控制与决策
Control and Decision

阻尼累加离散GM(1,1)模型及其应用

曹阳, 梁爽, 沈琴琴, 施佺

引用本文:
曹阳,梁爽,沈琴琴,施. 阻尼累加离散GM(1,1)模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1687-1694.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1768

阻尼累加离散GM(1,1)模型及其应用

曹 阳[1,2†], 梁 爽[1], 沈琴琴[2], 施 佺[1,2]

(1. 南通大学 信息科学与技术学院，江苏 南通 226019；2. 南通大学 交通与土木工程学院，江苏 南通 226019)

摘 要: 基于阻尼累加生成算子和离散灰色预测模型的思想,提出一类新的阻尼累加离散GM(1,1)模型,并详细给出模型的推导过程,从理论上分析与经典GM(1,1)模型、离散GM(1,1)模型以及最近提出的阻尼累加GM(1,1)模型的关系,探讨模型的稳定性和数据适用类型分析,并利用量子粒子群优化算法计算出最优阻尼累加参数. 最后将所提出模型应用于两个实际案例,结果表明所提出的阻尼累加离散GM(1,1)模型的拟合和预测误差均优于上述基准模型.

关键词: 阻尼累加生成算子；离散灰色模型；GM(1,1)；量子粒子群优化算法

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1768

引用格式: 曹阳,梁爽,沈琴琴,等. 阻尼累加离散GM(1,1)模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1687-1694.

Damping accumulated discrete GM (1,1) model and its application

CAO Yang[1,2†], *LIANG Shuang*[1], *SHEN Qin-qin*[2], *SHI Quan*[1,2]

(1. School of Information Science and Technology，Nantong University，Nantong 226019，China；2. School of Transportation and Civil Engineering，Nantong University，Nantong 226019，China)

Abstract: Based on the idea of damping accumulated generation operators and discrete grey prediction models, a new damping accumulated discrete GM (1,1) (DADGM (1,1)) model is proposed, and its specific process is derived. The relationship between the GM(1,1) model, the discrete GM (1,1) model, the damping accumulated GM (1,1) model is theoretically analyzed. Stability property and the analysis of data application types of the DADGM (1,1) model are discussed, and the optimal damping accumulative parameter is searched using the quantum particle swarm optimization algorithm. Finally, two practical examples are given. Numerical results show that the proposed DADGM (1,1) model has better fitting and prediction efficiency than the above benchmark models.

Keywords: damping accumulated generating operator；discrete grey model；GM (1,1)；quantum particle swarm optimization algorithm

0 引 言

灰色系统理论是一类善于处理以“少数据、贫信息”为主要特征的新型不确定研究理论,灰色预测模型是灰色系统理论的重要分支之一[1]. 在已提出的众多灰色预测模型中,最为经典的是GM(1,1)模型. 事实上,GM(1,1)模型可归结为一类特殊的微分方程模型,其中前面的“1”表示一阶微分方程,后面的“1”表示单变量.

GM(1,1)模型的基本思想是: 首先,对原始非负序列$X^{(0)}$进行一阶累加得到近似指数规律的单调递增序列$X^{(1)}$;然后,用一阶线性常微分方程的解(单调递增指数函数)得到$X^{(1)}$的近似序列$\hat{X}^{(1)}$;最后,再对$\hat{X}^{(1)}$作一阶累减得到原始序列$X^{(0)}$的近似序列$\hat{X}^{(0)}$,并由此预测未来的发展趋势. 由建模过程可以看出,对原始数据进行预处理是GM(1,1)模型的第1步也是非常关键的一步. 大量的研究集中在如何对原始数据进行预处理,以获得更加平滑且满足灰指数定律的序列,从而使GM(1,1)模型具有更好的拟合和预测精度. 在一阶累加的基础上,针对不同数据的特征,提出了各种改进的累加算子,包括分数阶累加[2]、新信息优先累加[3]、截断累加[4]、反向累加[5]、季节性累加[6]、加权分数阶累加[7]等. 针对GM(1,1)模型预测过程中数据变化(增长或下降)趋势过快,出现不合理的预测结果,文献[8]利用阻尼趋势参数减

收稿日期: 2021-10-14；**录用日期:** 2022-02-25.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61771265)；江苏高校“青蓝工程”项目；南通市科技计划项目(MS22021034, JC2021198)；南通市“226”科研项目(131320633045).
责任编委: 王光臣.
†通讯作者. E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.

缓GM (1,1)模型预测过程中数据变化趋势,得到更为合理的预测结果. 最近,文献[9]基于这种阻尼趋势参数提出一种新的阻尼累加方式,突出了新信息在累加过程中的权重,并结合GM (1,1)模型的思想建立一种阻尼累加GM (1,1)(damping accumulated GM (1,1), DAGM (1,1))模型. 实例分析表明, DAGM (1,1)模型可以灵活地调整预测序列的发展趋势,比经典GM (1,1)模型、分数阶累加GM (1,1)模型的拟合和预测精度更佳.

在经典GM (1,1)模型中存在两个非常重要的参数,即发展系数和灰作用量,其取值的好坏直接关系到预测的结果. 为了计算这两个参数,通常将一阶线性微分方程两边积分化为差分方程,再由最小二乘法求出,而GM (1,1)模型的时间响应函数是由一阶线性微分方程的解直接导出,这存在着从差分方程到微分方程的转换误差. 为此,文献[10]直接基于差分方程提出了离散GM (1,1)(Discrete GM (1,1))模型,不仅符合灰色预测模型建模机理,还避免了GM (1,1)模型中的转换误差,实证分析表明DGM (1,1)模型具有无偏性且优于GM (1,1)模型[11-12].

研究发现,最近提出的DAGM (1,1)模型尽管优于经典的GM (1,1)模型,但与GM (1,1)模型类似,仍然存在着从离散方程到微分方程的转换误差. 为了克服这一问题,本文借助于离散GM (1,1)模型的思想,提出一类新的阻尼累加离散GM (1,1)模型,详细给出新模型的推导过程,分析新模型与经典GM (1,1)模型、离散GM (1,1)模型以及阻尼累加GM (1,1)模型之间的关系,并利用矩阵扰动理论分析模型的稳定性,最后通过两个案例验证所提出模型的性能.

1 阻尼累加GM (1,1)模型

定义1 [9] 给定阻尼参数$\zeta \in (0,1]$和原始序列$X^{(0)} = (x^{(\zeta)}(1), x^{(\zeta)}(2), \ldots, x^{(\zeta)}(n))$,称

$$X^{(\zeta)} = (x^{(\zeta)}(1), x^{(\zeta)}(2), \ldots, x^{(\zeta)}(n)) \tag{1}$$

为ζ阶阻尼累加生成序列(ζ-DAGO),其中$x^{(\zeta)}(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x^{(0)}(i)}{\zeta^{i-1}}, k = 1,2,\ldots,n$.用矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(1) \\ x^{(\zeta)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\zeta)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{\zeta} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dfrac{1}{\zeta} & \ldots & \dfrac{1}{\zeta^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

定义2 [9] 设$x^{(0)}(k)$和$x^{(\zeta)}(k)$如定义1所述, $Z^{(\zeta)} = (z^{(\zeta)}(1), z^{(\zeta)}(2), \ldots, z^{(\zeta)}(n))$为$X^{(\zeta)}$的紧邻均值生成序列,其中$z^{(\zeta)}(k+1) = (z^{(\zeta)}(k+1) + z^{(\zeta)}(k))/2$,称

$$x^{(\zeta)}(k+1) - x^{(\zeta)}(k) + az^{(\zeta)}(k+1) = b \tag{2}$$

为阻尼累加GM (1,1) (DAGM (1,1))模型,其中a为发展系数,b为灰作用量,称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(\zeta)}}{\mathrm{d}t} + ax^{(\zeta)} = b \tag{3}$$

为DAGM (1,1)模型的白化微分方程.

发展系数a和灰作用量b可基于离散方程(2)由最小二乘法得到,即

$$[a,b] = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(\zeta)}(2) & 1 \\ -z^{(\zeta)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(\zeta)}(n) & 1 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(2) - x^{(\zeta)}(1) \\ x^{(\zeta)}(3) - x^{(\zeta)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\zeta)}(n) - x^{(\zeta)}(n-1) \end{bmatrix}.$$

令初始值$\hat{x}^{(\zeta)}(t)|_{t=1} = x^{(\zeta)}(1) = x^{(0)}(1)$,由式(3)可求得DAGM (1,1)模型的时间响应函数

$$\hat{x}^{(\zeta)}_{DA}(k) = \Big(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}. \tag{4}$$

DAGM(1,1)模型突出了新信息的优先性,并且可以灵活调整预测结果的增长趋势[9]. 但由上述的模型求解过程可以看出,参数(a,b)是基于离散方程(2)求出的,而包含参数(a,b)的时间响应函数却是由微分方程(3)得到的. 因此, DAGM(1,1)模型仍然存在着从离散方程到微分方程的转换误差.

2 阻尼累加离散GM (1,1)模型及性质分析

为了消除阻尼累加GM (1,1)模型中的转换误差,本节借鉴离散灰色模型的思想建立阻尼累加离散GM (1,1)模型,分析了模型的性质和稳定性,并进行了纯指数序列模拟分析,确定模型的适用范围.

2.1 阻尼累加离散GM (1,1)模型

定义3 设原始非负序列$X^{(0)}$和ζ阶阻尼累加生成序列$X^{(\zeta)}$如定义1所述, $x^{(\zeta)}(k)$是$X^{(\zeta)}$的第k个元素,称

$$x^{(\zeta)}(k+1) = \beta_1 x^{(\zeta)}(k) + \beta_2 \tag{5}$$

为阻尼累加离散GM (1,1) (DADGM (1,1))模型.

DADGM (1,1)模型的参数(β_1, β_2)可基于离散方程(5)由最小二乘法求得,即

$$[\beta_1, \beta_2]^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{6}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(1) & 1 \\ x^{(\zeta)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\zeta)}(n-1) & 1 \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(2) \\ x^{(\zeta)}(3) \\ \vdots \\ x^{(\zeta)}(n) \end{bmatrix}.$$

令初始值 $\hat{x}^{(\zeta)}(t)|_{t=1}=x^{(\zeta)}(1)=x^{(0)}(1)$,由式(5)通过递推关系可得DADGM(1,1)模型的时间响应函数

$$\hat{x}^{(\zeta)}_{\mathrm{DAD}}(k)=\beta_1^{k-1}x^{(0)}(1)+\frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1}\beta_2, \tag{7}$$

再通过逆向 ζ 阶阻尼累加生成算子,可得拟合值,并预测未来发展趋势

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\begin{cases} x^{(0)}(1),\ k=1; \\ (\hat{x}^{(\zeta)}_{\mathrm{DAD}}(k)-\hat{x}^{(\zeta)}_{\mathrm{DAD}}(k-1))\zeta^{k-1},\ k=2,3,\ldots. \end{cases} \tag{8}$$

由上述阻尼累加离散GM(1,1)模型的建模过程可以看出,模型中的参数 (β_1,β_2) 是基于离散方程(5)通过最小二乘法得到,模型中的时间响应函数(7)亦是基于离散方程(5)通过递推关系得到,有效地避免了阻尼累加GM(1,1)模型中从离散方程到微分方程的转换误差.

2.2 模型性质

由定义2可知, DAGM(1,1)模型的基本形式(2)可等价于

$$x^{(\zeta)}(k+1)=\frac{1-0.5a}{1+0.5a}x^{(\zeta)}(k)+\frac{b}{1+0.5a},$$

这与阻尼累加离散GM(1,1)模型(5)在形式上完全相同.若令

$$\beta_1=\frac{1-0.5a}{1+0.5a},\ \beta_2=\frac{b}{1+0.5a}, \tag{9}$$

则有

$$a=\frac{2(1-\beta_1)}{1+\beta_1},\ b=\frac{2\beta_2}{1+\beta_1},\ \frac{b}{a}=\frac{\beta_2}{1-\beta_1}. \tag{10}$$

下面分析阻尼累加离散GM(1,1)模型的性质,为此先引入一个引理.

引理1 [13] 当 $-a\to 0^+$ 时, $\dfrac{1-0.5a}{1+0.5a}\approx \mathrm{e}^{-a}$.

性质1 当 $-a\to 0^+$ 时,阻尼累加离散GM(1,1)模型和阻尼累加GM(1,1)模型等价.

证明 由引理1可知,当 $-a\to 0^+$ 时,有

$$\beta_1=\frac{1-0.5a}{1+0.5a}\approx \mathrm{e}^{-a}.$$

由式(10), DAGM(1,1)模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(\zeta)}_{\mathrm{DA}}(k)=\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(k-1)}+\frac{b}{a}\approx \Big(x^{(0)}(1)-\frac{\beta_2}{1-\beta_1}\Big)\beta_1^{k-1}+\frac{\beta_2}{1-\beta_1}= \beta_1^{k-1}x^{(0)}(1)+\frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1}\beta_2\triangleq \hat{x}^{(\zeta)}_{\mathrm{DAD}}(k).$$

即阻尼累加离散GM(1,1)模型和阻尼累加GM(1,1)模型等价. □

性质2 当 $\zeta=1$ 时,阻尼累加生成算子退化为一阶累加生成算子,阻尼累加离散GM(1,1)模型退化为离散GM(1,1)模型.

性质3 当 $-a\to 0^+$、且 $\zeta=1$ 时,阻尼累加离散GM(1,1)模型与经典GM(1,1)模型等价.

由前面的分析可知,阻尼累加离散GM(1,1)模型和阻尼累加GM(1,1)模型的等价是基于假设条件(9)成立,在实际计算中参数 (β_1,β_2) 和 (a,b) 分别是通过基于式(5)和(2)的最小二乘法得到,求解过程存在差异并且最小二乘法拟合方法本身存在一定的误差[14],所以导致 β_1 和 $(1-0.5a)/(1+0.5a)$、β_2 和 $b/(1+0.5a)$ 在数值上可能并不是完全相等. 若出现该情况,则这几类模型的等价性需进一步分析.

2.3 稳定性分析

引理2 [15] 假设 p 和 $\hat{p}$ 满足

$$\min_p\|Bp-Y\|_2, \min_{\hat{p}}\|(B+\Delta B)\hat{p}-(Y+\Delta Y)\|_2.$$

其中: $B,\Delta B\in C^{m\times n}(m\leqslant n)$ 且 $Y\neq 0,\Delta Y\in C^m$. 令 $B^\dagger$ 是矩阵 B 的广义逆, $\kappa_\dagger=\|B^\dagger\|_2\|B\|,\gamma_\dagger=1-\|B^\dagger\|_2\|\Delta B\|_2,r_p=Y-Bp$. 如果 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(B+\Delta B)$ 且 $\|B^\dagger\|_2\|\Delta B\|_2<1$,则有

$$\|\hat{p}-p\|_2\leqslant \frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\frac{\|\Delta B\|_2}{\|B\|}\|p\|+\frac{\|\Delta Y\|_2}{\|B\|}+\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\frac{\|\Delta B\|_2}{\|B\|}\frac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big).$$

引理3 [16] 设 $X^{(0)},Y^{(0)}$ 为非负序列,建立离散GM(1,1)模型,令 $X^{(0)},Y^{(0)}$ 的参数分别为 (β_1,β_2) 和 (γ_1,γ_2),若 $Y^{(0)}=\rho X^{(0)}$,则 $\gamma_1=\beta_1,\gamma_2=\rho\beta_2$.

对于DADGM(1,1)模型,可以得到如下结论.

定理1 设DADGM模型的参数 (β_1,β_2) 的解为 p,满足 $\min\limits_p\|Bp-Y\|_2$,如果 ε 为原始值 $x^{(\zeta)}(k)$ 的扰动,则 p 的扰动界为

$$L[x^{(0)}(k)]=\begin{cases} |\varepsilon|\dfrac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\dfrac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}\|p\|+\dfrac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}+ \dfrac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\dfrac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}\dfrac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big),\ k=1; \\ \Big|\dfrac{\varepsilon}{\zeta^{k-1}}\Big|\dfrac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\dfrac{\sqrt{n-k}}{\|B\|}\|p\|+\dfrac{\sqrt{n-k+1}}{\|B\|}+ \dfrac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\dfrac{\sqrt{n-k}}{\|B\|}\dfrac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big),\ k=2,3,\ldots,n. \end{cases} \tag{11}$$

证明 1) 如果只发生扰动$\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)+\varepsilon$,则

$$\hat{B}=B+\Delta B=\begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(1) & 1 \\ x^{(\zeta)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\zeta)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{Y}=Y+\Delta Y=\begin{bmatrix} x^{(\zeta)}(2) \\ x^{(\zeta)}(3) \\ \vdots \\ x^{(\zeta)}(n) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

因此

$$\|\Delta B\|_2=\sqrt{n-1}|\varepsilon|,\ \|\Delta Y\|_2=\sqrt{n-1}|\varepsilon|.$$

由引理1可得,模型解p的扰动界为

$$L[x^{(0)}(1)]=\\ |\varepsilon|\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\frac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}\|p\|+\frac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}+\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\frac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}\frac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big).$$

2) 如果只有$x^{(0)}(2)$发生扰动,满足$\hat{x}^{(0)}(2)=x^{(0)}(2)+\varepsilon$,则

$$\Delta B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\zeta} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{\zeta} & 0 \end{bmatrix},\ \Delta Y=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\zeta} \\ \frac{\varepsilon}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon}{\zeta} \end{bmatrix},$$

故

$$\|\Delta B\|_2=\frac{\sqrt{n-2}}{\zeta}|\varepsilon|,\ \|\Delta Y\|_2=\frac{\sqrt{n-1}}{\zeta}|\varepsilon|.$$

同理,模型解的扰动界为

$$L[x^{(0)}(2)]=\\ \Big|\frac{\varepsilon}{\zeta}\Big|\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\frac{\sqrt{n-2}}{\|B\|}\|p\|+\frac{\sqrt{n-1}}{\|B\|}+\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\frac{\sqrt{n-2}}{\|B\|}\frac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big).$$

3) 当发生扰动$\hat{x}^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+\varepsilon\,(k=3,4,\ldots,n)$时,有

$$L[x^{(0)}(k)]=\Big|\frac{\varepsilon}{\zeta^{k-1}}\Big|\frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\Big(\frac{\sqrt{n-k}}{\|B\|}\|p\|+\frac{\sqrt{n-k+1}}{\|B\|}+\\ \frac{\kappa_\dagger}{\gamma_\dagger}\frac{\sqrt{n-k}}{\|B\|}\frac{\|r_p\|}{\|B\|}\Big).\quad\square$$

由式(11)可以看出,ζ为固定值,当原始数据样本量n增加时,扰动界$L[x^{(0)}(k)]$也随之增大,模型参数解也将变得不稳定,故从扰动界大小的角度,DADGM(1,1)模型适合于历史数据有限、具有不确定性的小样本建模,样本量不大时,模型相对稳定.

定理2 给定原始非负序列$X^{(0)}$和$Y^{(0)}$,$Y^{(0)}=\rho X^{(0)},\rho>0$,建立DADGM(1,1)模型,令$\varepsilon_x(k)=\dfrac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},\varepsilon_y(k)=\dfrac{y^{(0)}(k)-\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}$,则$\hat{y}^{(0)}(k)=\rho\hat{x}^{(0)}(k),\ \varepsilon_x(k)=\varepsilon_y(k),\ k=2,3,\ldots,n$.

证明 设$X^{(0)},Y^{(0)}$对应的参数分别为(β_1,β_2)和(γ_1,γ_2),由引理3易得对于DADGM(1,1)模型同样满足$\gamma_1=\beta_1,\gamma_2=\rho\beta_2$.

$$\hat{x}^{(0)}(k)=(\hat{x}^{(\zeta)}_{DAD}(k)-\hat{x}^{(\zeta)}_{DAD}(k-1))\zeta^{k-1}=\\ \Big(\beta_1^{k-1}x^{(0)}(1)+\frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1}\beta_2-\\ \beta_1^{k-2}x^{(0)}(1)-\frac{1-\beta_1^{k-2}}{1-\beta_1}\beta_2\Big)\zeta^{k-1}=\\ (\beta_1^{k-2}(\beta_1-1)x^{(0)}(1)+\beta_2\beta_1^{k-2})\zeta^{k-1}.$$

同理,有$\hat{y}^{(0)}(k)=(\gamma_1^{k-2}(\gamma_1-1)y^{(0)}(1)+\gamma_2\gamma_1^{k-2})\zeta^{k-1}$,则

$$\frac{\hat{y}^{(0)}(k)}{\hat{x}^{(0)}(k)}=\frac{(\gamma_1^{k-2}(\gamma_1-1)y^{(0)}(1)+\gamma_2\gamma_1^{k-2})\zeta^{k-1}}{(\beta_1^{k-2}(\beta_1-1)x^{(0)}(1)+\beta_2\beta_1^{k-2})\zeta^{k-1}}=\\ \frac{\rho\beta_1^{k-2}(\beta_1-1)x^{(0)}(1)+\rho\beta_2\beta_1^{k-2}}{\beta_1^{k-2}(\beta_1-1)x^{(0)}(1)+\beta_2\beta_1^{k-2}}=\rho,$$

即$\hat{y}^{(0)}(k)=\rho\hat{x}^{(0)}(k)$. 所以

$$\frac{\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}=\frac{\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},$$

$$1-\frac{\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}=1-\frac{\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},$$

$$\frac{y^{(0)}(k)-\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},$$

即$\varepsilon_x(k)=\varepsilon_y(k),\ k=2,3,\ldots,n$. $\square$

定理2表明原始序列经过数乘变化,不改变DADGM(1,1)模型的预测精度,相对误差保持不变. 当原始数据较大引起矩阵条件数变大,出现病态矩阵时,可通过数乘变化法,在不改变预测精度的情况下,降低矩阵条件数,从而解决模型中可能存在的病态矩阵问题,提高了模型的稳定性和适用性.

2.4 纯指数序列模拟分析

姚天祥等[17]从理论上证明了离散GM(1,1)模型的模拟值增长率恒定的结论,而对于阻尼累加离散GM(1,1)模型,由式(8)易证其拟合和预测序列是一个等比序列,拟合和预测值的增长率$\hat{u}(k)$也为一恒定值,即

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\beta_1^{k-2}\zeta^{k-1}(x^{(0)}(1)(\beta_1-1)+\beta_2),$$

$$\hat{u}(k)=\frac{\hat{x}^{(0)}(k+1)-\hat{x}^{(0)}(k)}{\hat{x}^{(0)}(k)}=\beta_1\zeta-1,\tag{12}$$

其中$k=2,3,\ldots,n$. 由式(12)可知DADGM(1,1)模型的增长率$\hat{u}(k)$和阻尼参数ζ相关,通过改变阻尼参数ζ的值可以改变模型预测的增长率,以调节模型预测结果的变化趋势. 此外,由于DADGM(1,1)模型的

增长率恒定,其拟合预测值序列会呈现单调上升或下降的趋势,对具有单调性的原始数据序列具有良好的拟合和预测效果.

定理3　设$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots,x^{(0)}(n))$为原始序列,其中$x^{(0)}(k)=\lambda a^k, a\neq 1, k=1,2,\ldots,n$, $\hat{x}^{(0)}(k)$为DADGM(1,1)模型的拟合值,则$\hat{x}^{(0)}(k)=\lambda a^k$.

证明　DADGM(1,1)模型的参数(β_1,β_2)解为

$$\beta_1=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)x^{(\zeta)}(k)-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k)\Big)\Big/\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(\zeta)}(k))^2-\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k)\Big)^2\Big),$$

$$\beta_2=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)-\beta_1\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k)\Big).$$

令

$$M_1=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)x^{(\zeta)}(k),$$

$$M_2=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k),$$

$$M_3=\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(\zeta)}(k))^2,$$

$$M_4=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k)\Big)^2,$$

有$\beta_1=\dfrac{(n-1)M_1-M_2}{(n-1)M_3-M_4}$,而

$$x^{(\zeta)}(k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{(0)}(i)}{\zeta^{i-1}}=\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^k\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}},$$

可以得到

$$M_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k+1}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}},$$

$$M_2=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k+1}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big)\times\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big),$$

$$M_3=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big)^2,$$

$$M_4=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda a\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big)^2,$$

$$(n-1)M_1-M_2=\frac{a^2\lambda^2}{\Big(1-\dfrac{a}{\zeta}\Big)^2}\Big(\frac{a}{\zeta}\Big)^3\frac{\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\cdot\Big((n-1)\frac{1+\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}}{1+\dfrac{a}{\zeta}}-\frac{1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big).$$

$$(n-1)M_3-M_4=\frac{a^2\lambda^2}{\Big(1-\dfrac{a}{\zeta}\Big)^2}\Big(\frac{a}{\zeta}\Big)^2\frac{\Big(1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}\Big)}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\cdot\Big((n-1)\frac{1+\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}}{1+\dfrac{a}{\zeta}}-\frac{1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{n-1}}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\Big).$$

则$\beta_1=\dfrac{(n-1)M_1-M_2}{(n-1)M_3-M_4}=\dfrac{a}{\zeta}$,所以

$$\beta_2=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k+1)-\beta_1\sum_{k=1}^{n-1}x^{(\zeta)}(k)\Big)=\frac{1}{n-1}\frac{\lambda a}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(1-\frac{a}{\zeta}\Big)=\lambda a.$$

根据DADGM(1,1)模型的时间响应函数(7)可得

$$\hat{x}^{(\zeta)}(k)=\beta_1^{k-1}x^{(0)}(1)+\frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1}\beta_2=\Big(\frac{a}{\zeta}\Big)^{k-1}\lambda a+\frac{1-\Big(\dfrac{a}{\zeta}\Big)^{k-1}}{1-\dfrac{a}{\zeta}}\lambda a=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda a^i}{\zeta^{i-1}},$$

所以

$$\hat{x}^{(0)}(k)=(\hat{x}^{(\zeta)}(k)-\hat{x}^{(\zeta)}(k-1))\zeta^{k-1}=\lambda a^k.\quad\square$$

定理3表明,当原始数据序列满足纯指数增长规律时,拟合序列和原始序列完全相等, DADGM (1,1)模型对纯指数序列拟合具有无偏性,可以完全拟合,故提出的DADGM (1,1)模型更加适用于近似指数规律的原始数据序列.

3　模型评价及阻尼累加参数选取

3.1　评价指标

平均绝对百分比误差(MAPE)是判断模型优劣的常用指标之一,其计算公式如下:

$$\text{MAPE}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)}\times 100\%. \quad (13)$$

其中: $x^{(0)}(k)$ 为实际值, $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为对应的预测值.

3.2 阻尼累加参数选取

DADGM(1, 1) 模型中阻尼参数的选取对于模型的拟合和预测效果具有重要影响. 为获得最优的阻尼参数 ζ, 可建立如下约束优化问题:

$$\begin{aligned}
&\min_{\zeta}\text{MAPE}(\zeta).\\
&\text{s.t. } 0<\zeta\leqslant 1;\\
&\quad [\beta_1,\beta_2]^{\rm T}=(B^{\rm T}B)^{-1}B^{\rm T}Y;\\
&\quad \hat{x}^{(0)}(k)=(\hat{x}_{DAD}^{(\zeta)}(k)-\hat{x}_{DAD}^{(\zeta)}(k-1))\zeta^{k-1},\\
&\quad k=2,3,\ldots,n. \qquad (14)
\end{aligned}$$

考虑上述优化问题是非线性和不可微的, 本文使用量子粒子群优化 (QPSO) 算法来求得关于式 (14) 的最佳阻尼参数. 相比于传统的粒子群优化 (PSO) 算法, QPSO 算法收敛速度更快, 算法的具体实现代码见文献 [7] 中 Appendix A. DADGM (1,1) 模型的求解步骤可总结如下:

1) 输入初始序列 $X^{(0)}$, 设置初始阻尼参数 ζ 和 QPSO 算法的最大迭代次数;

2) 计算 ζ 阶阻尼累加生成序列 $X^{(\zeta)}$;

3) 根据式 (6) 求得参数 $[\beta_1,\beta_2]^{\rm T}$;

4) 将参数 β_1 和 β_2 代入式 (7) 求得 $\hat{X}^{(\zeta)}$, 根据式 (8) 得到拟合值序列 $\hat{X}^{(0)}$;

5) 用 QPSO 算法求解优化问题 (14), 获得局部最优阻尼参数 ζ;

6) 重复步骤 2)～步骤 5) 获得全局最优阻尼参数 ζ 和其对应的拟合预测序列 $\hat{X}^{(0)}$.

上述约束优化问题中的约束条件 ζ 的取值范围即 QPSO 算法粒子的取值范围, 在实际使用时, 可以在 0 到 1 之间调整优化模型中 ζ 的取值范围, 提高算法参数选择效率, 避免阻尼参数过小导致原始数据序列的前面部分数据失效, 充分考虑所有信息.

4 案例分析

根据 DADGM (1,1) 模型的适用范围, 本文优选了两个实际案例进行分析.

4.1 案 例 1

以文献 [18] 中实例为例, 数据为中国国家统计局网站提供的重庆市 (2010～2016) 年度汽油消费. 经过计算原始数据的增长率序列 $u(k)=(-0.0023, 0.1180, 0.1233, 0.1010, 0.0954)$, 在实际生活中, 增长率并不一定保持定值, 例如本例中 2012 年～2016 年的增长率为 0.1 左右, 但是 2011 年到 2012 年的值几乎相等, 其增长率几乎为 0. 原始数据序列整体呈现上升的趋势, 2012 年～2016 年增长率几乎恒定, 使用该组数据验证本文提出模型对于近似指数规律序列的预测效果, 其中 2010～2015 年共 6 组数据用于建立模型, 2016 年数据用于验证模型预测的准确性, 经典 GM(1, 1) 模型、离散 GM(1, 1) 模型、阻尼累加 GM(1, 1) 模型和新模型的拟合和预测结果见表 1, 由 QPSO 算法得到的 DAGM(1, 1) 模型和 DADGM(1, 1) 模型的最优阻尼累加参数分别为 0.9517 和 0.8189.

表 1 2010-2016 年重庆市年度汽油消费拟合和预测结果

年份	原始数据	GM (1,1)		DGM (1,1)		DAGM (1,1)		DADGM (1,1)	
	$x^{(0)}$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$
2010	102.63	102.63	0.00	102.63	0.00	102.63	0.00	102.63	0.00
2011	144.97	137.81	4.94	137.98	4.82	137.04	5.47	135.34	6.64
2012	144.63	150.81	4.28	150.97	4.39	150.19	3.85	148.96	2.99
2013	161.70	165.04	2.06	165.19	2.16	164.61	1.80	163.95	1.39
2014	181.64	180.61	0.57	180.74	0.49	180.41	0.68	180.44	0.66
2015	199.98	197.64	1.17	197.76	1.11	197.72	1.13	198.60	0.69
2016	219.05	216.28	1.26	216.39	1.22	216.70	1.07	218.58	0.21
拟合MAPE		2.17		2.16		2.15		2.06	
预测MAPE		1.26		1.22		1.07		0.21	

由表 1 可以看出, 对于 GM (1, 1) 模型、DGM (1, 1) 模型、DAGM (1, 1) 模型和 DADGM (1, 1) 模型, 评价指标拟合 MAPE 和预测 MAPE 都呈现依次下降的趋势, 说明加入阻尼累加生成算子和借鉴离散 GM (1, 1) 模型的思想可以有效提高模型精度, 而这其中 DADGM (1, 1) 模型的拟合 MAPE 和预测 MAPE 最低,

分别为2.06 %和0.21 %.

4.2 案 例 2

案例2选用文献[19]中的材料抗拉强度实验数据, 该原始数据序列呈现单调递减的趋势, 其中前6组数据用于建立模型, 后两组数据用于验证模型预测的准确性, 通过QPSO算法得到DAGM(1, 1)模型和DADGM(1, 1)模型的最优阻尼累加参数分别为0.843 6和0.614 9.

由表2可以看出, DADGM(1, 1)模型的拟合和预测精度最高, 其中拟合MAPE为0.33 %, 小于GM(1, 1)模型的0.38 %、DGM(1, 1)模型的0.37 %, DAGM(1, 1)模型的0.34 %; 预测MAPE为0.22 %, 小于GM(1, 1)模型的0.78 %、DGM(1, 1)模型的0.75 %、DAGM(1, 1)模型的0.45 %.

表 2　材料抗拉强度拟合和预测结果

实验次数	原始数据	GM(1,1)		DGM(1,1)		DAGM(1,1)		DADGM(1,1)	
	$x^{(0)}$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$	$\hat{x}^{(0)}$	$\hat{\Delta}_k/\%$
1	1 931	1 931.0	0.00	1 931.0	0.00	1 931.0	0.00	1 931.0	0.00
2	1 724	1 715.1	0.52	1 717.0	3.22	1 713.7	0.60	1 709.1	0.86
3	1 517	1 522.7	0.38	1 524.2	0.81	1 522.7	0.37	1 519.9	0.19
4	1 345	1 351.9	0.51	1 353.0	0.19	1 352.9	0.59	1 351.6	0.49
5	1 207	1 200.3	0.55	1 201.1	4.48	1 202.1	0.41	1 202.0	0.41
6	1 069	1 065.7	0.31	1 066.2	3.22	1 068.0	0.09	1 069.0	0.00
7	952	946.15	0.61	946.52	0.58	948.96	0.32	951.65	0.14
8	848	840.04	0.94	840.24	0.91	843.16	0.57	845.42	0.30
拟合MAPE		0.38		0.37		0.34		0.33	
预测MAPE		0.78		0.75		0.45		0.22	

综合案例1和案例2, 相较于另外3种比较模型, DADGM(1,1)的拟合和预测精度都有更优的表现, 尤其是预测效果有明显的提升.

5 结　论

本文基于阻尼累加生成算子和离散灰色模型的思想, 建立了阻尼累加离散GM(1, 1)模型. 新的模型参数和时间响应函数均基于离散方程, 从而避免了DAGM(1, 1)模型建模过程中从离散形式到连续形式的转换误差. DADGM(1, 1)模型在一定条件下与经典GM(1, 1)模型、离散GM(1, 1)模型和DAGM(1, 1)模型具有等价性, 通过矩阵扰动理论证明了模型更加适用于小样本建模, 而对于可能出现的矩阵病态性问题, 通过数乘变化法, 可以在不改变模拟精度的情况下解决病态问题, 提高了模型的稳定性和适用性. 最后的两个优选实际案例应用表明, 本文提出的DADGM(1,1)模型有效提高了拟合和预测性能.

此外, 随着大数据时代的到来, 仍然可能会遇到样本不足、历史数据有限的情形, 本文模型适合决策者在只能利用有限的历史数据的情况下进行准确预测, 克服数据有限的问题. 而针对现在大数据环境下的数据非线性及影响因素复杂的问题, 未来的进一步研究可将本模型与神经网络结合, 既发挥了本模型新信息优先、小样本建模、稳定性高等优势, 又利用神经网络的非线性映射和自主学习能力, 充分考虑各种影响因素, 提高模型的预测精度和实用性.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第7版. 北京: 科学出版社, 2014: 1-5.
(Liu S F, Yang Y J, Wu L F, et al. Grey system theory and its application [M]. The 7th edition. Beijing: Science Press, 2014: 1-5.)

[2] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.

[3] 周伟杰, 张宏如, 党耀国, 等. 新息优先累加灰色离散模型的构建及应用[J]. 中国管理科学, 2017, 25(8): 140-148.
(Zhou W J, Zhang H R, Dang Y G, et al. New information priority accumulated grey discrete model and its application[J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(8): 140-148.)

[4] Xiao X P, Yang J W, Mao S H, et al. An improved seasonal rolling grey forecasting model using a cycle truncation accumulated generating operation for traffic flow[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 51: 386-404.

[5] 丁松, 党耀国, 徐宁, 等. 近似非齐次指数递减序列NGOM(1, 1)模型的构建与优化[J]. 控制与决策, 2017, 32(8): 1457-1464.
(Ding S, Dang Y G, Xu N, et al. Modeling and

optimizing the grey model NGOM(1, 1) for the approximation non-homogenous decreasing series[J]. Control and Decision, 2017, 32(8): 1457-1464.)
[6] 江建明. 基于平均季节指数的分数阶非线性灰色Bernoulli模型构造及应用[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(20): 46-52.
(Jiang J M. Construction and application of fractional nonlinear grey bernoulli model based on average seasonal index[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(20): 46-52.)
[7] Shen Q Q, Shi Q, Tang T P, et al. A novel weighted fractional GM(1,1) model and its applications[J]. Complexity, 2020, 2020: 1-20.
[8] Carmona Benítez R B, Carmona Paredes R B, Lodewijks G, et al. Damp trend grey model forecasting method for airline industry[J]. Expert Systems with Applications, 2013, 40(12): 4915-4921.
[9] Liu L Y, Chen Y, Wu L F. The damping accumulated grey model and its application[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021, 95: 105665.
[10] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)
[11] 王俊芳, 罗党. 振荡序列的分数阶离散GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(1): 176-180.
(Wang J F, Luo D. Fractional order discrete grey GM(1,1) power model based on oscillation sequences and its application[J]. Control and Decision, 2017, 32(1): 176-180.)
[12] 孟伟, 曾波. 基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1903-1907.
(Meng W, Zeng B. Discrete grey model with inverse fractional operators and optimized order[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1903-1907.)
[13] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1,1)模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 501-508.
(Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic models of GM(1,1)and their applicable bound[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508.)
[14] 苏先娜, 谢富纪. DGM(1,1)模型的特性及其在技术创新领域中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 635-641.
(Su X N, Xie F J. The properties of model DGM(1,1) and its application in technology innovation[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(3): 635-641.)
[15] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1822-1827.
(Wu L F, Liu S F, Yao L G. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(7): 1822-1827.)
[16] 姚天祥, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型的特性与优化[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 142-148.
(Yao T X, Liu S F. Characteristics and optimization of discrete GM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(3): 142-148.)
[17] 姚天祥, 刘思峰. 改进的离散灰色预测模型[J]. 系统工程, 2007, 25(9): 103-106.
(Yao T X, Liu S F. Improvement of a forecasting discrete GM(1,1)[J]. Systems Engineering, 2007, 25(9): 103-106.)
[18] Zhang L X, Cai Y B. A fractional discrete grey model with particle swarm optimizer and its applications in forecasting the gasoline consumption in Chongqing China[J]. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 2021: 54-61.
[19] Wu W Z, Jiang J M, Li Q. A novel discrete grey model and its application[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 1-6.

作者简介

曹阳(1986−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与预测、科学计算、智能信息处理等研究, E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn;

梁爽(1996−), 男, 硕士生, 从事智能信息处理的研究, E-mail: ls103196@163.com;

沈琴琴(1984−), 女, 高级实验师, 博士, 从事灰色系统理论与预测、智能交通等研究, E-mail: shenqq@ntu.edu.cn;

施佺(1973−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理等研究, E-mail: sq@ntu.edu.cn.