价值与广阔的应用前景.

词计算是二型模糊决策建模的重要理论基础, 当原始决策信息为自然语言中的词或者术语时, 二型模糊决策环境中的感知计算框架如图4所示. 其中T2FE表示二型模糊元 (type-2 fuzzy element), SD表示随机占优 (stochastic dominance), ASD表示几乎随机占优 (Almost SD), PSD表示前景随机占优 (prospect SD).

根据二型模糊决策理论与方法的研究框架 (如图5所示), 未来可进行以下几个方面的研究:

1) 在二型模糊集的定义和基本运算方面, 未来研究需要进一步分析Zadeh所提出的二型模糊集的原始定义, 提出一个形式简单且易于理解的数学表达式. 例如, 结合de Miguel等^[85]的映射关系和Chiclana等^[92]的集合定义, 定义一种新的二型模糊集的数学表达式 $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in T1FS([0, 1])\}$. 同时, 需要进一步拓展现有定义域或值域, 以符合解决现实世界决策案例的需求. 另外,

所提出定义中的定义域和数学表达式需要进一步考虑决策问题本身的情况, 即应具有较强的实际决策含义. 例如, Zhu等^[91]所定义的二型模糊数表达式 $t(x) = (u, \mu(u))$, 其主要隶属 u 可以表示决策判断的真实度, 次要隶属 $\mu(u)$ 表示真实的可靠程度. 最后, 需要进一步研究二型模糊集的简化运算法则, 以破解计算瓶颈问题.

2) 对于二型模糊信息集成理论方面, 在现有LWA算子的基础上, 将概率信息与权重信息相结合全面考虑论域中元素在实际问题中的重要性, 进一步研究二型模糊概率集成算子并深入探究其相关性质和决策用途. 对于属性关联问题, 需要进一步探究二型模糊Choquet积分算子及其扩展形式. 同时考虑到子属性的关联性, 可以加强对二型模糊混合Choquet积分算子及其相关理论性质的研究. 针对SM算子, 可将其扩展到区间和广义二型模糊环境下, 研究其精确的解析算法, 在此基础上使二型模糊信息融合理论能够建立一套系统化、规范化的集成方法. 最后, 为了使集成结果更具有客观性和可靠性, 可将信息集成与粒计算理论相结合建立组合优化模型, 为研究基于数据驱动的二型模糊集成方法提供一种新的思路.

3) 在二型模糊偏好关系理论方面, 未来可以进一步完善二型模糊偏好分析模型方面的研究, 从两种一致性 (加性和积性) 角度出发, 给出二型模糊偏好关系一致性的定义, 提出检验和调整方法. 结合粒计算中的最优信息粒分布原理, 即满足 $\sum_{i=1}^m (\varepsilon_i^- + \varepsilon_i^+) = m\varepsilon$. 其中: m 为二型模糊偏好信息的个数, ε 为分配给每个二型模糊偏好信息的粒度水平, ε_i^- 和 ε_i^+ 为分配给第 i 个二型模糊偏好信息两端的粒度水平. 从偏好学习的角度系统研究二型模糊的偏好分析方法, 特别是针对存在残缺信息的二型模糊偏好关系, 在一致性的基础上将其转化为信息完全的二型模糊偏好关系是值得深入探讨的问题. 另外, 将传统偏好关系的排序方法与二型模糊偏好关系相结合, 对二型模糊偏好关系的排序算法进行研究也是一个值得深入探讨的研究课题.

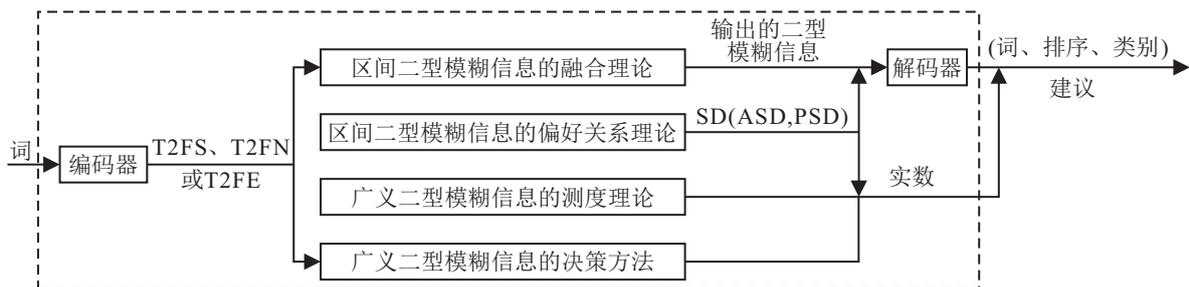


图4 二型模糊决策环境中的感知计算框架

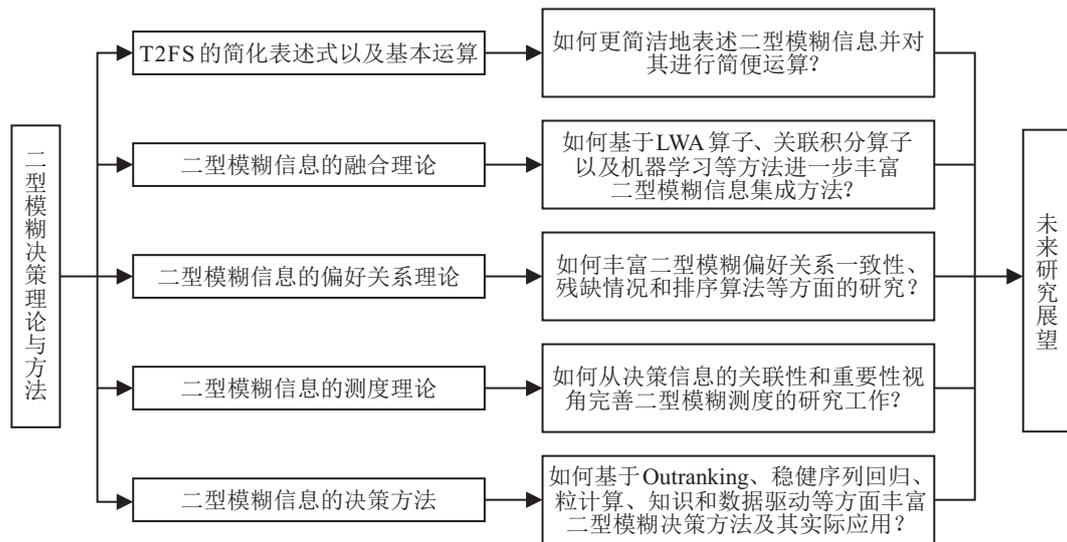


图5 二型模糊决策理论与方法的研究框架图

4) 在二型模糊测度理论方面,未来可开展以下两个方面的研究工作:①考虑现实决策问题中不同属性间和子属性间的关联性,将Choquet积分与熵测度相融合开展二型模糊环境下Choquet积分熵测度的研究,在此基础上以Choquet积分为出发点探究相关熵公式的各种性质,并基于所提出的熵公式探索能切实解决实际问题的决策方法,将其应用于现实的不确定决策问题中.②在一个实际决策问题中需要全面考虑各个决策元素的重要性,鉴于距离测度在决策分析领域中的重要作用,开展基于经典距离公式的加权距离的研究十分必要.特别地,将概率信息与权重信息相结合可以更加全面地考虑决策元素的重要性,因此基于现有的4种概率权重表示方法研究加权距离测度也是值得探索的研究方向.

5) 在二型模糊决策方法方面,未来的研究可涉及以下角度:①关于广义二型模糊决策方法方面,首要研究的是对简单易懂的数学表达式、操作方便的基本运算、结果精确的排序函数、符合实际的排序法则等发展广义二型模糊决策方法所必需的基本理论的构建.②对于二型模糊多准则分类方法方面,多准则分类是多准则决策中的一个重要研究方向,目前在二型模糊决策中较少涉及分类问题的研究.在此提供3个视角来开展后续二型模糊分类方法的研究工作:i)运用二型模糊集刻画分类边界参考点和中心参考点,以此增强分类结果的鲁棒性;ii)研究基于级别优先(Outranking)关系的二型模糊群体分类方法,将二型模糊与群体决策及多准则分类方法进行有机融合;iii)将稳健序列回归与二型模糊决策方法相结合,研究大规模情形下的决策建模与求解方法.③建立面向知识和数据驱动的二型模糊决策方法,将二型模

糊在知识推理方面与粒计算在数据驱动建模方面的优势进行结合,研究基于多粒度融合视角下二型模糊协同决策方法,同时结合语言动力学和最优控制的相关理论基础,研究基于二型模糊信息的语言动力学模型,将现有的静态研究方法推广至动态研究领域.④将二型模糊集理论与人工智能与机器学习相结合,构建面向智能感知的二型模糊智能决策方法解决实际决策问题.例如,研究基于深度学习和数字孪生技术的二型模糊决策建模理论解决工业过程优化与智慧城市建设中的管理决策分析问题.⑤针对二型模糊决策应用拓展方面,将现有决策理论、方法、模型与真实的场景和数据结合起来,应用于电子商务推荐系统、在线评论决策、重大工程项目风险评估、高端装备制造、健康医疗、可持续供应链管理等方面,使得二型模糊决策理论方法能够真正落地应用.此外,如何将二型模糊决策理论与新一代信息技术,如区块链、物联网、云计算以及行为与认识科学、博弈论等进行交叉融通,探索决策智能与人机交互融合的二型模糊决策理论及应用也是值得在未来进行深入探索的研究课题.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
 [2] 秦晋栋, 刘新旺. 二型模糊决策理论与方法及其推荐应用[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
 (Qin J D, Liu X W. Type-2 fuzzy decision-making theories, methodologies and its recommended applications [M]. Beijing: Science Press, 2019.)
 [3] Bellman R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment[J]. Management Science, 1970, 17(4): B-141.

- [4] Xu T T, Zhang H, Li B Q. Axiomatic framework of fuzzy entropy and hesitancy entropy in fuzzy environment[J]. *Soft Computing*, 2021, 25(2): 1219-1238.
- [5] Chen T Y. An Electre-based outranking method for multiple criteria group decision making using interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2014, 263: 1-21.
- [6] Chen T Y, Chang C H, Rachel Lu J F. The extended qualiflex method for multiple criteria decision analysis based on interval type-2 fuzzy sets and applications to medical decision making[J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 226(3): 615-625.
- [7] Celik E, Bilisik O N, Erdogan M, et al. An integrated novel interval type-2 fuzzy MCDM method to improve customer satisfaction in public transportation for Istanbul[J]. *Transportation Research—Part E: Logistics and Transportation Review*, 2013, 58: 28-51.
- [8] Qin J D. A survey of type-2 fuzzy aggregation and application for multiple criteria decision making[J]. *Journal of Data, Information and Management*, 2019, 1(1/2): 17-32.
- [9] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. *Information Sciences*, 1975, 8(3): 199-249.
- [10] Wu D R, Mendel J M. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(6): 1145-1161.
- [11] John R, Hagaras H, Castillo O. Type-2 fuzzy logic and systems: Dedicated to professor Jerry Mendel for his pioneering contribution[M]. Berlin: Springer, 2018: 25-47.
- [12] Wu D R, Mendel J M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(23): 5378-5393.
- [13] Wu D R, Zhang H T, Huang J. A constrained representation theorem for well-shaped interval type-2 fuzzy sets, and the corresponding constrained uncertainty measures[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(6): 1237-1251.
- [14] Wu D R, Mendel J M. A comparative study of ranking methods, similarity measures and uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(8): 1169-1192.
- [15] Wu D R, Mendel J M. A vector similarity measure for linguistic approximation: Interval type-2 and type-1 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(2): 381-402.
- [16] Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10(2): 117-127.
- [17] Zhou S M, Chiclana F, John R I, et al. Type-2 OWA operators-aggregating type-2 fuzzy sets in soft decision making[C]. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong, 2008: 625-630.
- [18] Zhou S M, John R I, Chiclana F, et al. On aggregating uncertain information by type-2 OWA operators for soft decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2010: 25(6): 540-558.
- [19] 秦晋栋. 二型模糊决策方法及其在个性化推荐中的应用[D]. 南京: 东南大学, 2016: 19-41.
(Qin J D. Type-2 fuzzy decision making methods and the application in personalized recommendation[D]. Nanjing: Southeast University, 2016: 19-41.)
- [20] Qin J D. Interval type-2 fuzzy Hamy mean operators and their application in multiple criteria decision making[J]. *Granular Computing*, 2017, 2(4): 249-269.
- [21] Wang H H, Liu P D, Liu Z M. Trapezoidal interval type-2 fuzzy maclaurin symmetric mean operators and their applications to multiple attribute group decision making[J]. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2018, 8(4): 343-360.
- [22] Havens T C, Anderson D T, Keller J M. A fuzzy Choquet integral with an interval type-2 fuzzy number-valued integrand[C]. *International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona, 2010: 1-8.
- [23] Bustince H, Galar M, Bedregal B, et al. A new approach to interval-valued choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy set applications[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(6): 1150-1162.
- [24] Wu Y N, Xu C B, Huang Y, et al. Green supplier selection of electric vehicle charging based on Choquet integral and type-2 fuzzy uncertainty[J]. *Soft Computing*, 2020, 24(5): 3781-3795.
- [25] Melin P, Martinez G E. Extension of the fuzzy sugeno integral based on generalized type-2 fuzzy logic[M]. Berlin: Springer, 2020: 29-36.
- [26] Tang G L, Chiclana F, Lin X C, et al. Interval type-2 fuzzy multi-attribute decision-making approaches for evaluating the service quality of Chinese commercial banks[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 193: 105438.
- [27] Kahraman C, Öztayşi B, Uçal Sari İ, et al. Fuzzy analytic hierarchy process with interval type-2 fuzzy sets[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 59: 48-57.
- [28] Pedrycz W, Song M L. A granulation of linguistic information in AHP decision-making problems[J]. *Information Fusion*, 2014, 17: 93-101.
- [29] Abdullah L, Najib L. A new type-2 fuzzy set of linguistic variables for the fuzzy analytic hierarchy process[J]. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41(7): 3297-3305.
- [30] Wu T, Liu X W, Liu S L. A fuzzy ANP with interval type-2 fuzzy sets approach to evaluate enterprise technological innovation ability[C]. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Istanbul, 2015: 1-8.
- [31] Xu Z, Qin J D, Liu J, et al. Sustainable supplier selection based on AHPSort II in interval type-2 fuzzy environment[J]. *Information Sciences*, 2019, 483: 273-293.

- [32] Runkler T, Coupland S, John R. Interval type-2 fuzzy decision making[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 80: 217-224.
- [33] Chen S M, Lee L W. Fuzzy multiple criteria hierarchical group decision-making based on interval type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 2010, 40(5): 1120-1128.
- [34] Chen T Y. A PROMETHEE-based outranking method for multiple criteria decision analysis with interval type-2 fuzzy sets[J]. *Soft Computing*, 2014, 18(5): 923-940.
- [35] Chen T Y. An interval type-2 fuzzy PROMETHEE method using a likelihood-based outranking comparison approach[J]. *Information Fusion*, 2015, 25: 105-120.
- [36] Ureña R, Kou G, Wu J, et al. Dealing with incomplete information in linguistic group decision making by means of interval type-2 fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2019, 34(6): 1261-1280.
- [37] Hendiani S, Jiang L S, Sharifi E, et al. Multi-expert multi-criteria decision making based on the likelihoods of interval type-2 trapezoidal fuzzy preference relations[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2020, 11(12): 2719-2741.
- [38] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. A multiple attribute interval type-2 fuzzy group decision making and its application to supplier selection with extended LINMAP method[J]. *Soft Computing*, 2017, 21(12): 3207-3226.
- [39] Chen S M, Lee L W. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the interval type-2 TOPSIS method[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(4): 2790-2798.
- [40] Sang X Z, Liu X W. An analytical solution to the TOPSIS model with interval type-2 fuzzy sets[J]. *Soft Computing*, 2016, 20(3): 1213-1230.
- [41] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(3): 305-316.
- [42] Zeng W Y, Li H X. Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(11): 1477-1484.
- [43] Zeng W Y, Guo P. Normalized distance, similarity measure, inclusion measure and entropy of interval-valued fuzzy sets and their relationship[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(5): 1334-1342.
- [44] Hwang C M, Yang M S, Hung W L, et al. Similarity, inclusion and entropy measures between type-2 fuzzy sets based on the Sugeno integral[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53(9/10): 1788-1797.
- [45] 王翠翠, 姚登宝, 李宝萍. 基于熵和风险态度的二型模糊多属性决策方法[J]. *计算机应用*, 2016, 36(9): 2535-2539.
(Wang C C, Yao D B, Li B P. Type-2 fuzzy multiple attribute decision-making method based on entropy and risk attitude[J]. *Journal of Computer Applications*, 2016, 36(9): 2535-2539.)
- [46] de Miguel L, Santos H, Sesma-Sara M, et al. Type-2 fuzzy entropy sets[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 25(4): 993-1005.
- [47] Figueroa-García J C, Chalco-Cano Y, Román-Flores H. Distance measures for interval type-2 fuzzy numbers[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2015, 197: 93-102.
- [48] Bustince H. Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2000, 23(3): 137-209.
- [49] Gorzalczyński M B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, 21(1): 1-17.
- [50] Mitchell H B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2005, 170(2/3/4): 409-418.
- [51] Wu D R, Mendel J M. Similarity measures for closed general type-2 fuzzy sets: Overview, comparisons, and a geometric approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(3): 515-526.
- [52] McCulloch J, Wagner C. Measuring the directional or non-directional distance between type-1 and type-2 fuzzy sets with complex membership functions[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(7): 1506-1515.
- [53] McCulloch J, Wagner C. On the choice of similarity measures for type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2020, 510: 135-154.
- [54] 郑高, 肖建, 蒋强, 等. 区间二型模糊相似度与包含度[J]. *控制与决策*, 2011, 26(6): 861-866.
(Zheng G, Xiao J, Jiang Q, et al. Similarity and inclusion measures between IT2 FSSs[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(6): 861-866.)
- [55] Zhong L, Yao L M. An ELECTRE I-based multi-criteria group decision making method with interval type-2 fuzzy numbers and its application to supplier selection[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 57: 556-576.
- [56] Yang Y Y, Liu X W, Liu F. Trapezoidal interval type-2 fuzzy TOPSIS using alpha-cuts[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2020, 22(1): 293-309.
- [57] Chen S M, Hong J A. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on ranking interval type-2 fuzzy sets and the TOPSIS method[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2014, 44(12): 1665-1673.
- [58] Wu T, Liu X W, Liu F. An interval type-2 fuzzy TOPSIS model for large scale group decision making problems with social network information[J]. *Information Sciences*, 2018, 432: 392-410.
- [59] Afshar M R, Shahhosseini V, Sebt M H. An interval type-2 fuzzy MCDM model for work package subcontractor prequalification[J]. *Soft Computing*, 2021, 25(1): 635-648.
- [60] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. An extended VIKOR method based on prospect theory for multiple

- attribute decision making under interval type-2 fuzzy environment[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 86: 116-130.
- [61] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. An extended TODIM multi-criteria group decision making method for green supplier selection in interval type-2 fuzzy environment[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 258(2): 626-638.
- [62] Wu Q, Zhou L G, Chen Y, et al. An integrated approach to green supplier selection based on the interval type-2 fuzzy best-worst and extended VIKOR methods[J]. *Information Sciences*, 2019, 502: 394-417.
- [63] Liu K, Liu Y W, Qin J D. An integrated ANP-VIKOR methodology for sustainable supplier selection with interval type-2 fuzzy sets[J]. *Granular Computing*, 2018, 3(3): 193-208.
- [64] Chen S M, Yang M W, Lee L W, et al. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on ranking interval type-2 fuzzy sets[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(5): 5295-5308.
- [65] Chen S M, Kuo L W. Autocratic decision making using group recommendations based on interval type-2 fuzzy sets, enhanced Karnik-Mendel algorithms, and the ordered weighted aggregation operator[J]. *Information Sciences*, 2017, 412/413: 174-193.
- [66] Tian Z P, Nie R X, Wang J Q. Social network analysis-based consensus-supporting framework for large-scale group decision-making with incomplete interval type-2 fuzzy information[J]. *Information Sciences*, 2019, 502: 446-471.
- [67] Türk S, Deveci M, Özcan E, et al. Interval type-2 fuzzy sets improved by simulated annealing for locating the electric charging stations[J]. *Information Sciences*, 2021, 547: 641-666.
- [68] Yu S M, Wang J, Wang J Q. An interval type-2 fuzzy likelihood-based MABAC approach and its application in selecting hotels on a tourism website[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2017, 19(1): 47-61.
- [69] Qin J D, Xi Y, Pedrycz W. Failure mode and effects analysis(FMEA) for risk assessment based on interval type-2 fuzzy evidential reasoning method[J]. *Applied Soft Computing*, 2020, 89: 106134.
- [70] Naim S, Hagrass H. A general type-2 fuzzy logic based approach for Multi-Criteria Group Decision Making[C]. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hyderabad, 2013: 1-8.
- [71] Naim S, Hagrass H. A big-Bang big-crunch optimized general type-2 fuzzy logic approach for multi-criteria group decision making[J]. *Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research*, 2013, 3(2): 117-132.
- [72] 李浪, 刘海. 基于广义二型模糊Petri网的词计算模型[J]. *华南师范大学学报: 自然科学版*, 2018, 50(3): 120-128.
(Li L, Liu H. Computing with words model based on generalized type-2 fuzzy petri nets[J]. *Journal of South China Normal University: Natural Science Edition*, 2018, 50(3): 120-128.)
- [73] Fazel Zarandi M H, Soltanzadeh S, Mohammadi A, et al. Designing a general type-2 fuzzy expert system for diagnosis of depression[J]. *Applied Soft Computing*, 2019, 80: 329-341.
- [74] Jiang Y C. A general type-2 fuzzy model for computing with words[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2018, 33(4): 713-758.
- [75] Shukla A K, Muhuri P K. General type-2 fuzzy decision making and its application to travel time selection[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2019, 36(6): 5227-5244.
- [76] 李成栋, 易建强, 张桂青. 知识与数据驱动的二型模糊方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 116-175.
(Li C D, Yi J Q, Zhang G Q. Knowledge and data driven type-2 fuzzy methods with applications[M]. Beijing: Science Press, 2017: 116-175.)
- [77] Chen T Y. An interactive method for multiple criteria group decision analysis based on interval type-2 fuzzy sets and its application to medical decision making[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2013, 12(3): 323-356.
- [78] Mendel J M. Type-2 fuzzy sets and systems: An overview[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 20-29.
- [79] Melin P, Castillo O. A review on the applications of type-2 fuzzy logic in classification and pattern recognition[J]. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(13): 5413-5423.
- [80] Castillo O, Melin P. A review on interval type-2 fuzzy logic applications in intelligent control[J]. *Information Sciences*, 2014, 279: 615-631.
- [81] Mittal K, Jain A, Vaisla K S, et al. A comprehensive review on type 2 fuzzy logic applications: Past, present and future[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 95: 103916.
- [82] 伍冬睿, 曾志刚, 莫红, 等. 区间二型模糊集和模糊系统: 综述与展望[J]. *自动化学报*, 2020, 46(8): 1539-1556.
(Wu D R, Zeng Z G, Mo H, et al. Interval type-2 fuzzy sets and systems: Overview and outlook[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8): 1539-1556.)
- [83] Celik E, Gul M, Aydin N, et al. A comprehensive review of multi criteria decision making approaches based on interval type-2 fuzzy sets[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 85: 329-341.
- [84] Mizumoto M, Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type 2[J]. *Information and Control*, 1976, 31(4): 312-340.
- [85] de Miguel L, Santos H, Sesma-Sara M, et al. Type-2 fuzzy entropy sets[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 25(4): 993-1005.
- [86] Rickard J T, Aisbett J, Gibbon G. Fuzzy subsethood for

- fuzzy sets of type-2 and generalized type- n [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(1): 50-60.
- [87] Mendel J M, Rajati M R, Sussner P. On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes[J]. Information Sciences, 2016, 340/341: 337-345.
- [88] Mo H, Wang F Y, Zhou M, et al. Footprint of uncertainty for type-2 fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2014, 272: 96-110.
- [89] 王飞跃, 莫红, 赵亮. 二型模糊集合与逻辑[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018: 53-65.
(Wang F Y, Mo H, Zhao L. Type \square fuzzy sets and logic[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2018: 53-65.)
- [90] Mo H, Wang J, Li X, et al. Linguistic dynamic modeling and analysis of psychological health state using interval type-2 fuzzy sets[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2015, 2(4): 366-373.
- [91] Zhu B, Ren P J. Type-2 fuzzy numbers made simple in decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2022, 21(2): 175-195.
- [92] Chiclana F, Zhou S M. Type-reduction of general type-2 fuzzy sets: The type-1 OWA approach[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 505-522.
- [93] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Choice processes for non-homogeneous group decision making in linguistic setting[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94(3): 287-308.
- [94] Lee L W, Chen S M. A new method for fuzzy multiple attributes group decision-making based on the arithmetic operations of interval type-2 fuzzy sets[C]. International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Kunming, 2008: 3084-3089.
- [95] Deschrijver G. Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory[J]. Information Sciences, 2007, 177(14): 2906-2924.
- [96] Chiao K P. Closed forms of the interval type 2 fuzzy sets additions based on Archimedean T-norms with application in decision making aggregation[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(7): 2300-2318.
- [97] Torres-Blanc C, Cubillo S, Hernández-Varela P. New negations on the membership functions of type-2 fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 27(7): 1397-1406.
- [98] Chen T Y. Multiple criteria group decision-making with generalized interval-valued fuzzy numbers based on signed distances and incomplete weights[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(7): 3029-3052.
- [99] Gong Y B. The new weighted magnitude mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2303-2313.
- [100] Qin J D, Liu X W. Multi-attribute group decision making using combined ranking value under interval type-2 fuzzy environment[J]. Information Sciences, 2015, 297: 293-315.
- [101] Karnik N N, Mendel J M. Centroid of a type-2 fuzzy set[J]. Information Sciences, 2001, 132(1/2/3/4): 195-220.
- [102] 王飞跃, 莫红. 关于二型模糊集合的一些基本问题[J]. 自动化学报, 2017, 43(7): 1114-1141.
(Wang F Y, Mo H. Some fundamental issues on type-2 fuzzy sets[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(7): 1114-1141.)
- [103] Dong W M, Wong F S. Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(2): 183-199.
- [104] Liu F L, Mendel J M. Aggregation using the fuzzy weighted average as computed by the karnik—Mendel algorithms[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, 16(1): 1-12.
- [105] Liu X W, Mendel J M, Wu D R. Analytical solution methods for the fuzzy weighted average[J]. Information Sciences, 2012, 187: 151-170.
- [106] Liu X W, Wang Y M. An analytical solution method for the generalized fuzzy weighted average problem[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2013, 21(3): 455-480.
- [107] Satty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980: 15-36.
- [108] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155-167.

作者简介

秦晋栋(1984—), 男, 副教授, 博士生导师, 从事不确定决策理论及粒计算、行为决策、电子商务推荐系统等研究, E-mail: qinjindongseu@126.com;

徐婷婷(1994—), 女, 博士生, 从事不确定性数学理论、决策理论与方法等研究, E-mail: m15855440605@163.com.