

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于观测器的受扰多项式系统 $H_\infty$ 输出跟踪控制

李颖, 曾建平

引用本文:

李颖,曾建平. 基于观测器的受扰多项式系统 $H_\infty$ 输出跟踪控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1611–1619.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1792>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于观测器的无人车 $H_\infty$ 预瞄控制器设计

Design of observer-based  $H_\infty$  preview controller for autonomous guided vehicles

控制与决策. 2023, 38(6): 1737–1744 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1302>

#### 基于降阶扩张状态观测器的重复控制系统设计

A method of designing a reduced-order-extended-observer-based repetitive-control system

控制与决策. 2022, 37(4): 933–943 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1377>

#### DoS攻击下信息物理系统的无模型 $H_\infty$ 控制

Model-free  $H_\infty$  control for cyber-physical systems under DoS attacks

控制与决策. 2022, 37(10): 2565–2574 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0278>

#### 输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

控制与决策. 2021, 36(5): 1059–1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

#### 多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

# 基于观测器的受扰多项式系统 $H_\infty$ 输出跟踪控制

李颖, 曾建平<sup>†</sup>

(厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361102)

**摘要:** 考虑一类受到外部扰动影响的多项式系统在状态不完全可测情况下的  $H_\infty$  输出跟踪控制问题. 首先, 综合前馈-反馈复合控制思想, 设计基于观测器的输出跟踪控制器, 其中反馈镇定控制器用于保证闭环系统稳定, 前馈补偿控制器用以实现对参考模型输出信号的跟踪; 然后, 提出具有输出反馈结构的跟踪控制方法, 其优势在于实现了分离原则, 可单独设计观测器和控制器, 降低计算复杂度; 接着, 利用依赖全状态的齐次多项式 Lyapunov 函数导出使得闭环系统渐近稳定且满足  $H_\infty$  跟踪性能的充分条件, 借助多项式平方和凸优化技术可直接求得相应的观测器和控制器; 最后, 通过数值仿真实例验证所提出设计方法的有效性和优越性.

**关键词:** 多项式系统; 输出跟踪控制;  $H_\infty$  跟踪性能; 齐次多项式 Lyapunov 函数; 分离原则

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1792

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 李颖, 曾建平. 基于观测器的受扰多项式系统  $H_\infty$  输出跟踪控制 [J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1611-1619.

## Observer-based $H_\infty$ output tracking control for a class of polynomial systems with external disturbances

LI Ying, ZENG Jian-ping<sup>†</sup>

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China)

**Abstract:** An  $H_\infty$  output tracking control problem is considered for a class of polynomial systems with partially unknown states under external disturbances. Firstly, an observer-based output tracking controller is presented from the perspective of the feedforward and feedback composite control method. The feedback stabilization controller is employed to ensure the stability of the closed-loop system, and the feedforward compensation controller is used to track the output signal of the reference model. Furthermore, a tracking controller is proposed with an output feedback structure, its advantage is that the observer and controller can be given separately, satisfying the separation principle and reducing the computational complexity. Then using a homogeneous polynomial Lyapunov function dependent on whole state variables, the sufficient condition of the asymptotic stability with  $H_\infty$  tracking performance is derived for the closed-loop system. The corresponding observer and controller can be obtained directly by the polynomial sum of squares convex optimization technique. Finally, numerical simulation examples are given to verify the validity and superiority of the proposed method.

**Keywords:** polynomial system; output tracking control;  $H_\infty$  tracking performance; homogeneous polynomial Lyapunov function; separation principle

## 0 引言

多项式系统广泛存在于实际应用中<sup>[1-2]</sup>. 一方面, 多数非线性系统可建模、转化或近似为多项式系统. 另一方面, 相较于线性化模型, 多项式模型可在更大的状态空间区域内描述非线性系统. 因此, 多项式系统分析和设计对于非线性系统理论发展具有重要意义, 受到了国内外学者的广泛关注<sup>[3-4]</sup>. 文献[5]研究了饱和多项式系统全局和局部状态反馈控制策略设

计方法; 文献[6]针对不确定多项式系统, 提出了一种鲁棒  $H_\infty$  状态反馈控制策略; 文献[7]研究了多项式系统的状态反馈最优控制问题. 上述文献均是针对多项式系统镇定问题开展的研究.

相较于镇定控制, 跟踪控制要求在被控对象稳定的前提下, 其状态(或输出)能够跟踪参考模型状态(或输出). 且跟踪控制广泛应用于工程领域, 如机器人轨迹跟踪控制<sup>[8]</sup>、飞行器姿态控制<sup>[9]</sup>以及多智能体

收稿日期: 2021-10-18; 录用日期: 2022-03-15.

基金项目: 国家科技重大专项项目(2017-V-0004-0054).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.

编队控制<sup>[10]</sup>等. 因此,跟踪控制问题更具挑战性和实用性. 目前,已有很多聚焦于多项式系统跟踪控制的相关研究成果. 文献[11]研究了多项式模糊系统的 $H_\infty$ 输出反馈跟踪控制问题;文献[12]针对具有输入饱和以及外部扰动的多项式模糊系统,提出了一种静态输出跟踪控制策略;文献[13]针对一阶伪线性系统,设计了一种完全参数化形式的模型参考输出跟踪控制器. 上述文献均在状态变量完全可测的情况下展开研究.

工程实践中,由于传感器种类受限或成本太高,往往导致无法通过测量获得系统状态变量. 这种情况下,为进行系统分析和设计,采用基于状态观测器的控制策略成为一种可能. 在线性系统中观测器的引入不影响原控制器的稳定性,可单独设计观测器和控制器,即满足分离原则. 相较而言,对于一般非线性系统,分离原则往往不再适用. 这也为非线性系统基于观测器的控制设计带来了挑战. 文献[14]针对T-S模糊网络化控制系统,提出了一种满足分离原则的输出反馈控制策略;文献[15]在多项式模糊系统基于观测器的状态反馈控制设计中实现了分离原则. 目前,较少见到多项式系统基于观测器的输出跟踪控制中实现分离原则的相关研究.

作为一类特殊非线性系统,多项式系统控制设计的主要难点在于控制器与Lyapunov函数的联合搜索是非凸的,难以求解. 针对该问题,文献[16]限制Lyapunov函数只含控制矩阵对应行全为0的状态,该方法避免了非凸性,但具有保守性;文献[17]通过引入额外的松弛变量,将控制矩阵与Lyapunov矩阵解耦;文献[18]假定状态导数有界,并在控制设计中通过引入状态导数的约束放缩解耦;文献[19]提出了一种齐次多项式Lyapunov函数方法,在解决非凸性的同时,降低了保守性. 如何处理此类非凸联合搜索问题,也是本文进行基于观测器的输出跟踪控制设计中亟需考虑的问题.

此外,实际系统所处环境复杂,不可避免地会受到外部扰动等因素的影响. 考虑到 $H_\infty$ 控制方法是抑制扰动的有效手段,综合以上分析,本文研究一类具有外部扰动和未知状态的多项式系统 $H_\infty$ 输出跟踪控制问题. 设计多项式观测器和基于该观测器的控制器,实现对参考模型输出轨迹的跟踪和外部扰动的抑制. 在基于观测器的 $H_\infty$ 跟踪控制框架下,进一步考虑观测器与控制器的分离原则. 需要说明的是,在上述控制策略设计和稳定性证明中,引入齐次多项式Lyapunov函数,并运用多项式平方和(sum of

squares, SOS)凸优化技术求解观测器和控制器. 本文主要内容如下.

1)不同于文献[11-13],所提出控制策略可用于状态不完全可测的情况. 因此,所提出方法在实际复杂环境中具有更强的实用性和鲁棒性.

2)相较于文献[20],所提出控制策略可分开求解观测器和控制器,即观测器与控制器设计条件不再耦合,而是满足分离原则. 这种分离方式可降低求解过程的计算复杂度.

3)所提出控制策略设计过程中引入了齐次多项式Lyapunov函数,不仅可包含闭环系统的全部状态,且有效避免了控制器与Lyapunov函数联合搜索的非凸条件,从而降低求解过程的保守性.

## 1 问题描述

考虑一类具有外部扰动的多项式系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(x)u + G(x)\omega, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 、 $u \in \mathbf{R}^m$ 和 $y \in \mathbf{R}^q$ 分别为系统的状态、输入和输出, $\omega \in \mathbf{R}^s$ 为外部扰动且 $\omega \in L_2[0, \infty)$ , $A(x)$ 、 $B(x)$ 和 $G(x)$ 为关于 $x$ 的适当维数多项式矩阵, $C$ 为具有合适维数的常数矩阵.

给定产生参考信号 $y_r$ 的参考模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r r, \\ y_r = C_r x_r. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_r \in \mathbf{R}^n$ 、 $r \in \mathbf{R}^m$ 和 $y_r \in \mathbf{R}^q$ 分别为参考模型的状态、输入和输出,且参考输入 $r \in L_2[0, \infty)$ ;  $A_r$ 、 $B_r$ 和 $C_r$ 为具有适当维数的常数矩阵,且 $A_r$ 是Hurwitz的.

本文旨在设计一种输出跟踪控制策略,使得多项式系统(1)的输出 $y$ 可跟踪参考模型(2)的输出 $y_r$ ,且输出跟踪误差满足如下 $H_\infty$ 性能指标:

$$\int_0^\infty e_r^T e_r dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} dt. \quad (3)$$

其中: $\tilde{\omega} = [\omega^T \quad r^T]^T$ , $e_r = y - y_r$ 为输出跟踪误差, $\gamma > 0$ 为给定的 $H_\infty$ 跟踪性能抑制指标.

为便于后续分析和证明,给出以下定义和引理.

**定义1**<sup>[21]</sup> 若函数 $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,对于 $\forall \lambda > 0$ ,存在 $h \in \mathbf{N}^+$ ,使得下式成立:

$$V(\lambda x) = \lambda^h V(x), \quad (4)$$

则称 $V(x)$ 为齐次度 $h$ 的齐次多项式Lyapunov函数.

**引理1**<sup>[15]</sup> 若 $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为齐次度 $h$ 的齐次多项式Lyapunov函数,则 $V(x)$ 满足

$$hV(x) = x^T \nabla_x V(x) = \nabla_x V(x)^T x, \quad (5)$$

其中  $\nabla_x V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ .

**引理2** [15] 若  $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  为齐次度  $h$  的齐次多项式 Lyapunov 函数, 则  $V(x)$  可描述为

$$V(x) = \frac{1}{h(h-1)} x^T \nabla_{xx} V(x) x, \quad (6)$$

其导数  $\dot{V}(x)$  可表示为

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{h-1} \dot{x}^T \nabla_{xx} V(x) x, \quad (7)$$

其中  $\nabla_{xx} V(x) = \nabla_x \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ .

## 2 基于观测器的输出跟踪控制设计

在实际应用中, 一般无法直接通过测量获得系统的全部状态. 因此, 设计如下状态观测器以估计系统未知状态:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + B(\hat{x})u + L(\hat{x})(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x}. \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$  为状态估计值,  $\hat{y} \in \mathbf{R}^q$  为观测器输出,  $A(\hat{x})$  和  $B(\hat{x})$  为关于  $\hat{x}$  的适当维数多项式矩阵,  $L(\hat{x})$  为待设计的观测器增益矩阵. 进而构造基于状态观测器的输出跟踪控制器

$$u = K(\hat{x}, x_r)\hat{x} + F(\hat{x}, x_r)x_r, \quad (9)$$

其中  $K(\hat{x}, x_r)$  和  $F(\hat{x}, x_r)$  为待设计的输出跟踪控制器增益矩阵.

定义观测误差为  $e_x = x - \hat{x}$ , 则由式(1)、(8)和(9), 得到观测误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_x = & (A(x) - L(\hat{x})C)e_x + (\Delta A(x, \hat{x}) + \\ & \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r))\hat{x} + \\ & \Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r)x_r + G(x)\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\Delta A(x, \hat{x}) = A(x) - A(\hat{x}),$$

$$\Delta B(x, \hat{x}) = B(x) - B(\hat{x}).$$

令  $\tilde{x} = [e_x^T \ \hat{x}^T \ x_r^T]^T$ , 联立式(1)、(2)和式(8)~(10), 增广系统可表示为

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(x, \hat{x}, x_r)\tilde{x} + \tilde{G}(x)\tilde{\omega}. \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, \hat{x}, x_r) = & \begin{bmatrix} A(x) - L(\hat{x})C & \Delta A(x, \hat{x}) + \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r) \\ L(\hat{x})C & A(\hat{x}) + B(\hat{x})K(\hat{x}, x_r) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} \Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r) \\ B(\hat{x})F(\hat{x}, x_r) \\ A_r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}(x) = \begin{bmatrix} G(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_r \end{bmatrix}.$$

**定理1** 对于多项式系统(1), 给定跟踪性能抑制指标  $\gamma > 0$ , 齐次度  $h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0$ , 正多项式  $\varepsilon_1(e_x)$ 、 $\varepsilon_2(\hat{x})$ 、 $\varepsilon_3(x_r)$  和  $\varepsilon_4(x, \tilde{x})$ , 若存在正定对称多项式矩阵  $P_1(e_x)$ 、 $P_2(\hat{x})$  和  $P_3(x_r)$  以及多项式矩阵  $W_1(e_x, \hat{x})$ 、 $W_2(\hat{x}, x_r)$  和  $W_3(\hat{x}, x_r)$ , 使得

$$P_1(e_x) - \varepsilon_1(e_x)I, \quad (12)$$

$$P_2(\hat{x}) - \varepsilon_2(\hat{x})I, \quad (13)$$

$$P_3(x_r) - \varepsilon_3(x_r)I, \quad (14)$$

$$-\Omega(x, \tilde{x}) - \varepsilon_4(x, \tilde{x})I \quad (15)$$

为 SOS 矩阵. 其中

$$\Omega(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ * & * & \Omega_{33} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} h_1 G(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_3 B_r \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} P_1(e_x)C^T \\ P_2(\hat{x})C^T \\ -P_3(x_r)C_r^T \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{11} = h_1 \text{Sym}(A(x)P_1(e_x) - W_1(e_x, \hat{x})),$$

$$\Omega_{12} = h_1 (\Delta A(x, \hat{x})P_2(\hat{x}) + \Delta B(x, \hat{x})W_2(\hat{x}, x_r)) + h_2 W_1^T(e_x, \hat{x}),$$

$$\Omega_{13} = h_1 \Delta B(x, \hat{x})W_3(\hat{x}, x_r),$$

$$\Omega_{22} = h_2 \text{Sym}(A(\hat{x})P_2(\hat{x}) + B(\hat{x})W_2(\hat{x}, x_r)),$$

$$\Omega_{23} = h_2 B(\hat{x})W_3(\hat{x}, x_r),$$

$$\Omega_{33} = h_3 \text{Sym}(A_r P_3(x_r)).$$

则所设计的观测器(8)和控制器(9)可使多项式系统(1)满足  $H_\infty$  输出跟踪性能, 且观测器和控制器增益矩阵分别为

$$L(\hat{x})C = W_1(e_x, \hat{x})P_1^{-1}(e_x),$$

$$K(\hat{x}, x_r) = W_2(\hat{x}, x_r)P_2^{-1}(\hat{x}),$$

$$F(\hat{x}, x_r) = W_3(\hat{x}, x_r)P_3^{-1}(x_r).$$

**证明** 定义齐次多项式 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{x}) = 2\tilde{x}^T P(\tilde{x})\tilde{x} =$$

$$2 \begin{bmatrix} e_x \\ \hat{x} \\ x_r \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \frac{\nabla_{e_x e_x} V(e_x)}{h_1(h_1-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \frac{\nabla_{\hat{x}\hat{x}} V(\hat{x})}{h_2(h_2-1)} & \mathbf{0} \\ * & * & \frac{\nabla_{x_r x_r} V(x_r)}{h_3(h_3-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \hat{x} \\ x_r \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{e_x e_x} V(e_x)}{h_1(h_1 - 1)} &= P_1^{-1}(e_x), \\ \frac{\nabla_{\hat{x}\hat{x}} V(\hat{x})}{h_2(h_2 - 1)} &= P_2^{-1}(\hat{x}), \\ \frac{\nabla_{x_r x_r} V(x_r)}{h_3(h_3 - 1)} &= P_3^{-1}(x_r), \end{aligned}$$

则  $P(\tilde{x}) = \text{diag}\{P_1^{-1}(e_x) \ P_2^{-1}(\hat{x}) \ P_3^{-1}(x_r)\}$ . 由条件(12)~(14), 得到  $V(\tilde{x}) > 0$ .

由引理2,  $\dot{V}(\tilde{x})$  可表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &= 2 \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix}^T \times \\ &\begin{bmatrix} \frac{\nabla_{e_x e_x} V(e_x)}{h_1 - 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \frac{\nabla_{\hat{x}\hat{x}} V(\hat{x})}{h_2 - 1} & \mathbf{0} \\ * & * & \frac{\nabla_{x_r x_r} V(x_r)}{h_3 - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \hat{x} \\ x_r \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$2\tilde{x}^T \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{x},$$

其中  $\tilde{h} = \text{diag}\{h_1 \ h_2 \ h_3\}$ . 沿增广系统(11)求得 Lyapunov 函数  $V(\tilde{x})$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T \tilde{A}^T(x, \hat{x}, x_r) \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{x} + \tilde{\omega}^T \tilde{G}^T(x) \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{x} + \\ &\tilde{x}^T \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{A}(x, \hat{x}, x_r)\tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{G}(x)\tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (16)$$

进而, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} &= \tilde{x}^T \tilde{A}^T(x, \hat{x}, x_r) \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{A}(x, \hat{x}, x_r)\tilde{x} + \\ \tilde{\omega}^T \tilde{G}^T(x) \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{G}(x)\tilde{\omega} + \\ \tilde{x}^T \tilde{C}^T \tilde{C}\tilde{x} - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} &= \eta^T \Pi(x, \tilde{x})\eta. \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta &= [\tilde{x}^T \ \tilde{\omega}^T]^T, \\ \tilde{C} &= [C \ C \ -C_r], \\ \Pi(x, \tilde{x}) &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}(\tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{A}(x, \hat{x}, x_r)) + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{G}(x) \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

应用 Schur 补引理,  $\Pi(x, \tilde{x}) < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}(\tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{A}(x, \hat{x}, x_r)) & \tilde{h}P(\tilde{x})\tilde{G}(x) & \tilde{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

结合增广系统(11), 将  $\tilde{h} = \text{diag}\{h_1 \ h_2 \ h_3\}$  和  $P(\tilde{x}) = \text{diag}\{P_1^{-1}(e_x) \ P_2^{-1}(\hat{x}) \ P_3^{-1}(x_r)\}$  代入式(18), 得到

$$\tilde{\Pi}(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 & \tilde{\Pi}_2 & \tilde{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{11} & \tilde{\Pi}_{12} & \tilde{\Pi}_{13} \\ * & \tilde{\Pi}_{22} & \tilde{\Pi}_{23} \\ * & * & \tilde{\Pi}_{33} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Pi}_2 &= \begin{bmatrix} h_1 P_1^{-1}(e_x)G(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_3 P_3^{-1}(x_r)B_r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{11} &= \text{Sym}(h_1 P_1^{-1}(e_x)(A(x) - L(\hat{x})C)), \\ \tilde{\Pi}_{12} &= h_1 P_1^{-1}(e_x)(\Delta A(x, \hat{x}) + \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r)) + \\ &\quad (L(\hat{x})C)^T h_2 P_2^{-1}(\hat{x}), \\ \tilde{\Pi}_{13} &= h_1 P_1^{-1}(e_x)\Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r), \\ \tilde{\Pi}_{22} &= \text{Sym}(h_2 P_2^{-1}(\hat{x})(A(\hat{x}) + B(\hat{x})K(\hat{x}, x_r))), \\ \tilde{\Pi}_{23} &= h_2 P_2^{-1}(\hat{x})B(\hat{x})F(\hat{x}, x_r), \\ \tilde{\Pi}_{33} &= \text{Sym}(h_3 P_3^{-1}(x_r)A_r). \end{aligned}$$

将  $\tilde{\Pi}(x, \tilde{x})$  左右两边同时乘以对角矩阵

$$\text{diag}\{P_1(e_x) \ P_2(\hat{x}) \ P_3(x_r) \ I \ I \ I\},$$

且令

$$\begin{aligned} L(\hat{x})CP_1(e_x) &= W_1(e_x, \hat{x}), \\ K(\hat{x}, x_r)P_2(\hat{x}) &= W_2(\hat{x}, x_r), \\ F(\hat{x}, x_r)P_3(x_r) &= W_3(\hat{x}, x_r), \end{aligned}$$

则  $\tilde{\Pi}(x, \tilde{x})$  等价于  $\Omega(x, \tilde{x})$ . 由条件(15)可知  $\Omega(x, \tilde{x}) < 0$  成立, 即  $\dot{V}(\tilde{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} < 0$  成立.

因此, 当  $\tilde{\omega} = \mathbf{0}$  时, 有  $\dot{V}(\tilde{x}) < 0$ , 增广系统(11)渐近稳定; 当  $\tilde{\omega} \neq \mathbf{0}$  时, 对  $\dot{V}(\tilde{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} < 0$  两端从 0 到  $\infty$  积分, 有  $\int_0^\infty (\dot{V}(\tilde{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) dt < 0$ . 在 0 初始条件下, 可得  $\int_0^\infty (e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) dt < -V(\tilde{x}, t)|_{t \rightarrow \infty} < 0$ , 即式(3)成立, 保证了输出跟踪误差满足给定的  $H_\infty$  性能指标.  $\square$

### 3 满足分离特性的输出跟踪控制设计

为降低 SOS 求解过程的计算复杂度, 一种可能的方式是应用分离特性独立求解观测器和控制器增益矩阵. 因此, 在前文基础上, 设计了如下具有输出反馈结构的输出跟踪控制器:

$$u = K(\hat{x}, x_r)y + F(\hat{x}, x_r)x_r. \quad (20)$$

联立式(1)、(8)和(20),观测误差方程改写为

$$\begin{aligned}
e_x &= (A(\hat{x}) - L(\hat{x})C)e_x + (\Delta A(x, \hat{x}) + \\
&\quad \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r)C)x + \\
&\quad \Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r)x_r + G(x)\omega. \quad (21)
\end{aligned}$$

令 \$\bar{x} = [e\_x^T \quad x^T \quad x\_r^T]^T\$, 由式(1)~(2)和式(20)~(21),得到增广系统

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}(x, \hat{x}, x_r)\bar{x} + \bar{G}(x)\tilde{\omega}. \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{A}(x, \hat{x}, x_r) &= \\
&\begin{bmatrix} A(\hat{x}) - L(\hat{x})C & \Delta A(x, \hat{x}) + \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r)C \\ \mathbf{0} & A(x) + B(x)K(\hat{x}, x_r)C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \\
&\begin{bmatrix} \Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r) \\ \leftarrow B(x)F(\hat{x}, x_r) \\ A_r \end{bmatrix}, \\
\bar{G}(x) &= \begin{bmatrix} G(x) & \mathbf{0} \\ G(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_r \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**定理2** 对于多项式系统(1),给定跟踪性能抑制指标 \$\gamma > 0\$, 齐次度 \$h\_1 > 0, h\_2 > 0, h\_3 > 0\$, 正多项式 \$\delta\_1(e\_x), \delta\_2(x), \delta\_3(x\_r), \delta\_4(e\_x, \hat{x})\$ 和 \$\delta\_5(x, \hat{x}, x\_r)\$, 若存在正定对称多项式矩阵 \$P\_1(e\_x), P\_2(x)\$ 和 \$P\_3(x\_r)\$ 以及多项式矩阵 \$W\_1(e\_x, \hat{x}), W\_2(x, \hat{x}, x\_r)\$ 和 \$W\_3(\hat{x}, x\_r)\$, 使得

$$P_1(e_x) - \delta_1(e_x)I, \quad (23)$$

$$P_2(x) - \delta_2(x)I, \quad (24)$$

$$P_3(x_r) - \delta_3(x_r)I, \quad (25)$$

$$- \Psi_1(e_x, \hat{x}) - \delta_4(e_x, \hat{x})I, \quad (26)$$

$$- \Psi_2(x, \hat{x}, x_r) - \delta_5(x, \hat{x}, x_r)I \quad (27)$$

为SOS矩阵. 其中

$$\Psi_1(e_x, \hat{x}) = h_1 \text{Sym}(P_1(e_x)A(\hat{x}) - W_1(e_x, \hat{x})C),$$

$$\Psi_2(x, \hat{x}, x_r) = \begin{bmatrix} \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} \Psi_{211} & \Psi_{212} \\ * & \Psi_{213} \end{bmatrix}, \Psi_{22} = \begin{bmatrix} h_2 G(x) & \mathbf{0} \\ * & h_3 B_r \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{23} = \begin{bmatrix} P_2(x)C^T \\ -P_3(x_r)C_r^T \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{211} = h_2 \text{Sym}(A(x)P_2(x) + B(x)W_2(x, \hat{x}, x_r)),$$

$$\Psi_{212} = h_2 B(x)W_3(\hat{x}, x_r),$$

$$\Psi_{213} = h_3 \text{Sym}(A_r P_3(x_r)).$$

则所设计的观测器(8)和控制器(20)可使多项式系统

(1)满足 \$H\_\infty\$ 输出跟踪性能,且观测器和控制器增益矩阵分别为

$$L(\hat{x}) = P_1^{-1}(e_x)W_1(e_x, \hat{x}),$$

$$K(\hat{x}, x_r)C = W_2(x, \hat{x}, x_r)P_2^{-1}(x),$$

$$F(\hat{x}, x_r) = W_3(\hat{x}, x_r)P_3^{-1}(x_r).$$

**证明** 选取齐次多项式 Lyapunov 函数

$$V(\bar{x}) = 2\bar{x}^T P(\bar{x})\bar{x},$$

取 \$P(\bar{x}) = \text{diag}\{\alpha P\_1(e\_x) \quad P\_2^{-1}(x) \quad P\_3^{-1}(x\_r)\}, \alpha > 0\$. 由条件(23)~(25),可得 \$V(\bar{x}) > 0\$. 类似于定理1,有

$$\dot{V}(\bar{x}) = 2\bar{x}^T \tilde{h}P(\bar{x})\bar{x}.$$

考虑增广系统(22),可推得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{x}) &= \\
&\bar{x}^T \bar{A}^T(x, \hat{x}, x_r)\tilde{h}P(\bar{x})\bar{x} + \tilde{\omega}^T \bar{G}^T(x)\tilde{h}P(\bar{x})\bar{x} + \\
&\bar{x}^T \tilde{h}P(\bar{x})\bar{A}(x, \hat{x}, x_r)\bar{x} + \bar{x}^T \tilde{h}P(\bar{x})\bar{G}(x)\tilde{\omega}, \quad (28)
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} &= \\
&\bar{x}^T \bar{A}^T(x, \hat{x}, x_r)\tilde{h}P(\bar{x})\bar{x} + \bar{x}^T \tilde{h}P(\bar{x})\bar{A}(x, \hat{x}, x_r)\bar{x} + \\
&\tilde{\omega}^T \bar{G}^T(x)\tilde{h}P(\bar{x})\bar{x} + \bar{x}^T \tilde{h}P(\bar{x})\bar{G}(x)\tilde{\omega} + \\
&\bar{x}^T \bar{C}^T \bar{C}\bar{x} - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} = \xi^T \Phi(\hat{x}, \bar{x})\xi. \quad (29)
\end{aligned}$$

其中

$$\xi = [\bar{x}^T \quad \tilde{\omega}^T]^T, \bar{C} = [\mathbf{0} \quad C \quad -C_r],$$

$$\Phi(\hat{x}, \bar{x}) =$$

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}(\tilde{h}P(\bar{x})\bar{A}(x, \hat{x}, x_r)) + \bar{C}^T \bar{C} \tilde{h}P(\bar{x})\bar{G}(x) \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

应用 Schur 补引理, \$\Phi(\hat{x}, \bar{x}) < 0\$ 可转化为

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}(\tilde{h}P(\bar{x})\bar{A}(x, \hat{x}, x_r)) & \tilde{h}P(\bar{x})\bar{G}(x) & \bar{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

结合增广系统(22), \$\tilde{h} = \text{diag}\{h\_1 \quad h\_2 \quad h\_3\}\$ 以及 \$P(\bar{x}) = \text{diag}\{\alpha P\_1(e\_x) \quad P\_2^{-1}(x) \quad P\_3^{-1}(x\_r)\}\$, 式(30)可重写为

$$\tilde{\Phi}(\hat{x}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha \tilde{\Phi}_1 & \alpha \tilde{\Phi}_2 \\ * & \tilde{\Phi}_3 \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

其中

$$\tilde{\Phi}_1 = \text{Sym}(h_1 P_1(e_x)(A(\hat{x}) - L(\hat{x})C)),$$

$$\tilde{\Phi}_2 = [\tilde{\Phi}_{21} \quad \tilde{\Phi}_{22} \quad \mathbf{0}], \tilde{\Phi}_{21} = [\tilde{\Phi}_{211} \quad \tilde{\Phi}_{212}],$$

$$\tilde{\Phi}_{211} = h_1 P_1(e_x)(\Delta A(x, \hat{x}) + \Delta B(x, \hat{x})K(\hat{x}, x_r)C),$$

$$\tilde{\Phi}_{212} = h_1 P_1(e_x)\Delta B(x, \hat{x})F(\hat{x}, x_r),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{22} &= [h_1 P_1(e_x)G(x) \quad \mathbf{0}], \\ \tilde{\Phi}_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{31} & \tilde{\Phi}_{32} & \tilde{\Phi}_{33} \\ * & -\gamma^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_{31} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{311} & \tilde{\Phi}_{312} \\ * & \tilde{\Phi}_{313} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{32} &= \begin{bmatrix} h_2 P_2^{-1}(x)G(x) & \mathbf{0} \\ * & h_3 P_3^{-1}(x_r)B_r \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{33} &= \begin{bmatrix} C^T \\ -C_r^T \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{311} &= \text{Sym}(h_2 P_2^{-1}(x)(A(x) + B(x)K(\hat{x}, x_r)C)), \\ \tilde{\Phi}_{312} &= h_2 P_2^{-1}(x)B(x)F(\hat{x}, x_r), \\ \tilde{\Phi}_{313} &= \text{Sym}(h_3 P_3^{-1}(x_r)A_r). \end{aligned}$$

将  $\tilde{\Phi}(\hat{x}, \bar{x})$  左右两边同时乘以对角矩阵  $\text{diag}\{I \ P_2(x) \ P_3(x_r) \ I \ I \ I\}$ ,

并令

$$\begin{aligned} P_1(e_x)L(\hat{x}) &= W_1(e_x, \hat{x}), \\ K(\hat{x}, x_r)CP_2(x) &= W_2(x, \hat{x}, x_r), \\ F(\hat{x}, x_r)P_3(x_r) &= W_3(\hat{x}, x_r), \end{aligned}$$

则式(31)转化为

$$\Psi(\hat{x}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha \tilde{\Psi}_1(e_x, \hat{x}) & \alpha \tilde{\Phi}_2 \\ * & \Psi_2(x, \hat{x}, x_r) \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

由 Schur 补引理, 式(32)等价于

$$\begin{cases} \Psi_2(x, \hat{x}, x_r) < 0, \\ \Psi_1(e_x, \hat{x}) < \alpha \tilde{\Phi}_2 \Psi_2^{-1}(x, \hat{x}, x_r) \tilde{\Phi}_2^T. \end{cases} \quad (33)$$

由条件(26)和(27), 有

$$\begin{cases} \Psi_1(e_x, \hat{x}) < 0, \\ \Psi_2(x, \hat{x}, x_r) < 0. \end{cases}$$

因此, 存在一个足够小的  $\alpha$  使得式(33)成立, 进而有  $\dot{V}(\bar{x}) + e_r^T e_r - \gamma^2 \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} < 0$  成立. 同理, 对于定理1, 当  $\tilde{\omega} = \mathbf{0}$  时, 可得  $\dot{V}(\bar{x}) < 0$ , 即增广系统(22)渐近稳定; 当  $\tilde{\omega} \neq \mathbf{0}$  时, 式(3)成立, 即保证了输出跟踪误差满足给定的  $H_\infty$  性能指标.  $\square$

### 4 仿真算例

**算例1** 考虑如式(1)的受扰多项式系统, 其系统参数为

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 1 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ G(x) &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]. \end{aligned}$$

给定如式(2)所示的参考模型

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_r = [1 \ 0].$$

首先, 验证所设计的具有分离特性的基于观测器的输出跟踪控制策略(OBTC-SP)的有效性. 便于计算, 选取齐次多项式 Lyapunov 函数的齐次度为  $h_1 = h_2 = h_3 = 2$ ,  $H_\infty$  跟踪性能抑制指标为  $\gamma = 1.91$ . 设置仿真参数  $\delta_1(e_x)$ 、 $\delta_2(x)$ 、 $\delta_3(x_r)$ 、 $\delta_4(e_x, \hat{x})$  和  $\delta_5(x, \hat{x}, x_r)$  为 SOS 多项式变量. 根据定理2, 利用 Matlab 中的 SOSTOOLS 工具箱进行求解<sup>[22]</sup>, 可得到正定对称多项式矩阵为

$$\begin{aligned} P_1(e_x) &= \begin{bmatrix} 135.763 & 0 \\ 0 & 552.079 \end{bmatrix}, \\ P_2(x) &= \begin{bmatrix} 28.590 & 0 \\ 0 & 62.130 \end{bmatrix}, \\ P_3(x_r) &= \begin{bmatrix} 0.204 & 0 \\ 0 & 0.788 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

以及相应的观测器和控制器增益矩阵

$$\begin{aligned} L(\hat{x}) &= [L_1(\hat{x}); L_2(\hat{x})], \\ K(\hat{x}, x_r)C &= [K(\hat{x}, x_r) \ 0], \\ F(\hat{x}, x_r) &= [F_1(\hat{x}, x_r) \ F_2(\hat{x}, x_r)]. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L_1(\hat{x}) &= 0.572\hat{x}_1^2 + 4.213\hat{x}_2^2 + 9.007, \\ L_2(\hat{x}) &= 2.276 \times 10^{-5}\hat{x}_1^2 + 1.153 \times 10^{-3}\hat{x}_2^2 - 1.478, \\ K(\hat{x}, x_r) &= -1.205\hat{x}_1^2 - 1.205\hat{x}_2^2 - 1.205x_{r1}^2 - \\ &\quad 1.205x_{r2}^2 - 6.826, \\ F_1(\hat{x}, x_r) &= 8.964 \times 10^{-14}\hat{x}_1^2 + 3.227 \times 10^{-14}\hat{x}_2^2 - \\ &\quad 1.404 \times 10^{-14}x_{r1}^2 + 6.130 \times 10^{-14}x_{r2}^2 + \\ &\quad 7.008, \\ F_2(\hat{x}, x_r) &= 2.672 \times 10^{-15}\hat{x}_1^2 + 1.124 \times 10^{-14}\hat{x}_2^2 + \\ &\quad 8.370 \times 10^{-16}x_{r1}^2 + 7.333 \times 10^{-15}x_{r2}^2 + \\ &\quad 0.378. \end{aligned}$$

然后, 给出对比实验以验证所设计 OBTC-SP 方法的优越性. 在文献[20]中, 针对受扰多项式模糊系统提出了基于观测器的跟踪控制策略, 该方法控制器增益中未引入跟踪信号, 且未能够实现观测器与控制器的分离设计. 利用文献[20]中的控制器结构  $u = K(\hat{x})(\hat{x} - x_r)$ , 针对本文的研究对象受扰多项式系统, 给出传统的基于观测器的输出跟踪控制策略(OBTC). 在相同的仿真参数下, 类似于定理1, 获得正定对称多项式矩阵

$$P_1(e_x) = \begin{bmatrix} 0.335 & 0 \\ 0 & 1.876 \end{bmatrix}, P_2(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0.157 & 0 \\ 0 & 0.870 \end{bmatrix},$$

$$P_3(x_r) = P_2(\hat{x}),$$

以及相应的观测器和控制器增益矩阵

$$L(\hat{x})C = \begin{bmatrix} L_1(\hat{x}) & 0 \\ L_2(\hat{x}) & 0 \end{bmatrix}, K(\hat{x}) = [K_1(\hat{x}) \quad K_2(\hat{x})],$$

$$F(\hat{x}) = -K(\hat{x}).$$

其中

$$L_1(\hat{x}) = 2.342\hat{x}_1^2 + 1.682\hat{x}_2^2 + 1.611,$$

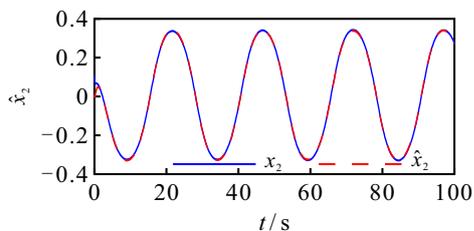
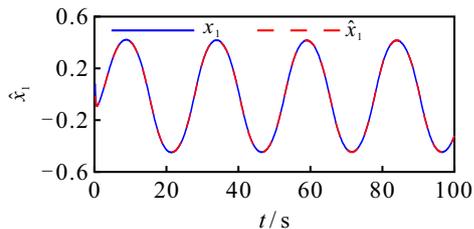
$$L_2(\hat{x}) = 0.114\hat{x}_1^2 - 0.092\hat{x}_2^2 - 0.188,$$

$$K_1(\hat{x}) = -0.280\hat{x}_1^2 - 0.294\hat{x}_2^2 - 1.666,$$

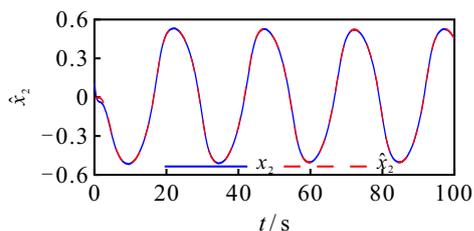
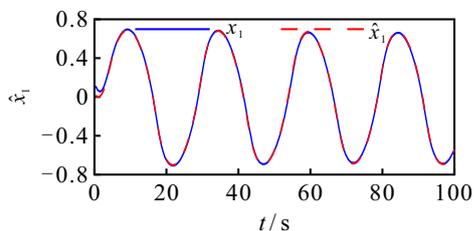
$$K_2(\hat{x}) =$$

$$-3.253 \times 10^{-3}\hat{x}_1^2 + 1.723 \times 10^{-4}\hat{x}_2^2 - 0.197.$$

在仿真中,受扰多项式系统、观测系统以及参考模型的初始状态分别设定为  $x(0) = [0.1 \quad 0.1]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0 \quad 0]^T$  和  $x_r(0) = [-0.1 \quad 0.1]^T$ . 给定参考输入为  $r = 0.26 \sin(0.25t)$ , 假定外部扰动为  $\omega = 0.1 \sin(0.2t)$ . 仿真结果如图1~图3所示.



(a) OBTC-SP



(b) OBTC

图1 不同方法下状态估计曲线

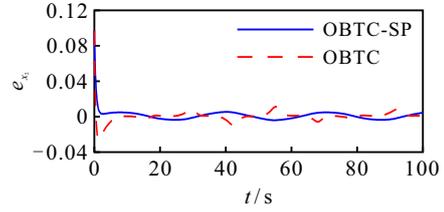
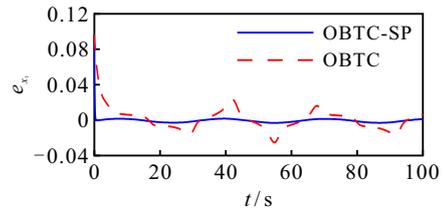


图2 状态估计误差曲线

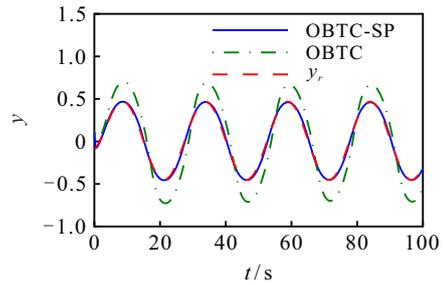


图3 输出跟踪曲线

由图1和图2可见,在OBTC-SP和OBTC方法作用下,基于观测器(8)的系统未知状态估计曲线与系统真实状态基本契合.但在所设计的OBTC-SP方法作用下,经过短暂的调节时间后,状态估计误差能够收敛至较OBTC方法更小的包含0附近邻域内.由图3可见,相较于OBTC方法,OBTC-SP方法能够保证多项式系统输出更好地跟踪给定参考模型的输出信号,且更有效地抑制了外部扰动对系统的影响.

**算例2** 为进一步验证所提出方法的有效性,采用以下经典的非线性质量弹簧阻尼系统<sup>[23]</sup>为实例,进行仿真验证:

$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \phi(x)u.$$

其中: $x$ 为弹簧位移; $\dot{x}$ 为弹簧速度; $\ddot{x}$ 为弹簧加速度; $M$ 为弹簧质量; $g(x, \dot{x})$ 为阻尼系数, $f(x)$ 为弹簧系数, $\phi(x)$ 为输入系数,且假设 $g(x, \dot{x}) = c_1\dot{x}$ ,  $f(x) = c_2x + c_3x^3$ ,  $\phi(x) = 1 + c_4x^2$ . 选取质量弹簧阻尼系统参数为  $M = 1, c_1 = 1, c_2 = 0.01, c_3 = 0.1, c_4 = 0.13$ . 令  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ , 在考虑扰动影响时,得到多项式模型描述的质量弹簧阻尼系统为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 - 0.1x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0.13x_1^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \omega, \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

参考模型选取如下:

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_r = [1 \ 0].$$

给定齐次多项式Lyapunov函数的齐次度为 $h_1 = h_2 = h_3 = 2$ ,  $H_\infty$ 跟踪性能抑制指标为 $\gamma = 4.53$ . 设置仿真参数 $\delta_1(e_x)$ 、 $\delta_2(x)$ 、 $\delta_3(x_r)$ 、 $\delta_4(e_x, \hat{x})$ 和 $\delta_5(x, \hat{x}, x_r)$ 为SOS多项式变量. 利用定理2得到正定对称多项式矩阵为

$$P_1(e_x) = \begin{bmatrix} 50.144 & 0 \\ 0 & 76.836 \end{bmatrix},$$

$$P_2(x) = \begin{bmatrix} 1.095 & 0 \\ 0 & 13.815 \end{bmatrix},$$

$$P_3(x_r) = \begin{bmatrix} 7.053 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 6.773 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

以及相应的观测器和控制器增益矩阵

$$L(\hat{x}) = [L_1(\hat{x}); L_2(\hat{x})],$$

$$K(\hat{x}, x_r)C = [K(\hat{x}, x_r) \ 0],$$

$$F(\hat{x}, x_r) = [F_1(\hat{x}, x_r) \ F_2(\hat{x}, x_r)].$$

其中

$$L_1(\hat{x}) = 0.171\hat{x}_1^2 + 0.171\hat{x}_2^2 + 1.494,$$

$$L_2(\hat{x}) = -0.099\hat{x}_1^2 + 1.385 \times 10^{-4}\hat{x}_2^2 + 0.617,$$

$$K(\hat{x}, x_r) = 9.448 \times 10^{-16}\hat{x}_1^2 - 3.565 \times 10^{-15}\hat{x}_2^2 -$$

$$1.140 \times 10^{-15}x_{r1}^2 +$$

$$1.416 \times 10^{-15}x_{r2}^2 - 12.070,$$

$$F_1(\hat{x}, x_r) = 1.588 \times 10^{-13}\hat{x}_1^2 - 1.861 \times 10^{-13}\hat{x}_2^2 -$$

$$2.455 \times 10^{-14}x_{r1}^2 -$$

$$3.502 \times 10^{-13}x_{r2}^2 + 10.780,$$

$$F_2(\hat{x}, x_r) = 9.965 \times 10^{-14}\hat{x}_1^2 + 8.363 \times 10^{-14}\hat{x}_2^2 -$$

$$2.418 \times 10^{-13}x_{r1}^2 +$$

$$3.143 \times 10^{-13}x_{r2}^2 + 0.330.$$

仿真中,受扰多项式系统、观测系统以及参考模型的初始状态分别设定为 $x(0) = [0.1 \ 0.1]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$ 和 $x_r(0) = [-0.1 \ 0.1]^T$ . 给定参考输入为 $r = \sin(0.5t)$ , 假定外部扰动为 $\omega = 0.1 \sin(0.2t)$ . 仿真结果如图4和图5所示.

由图4可见,经过暂态调节时间后,由观测器(8)所产生的状态估计曲线与真实状态响应基本重合. 由图5可见,在受到外部扰动影响的情况下,利用输出跟踪控制器(20)可实现系统输出对参考模型输出信号的跟踪. 综合图4和图5的结果,表明了所设计的观测器(8)和输出跟踪控制器(20)是有效的.

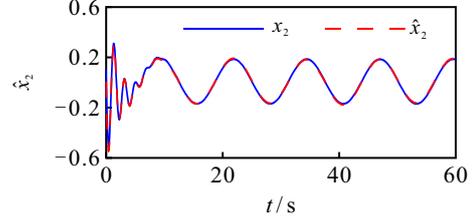
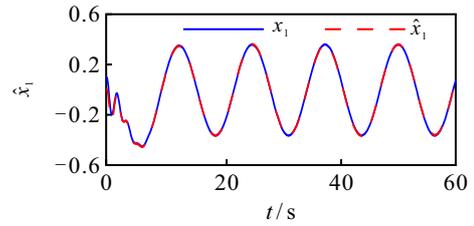


图4 状态估计曲线

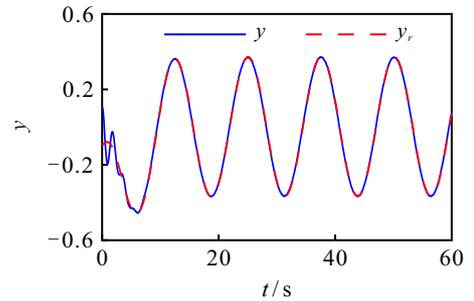


图5 输出跟踪曲线

## 5 结论

本文研究了一类受扰多项式系统的鲁棒 $H_\infty$ 输出跟踪控制问题. 针对状态不完全可测情况,给出基于观测器的输出跟踪控制器. 该控制器由两部分组成,一部分为反馈镇定控制器,用于保证闭环系统稳定;另一部分为前馈补偿控制器,用以实现对参考模型输出信号的跟踪. 在此基础上,提出具有输出反馈结构的跟踪控制策略,能够有效抑制外部扰动对系统的影响,达到预期的 $H_\infty$ 跟踪性能. 同时,该策略使得观测器和控制器设计满足分离原则,从而降低求解过程中的计算复杂度. 利用齐次多项式Lyapunov函数方法,给出了基于观测器的 $H_\infty$ 输出跟踪控制问题的可解性条件,且通过SOS凸优化技术可直接求得相应的观测器和控制器. 数值仿真例子验证了所提出方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Liu J L, Yang M, Tian E G, et al. Event-based security control for state-dependent uncertain systems under hybrid-attacks and its application to electronic circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2019, 66(12): 4817-4828.
- [2] Lam H K. Chaotic synchronisation using output/full state-feedback polynomial controller[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(11): 2285-2292.
- [3] Chesi G. LMI techniques for optimization over

- polynomials in control: A survey[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(11): 2500-2510.
- [4] Niu Y C, Sheng L, Gao M, et al. Dynamic event-triggered state estimation for continuous-time polynomial nonlinear systems with external disturbances[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2021, 17(6): 3962-3970.
- [5] Valmorbida G, Tarbouriech S, Garcia G. Design of polynomial control laws for polynomial systems subject to actuator saturation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1758-1770.
- [6] Huang W C, Sun H F, Zeng J P. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(6): 799-805.
- [7] Ichihara H. Optimal control for polynomial systems using matrix sum of squares relaxations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(5): 1048-1053.
- [8] Li Y, Ke J, Zeng J P. Tracking control for lower limb rehabilitation robots based on polynomial nonlinear uncertain models[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(6): 2186-2204.
- [9] Sun H F, Yang Z L, Meng B. Tracking control of a class of non-linear systems with applications to cruise control of air-breathing hypersonic vehicles[J]. International Journal of Control, 2015, 88(5): 885-896.
- [10] Huang W C, Zeng J P, Sun H F. Robust consensus for linear multi-agent systems with mixed uncertainties[J]. Systems & Control Letters, 2015, 76: 56-65.
- [11] Lam H K, Li H Y. Output-feedback tracking control for polynomial fuzzy-model-based control systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(12): 5830-5840.
- [12] Chen Z R, Zhang B Y, Zhang Z Q, et al. Guaranteed cost fuzzy tracking control for nonlinear polynomial systems with input saturation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(18): 8293-8311.
- [13] 许刚, 段广仁. 一阶伪线性系统的模型参考输出跟踪控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(8): 1409-1414.  
(Xu G, Duan G R. Model reference output tracking control for first-order quasi-linear systems[J]. Control and Decision, 2017, 32(8): 1409-1414.)
- [14] Li H B, Wu L G, Li J T, et al. Stabilization and separation principle of networked control systems using the T-S fuzzy model approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(5): 1832-1843.
- [15] Lo J C, Lin C W. Polynomial fuzzy observed-state feedback stabilization via homogeneous Lyapunov methods[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(5): 2873-2885.
- [16] Xu J, Xie L H, Wang Y Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(8): 1892-1897.
- [17] Jennawasin T, Banjerdpongchai D. Iterative LMI approach to robust static output feedback control of uncertain polynomial systems with bounded actuators[J]. Automatica, 2021, 123: 109292.
- [18] Zheng Q, Wu F. Regional stabilisation of polynomial non-linear systems using rational Lyapunov functions[J]. International Journal of Control, 2009, 82(9): 1605-1615.
- [19] Tsai S H, Jen C Y.  $H_\infty$  stabilization for polynomial fuzzy time-delay system: A sum-of-squares approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3630-3644.
- [20] Tari R S, Moarefiarpour A. Observer-based tracking controller design for a class of polynomial fuzzy systems with disturbance[J]. Asian Journal of Control, 2021, 23(4): 1982-1991.
- [21] Chesi G, Colaneri P. Homogeneous rational Lyapunov functions for performance analysis of switched systems with arbitrary switching and dwell time constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5124-5137.
- [22] Prajna S, Papachristodoulou A, Parrilo P A. Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver[C]. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, 2002: 741-746.
- [23] Zheng Q, Wu F. Nonlinear output feedback  $H_\infty$  control for polynomial nonlinear systems[C]. American Control Conference. Seattle, 2008: 1196-1201.

### 作者简介

李颖(1992—), 女, 博士生, 从事鲁棒控制、非线性跟踪控制等研究, E-mail: liy920705@163.com;

曾建平(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、非线性控制、复杂运动体控制等研究, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.