

控制与决策

Control and Decision

疫情沿交通工具跨区域扩散建模及最优控制

蒋杰辉, 盛典, 杨鹏

引用本文:

蒋杰辉, 盛典, 杨鹏. 疫情沿交通工具跨区域扩散建模及最优控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(6): 1695–1702.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1958>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

数据驱动的突发疫情传染扩散参数动态更新策略

A dynamic design strategy of epidemic spreading parameters based on data driven

控制与决策. 2023, 38(2): 555–561 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1028>

COVID-19疫情下定点收治医院动态选址-分配优化

Dynamic location-allocation optimization for designated hospitals under the COVID-19 Epidemic

控制与决策. 2023, 38(6): 1533–1540 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1722>

新冠肺炎传播动力学建模及预测

Nonlinear dynamics modeling and epidemic forecast of COVID-19

控制与决策. 2023, 38(3): 699–705 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1092>

一类具有饱和发生率的时滞恶意病毒传播模型的分岔控制策略

Bifurcation control strategy of malicious virus spreading model with time delays and saturated incidence rate

控制与决策. 2022, 37(7): 1903–1908 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1712>

考虑效率和公平的跨区域协同应急救援路径选择

Routing optimization of cross-regional collaborative emergency rescue considering efficiency and fairness

控制与决策. 2021, 36(2): 483–490 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0919>

疫情沿交通工具跨区域扩散建模及最优控制

蒋杰辉¹, 盛典^{2†}, 杨鹏¹

(1. 湖南财政经济学院 工商管理学院, 长沙 410205; 2. 华中科技大学 管理学院, 武汉 430074)

摘要: 交通运输系统在服务民众的同时也为疫情沿跨区域传播扩散提供了载体. 鉴于此, 研究疫情沿多种交通工具跨区域扩散模型及最优控制问题. 考虑人口空间状态、迁徙过程、疫情状态和交通工具特征, 构建多区域迁徙-疫情扩散耦合动力学方程, 并分析其扩散性质. 综合考虑应急资源的有限性, 进一步建立基于本地与迁徙隔离政策的动态最优控制模型. 数值计算对比分析不同管控策略组合下疫情的扩散速度与范围, 验证疫情扩散模型和最优控制策略的有效性. 结果表明: 疫情可以借助交通工具快速扩散; 仅对单一交通工具实施管控措施可以快速降低疫情跨区域扩散的速度, 但对均衡状态的扩散范围影响小.

关键词: 疫情扩散; 多区域; 动力学方程; 交通工具; 应急资源; 最优控制

中图分类号: O232 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1958

引用格式: 蒋杰辉, 盛典, 杨鹏. 疫情沿交通工具跨区域扩散建模及最优控制 [J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1695-1702.

Multi-regional epidemic spreading in transportation network: Modelling and optimal control strategies

JIANG Jie-hui¹, SHENG Dian^{2†}, YANG Peng¹

(1. School of Business Administration, Hunan University of Finance and Economics, Changsha 410205, China; 2. School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Transportation systems facilitate the spread of pandemics across regions. This paper studies the modeling and optimal control of epidemic spreading with inter-city travel by train and bus. Considering the population spatial status, migration process, epidemic status and transport modes, a multi-regional migration-epidemic diffusion model is established by using dynamic equations, and the diffusion properties are analyzed. With the limited emergency resources, a dynamic optimal control model considering local and migration isolation strategies is also developed. Numerical examples are given to compare the spread speed and scope of the epidemic under different control strategies, which verify the effectiveness of the proposed optimal control strategies. The results demonstrate that the epidemic can spread rapidly via the transportation system. Implementing a control strategy for the certain type of transportation modes can quickly reduce the speed of cross-regional diffusion, but has little impact on the diffusion scope of the equilibrium state.

Keywords: epidemic spreading; multi-region; dynamic equation; transportation modes; emergency resources; optimal control

0 引言

不断完善交通系统在提升居民出行的同时也加大了疫情通过交通运输环境传播的风险^[1]. 一方面, 公共交通系统客流量大、内部环境封闭、乘客近距离接触时间长等特点非常有利于呼吸道传染病在交通工具内接触传播; 另一方面, 不同起讫点的乘客加速了疫情在沿线站点区域的扩散速度和范围. 以

肆虐全球的 COVID-19 为例, 截至 2021 年 11 月, 已有 2 亿多人感染. 如此迅速扩散的疫情与高密度和长距离迁徙的人口及其所借助的交通工具密切相关^[2]. 交通系统加速突发疫情的扩散并可能造成严重后果, 但其在疫情扩散中的影响程度以及人口迁徙和疾病传播之间的耦合关系尚不明确.

疫情扩散研究始于 20 世纪初, Ross^[3] 使用非

收稿日期: 2021-11-11; 录用日期: 2022-03-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72204078, 72271103); 国家社会科学基金项目(20BJY066).

责任编辑: 李登峰.

†通讯作者. E-mail: dianshenghust@gmail.com.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

线性常微分方程建立了易感染-感染 (susceptible-infectious, SI) 模型. 该模型将人群分为易感染的 (S) 和感染的 (I) 两类群体, 并刻画了这两类群体随时间变化的动力学微分方程. 随后, 研究学者们考虑康复的 (recovered, R)、潜伏的 (exposed, E) 和隔离的 (quarantine, Q) 等更现实的疫情特征将 SI 模型拓展为 SIR 模型^[4]、SEIR 模型^[5] 和 SEIQR 模型^[6] 等, 并对这些模型的性态以及稳定点的存在性进行了深入的研究. 虽然这些分类模型很好地捕捉了疫情的扩散状态, 但该类方法假设个体是同质的并且不同群体之间的人群是完全混合接触的. 因此, 该类模型可能无法刻画现实中疫情的扩散方式、人群的迁徙特性以及接触载体. 为此, 一些学者们进一步研究了考虑个体的异质性^[7]、跨区域迁徙特征^[8] 以及载体类型^[9] 等现实特征的多层耦合扩散模型. 虽然这些工作探讨了疫情动力学与个体迁徙网络之间的耦合关系, 但多层网络模型无法同时刻画疫情在人群密集的交通工具体内以及沿交通线路的跨区域耦合扩散.

交通工具是疫情跨区域扩散的重要媒介^[10]. 早期的研究主要从定性方面探讨了交通工具与疫情扩散之间的耦合关系, 并指出疫情可沿运输线路快速扩散且不同交通工具的扩散速度不同^[11], 而疫情扩散初期严格控制交通工具的客流量, 可以快速抑制疫情跨区域扩散^[12]. 近期, 贾兴利等^[13] 研究了单一城市的疫情扩散模型, 并分析了人口及交通限行管制措施对疫情阻断的影响. 张宇等^[14] 建立了疫情沿交通线路跨区域扩散动力学模型, 分析 COVID-19 通过交通工具的扩散机制并提出了一些阻断政策建议. Qian 等^[15] 将疫情扩散模型嵌入到人口迁徙动力学模型中, 提出了带有迁徙感染的时空疫情扩散模型, 该模型明确地刻画了交通工具内和城市中的疫情扩散. 虽然这些研究从不同视角将人口空间状态、迁徙过程、疫情状态和交通工具等特征有机地融入疫情扩散动力学模型中, 但未考虑应急资源的有限性及其定量动态最优控制策略研究. 鉴于此, 本文对考虑出行方式的跨区域疫情扩散机制进行定量建模, 并进一步探讨有限应急资源下遏制疫情扩散的最优动态控制问题, 为疫情防控及应急管理提供一定的理论支撑和决策依据.

1 考虑交通工具的疫情扩散模型

考虑一种通过人与人接触传播的突发重大传染病, 它发生在某个国家内多个行政区划紧邻的城市 (包括其行政管辖范围内的城区、郊区和农村等) 且城市之间通过完善的交通系统连接. 在这种情况下,

个体乘坐交通工具在不同城市之间的迁徙/旅行活动对疫情从一个城市跨区域传播到其他城市起一定作用. 为便于建立疫情沿交通工具跨区域扩散的动力学模型, 作以下假设:

1) 空间状态. 令研究区域由 $|\Omega|$ 个城市组成, 居住在城市 $i \in \Omega$ 内的总居民 (N_i^P) 分为活跃/居住在该市的户籍居民 (N_{ii}) 和非户籍居民/外来人口 ($\sum_{j \in \Omega, j \neq i} N_{ji}$) 两类. 城市 $i \in \Omega$ 的总户籍居民 (N_i^T) 分为 $i \in \Omega$ 市户籍的居民当前活跃在 i 市 (N_{ii})、前往 $j (j \neq i)$ 市的途中 ($N_{i\bar{j}}$)、从 j 市返回的途中 ($N_{i\bar{j}}$) 和活跃在 j 市 (N_{ij}) 四个部分, 其中后3项的总和又称为 $i \in \Omega$ 市的外出居民. 则 i 市的总居民 (N_i^P) 和总户籍居民 (N_i^T) 分别为

$$N_i^P = N_{ii} + \sum_{j \in \Omega, j \neq i} N_{ji}, \quad (1)$$

$$N_i^T = N_{ii} + \sum_{j \in \Omega, j \neq i} (N_{i\bar{j}} + N_{i\bar{j}} + N_{ij}). \quad (2)$$

式 (1) 和 (2) 均包含当前居住在 i 市的户籍居民 (N_{ii}). 式 (1) 的第 2 部分表示居住在 i 市的外来居民, 式 (2) 的第 2 部分表示居住在 i 市的外出居民. 式 (1) 用于后续计算本地感染, 式 (2) 用于计算出生人口.

2) 迁徙过程. 如图 1 所示, 在人口迁徙方面, 分为 4 个过程: 1) 离开户籍地即将外出, i 市活跃户籍居民 (N_{ii}) 离开户籍地前往其他城市进行工作或娱乐等日常活动的速率为 (g_i), 且其中前往 j 市的比例为 θ_{ij} ; 2) 使用交通工具外出途中, 在前往 j 市途中的迁徙人口 ($N_{i\bar{j}}$) 以速率 $\alpha_{i\bar{j}}$ 即将到达 j 市开展活动; 3) 离开目的地即将返回, 在 j 市活跃外来人口 (N_{ij}) 以速率 r_{ij} 离开 j 市准备返回户籍地; 4) 使用交通工具返回途中, 从 j 市返回途中的迁徙人口 ($N_{i\bar{j}}$) 以速率 $\alpha_{i\bar{j}}$ 即将返回户籍地.

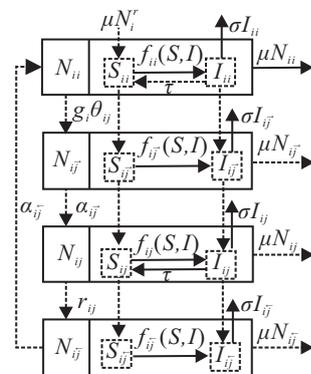


图 1 疫情扩散状态转移示意图

3) 疫情状态. 在疫情传播方面, 采用经典的 SIS 疾病传播模型^[16] 将居民是否感染分为易感染者 (S) 和感染者 (I) 两类. 如图 1 所示, 结合人口迁移状态, 令

S_{ii} 、 S_{ij} 、 $S_{i\bar{j}}$ 和 S_{ij} 分别为 t 时刻 i 市户籍居民活跃在 i 市、前往 $j(j \neq i)$ 市的途中、从 j 市返回的途中和活跃在 j 市的易感染者人数; 令 I_{ii} 、 I_{ij} 、 $I_{i\bar{j}}$ 和 I_{ij} 分别为 t 时刻 i 市活跃户籍居民在 i 市、前往 j 市的途中、从 j 市返回的途中和活跃在 j 市的感染者人数。

4) 接触风险: 考虑城市内活动的接触感染和使用交通工具跨城市迁徙接触感染两类情况。在 i 市内接触方面, 令 S_{ii} 与 $I_{ji}(\forall j \in \Omega)$ 的预期接触比例为 λ_i , 并以 β_i 的概率转化为感染者。令 M 为跨城市所使用的交通工具, 例如汽车、火车等。令 c_{ij}^m 为 i 市与 j 市之间选择交通工具 $m \in M$ 的比例。令 $\lambda_{ij,kl}^m$ 为从 i 市到 j 市的 $S_{i\bar{j}}$ 遇到使用同种交通工具 $m \in M$ 从 k 市至 l 市的 I_{kl} 的预期接触比例, 并以概率 β_m 转化为感染者。活跃在各城市的感染者以 τ 的康复率并再次成为易感染者, 令无疫情状态下的人口死亡率和出生率同为 μ , 疫情致死率为 σ 。

根据上述假设, 构建以下城市 $i(i \in \Omega)$ 的疫情扩散模型:

$$\frac{dS_{ii}^{t+1}}{dt} = \sum_{j \in \Omega \setminus \{i\}} \alpha_{ij} S_{i\bar{j}} - g_i S_{ii} - f_{ii}(S, I) + (\mu N_i^r - \mu S_{ii} + \tau I_{ii}); \quad (3)$$

$$\frac{dS_{ij}^{t+1}}{dt} = g_i \theta_{ij} S_{ii} - \alpha_{ij} S_{i\bar{j}} - f_{ij}(S, I) - \mu S_{ij}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \quad (4)$$

$$\frac{dS_{i\bar{j}}^{t+1}}{dt} = \alpha_{ij} S_{i\bar{j}} - r_{ij} S_{ij} - f_{ij}(S, I) + (\tau I_{ij} - \mu S_{i\bar{j}}), \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \quad (5)$$

$$\frac{dS_{i\bar{j}}^{t+1}}{dt} = r_{ij} S_{ij} - \alpha_{ij} S_{i\bar{j}} - f_{i\bar{j}}(S, I) - \mu S_{i\bar{j}}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \quad (6)$$

$$\frac{dI_{ii}^{t+1}}{dt} = \sum_{j \in \Omega \setminus \{i\}} \alpha_{ij} I_{i\bar{j}} - g_i I_{ii} + f_{ii}(S, I) - (\mu + \tau + \sigma) I_{ii}; \quad (7)$$

$$\frac{dI_{ij}^{t+1}}{dt} = g_i \theta_{ij} I_{ii} - \alpha_{ij} I_{i\bar{j}} + f_{ij}(S, I) - (\mu + \sigma) I_{ij}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \quad (8)$$

$$\frac{dI_{ij}^{t+1}}{dt} = \alpha_{ij} I_{i\bar{j}} - r_{ij} I_{ij} + f_{ij}(S, I) - (\tau + \mu + \sigma) I_{ij}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \quad (9)$$

$$\frac{dI_{i\bar{j}}^{t+1}}{dt} = r_{ij} I_{ij} - \alpha_{ij} I_{i\bar{j}} + f_{i\bar{j}}(S, I) - (\mu + \sigma) I_{i\bar{j}}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}. \quad (10)$$

其中: $f_{ii}(S, I)$ 、 $f_{ij}(S, I)$ 、 $f_{i\bar{j}}(S, I)$ 和 $f_{i\bar{j}}(S, I)$ 分别代表不同活跃状态对应的疫情感染风险, 表示如下:

$$f_{ii}(S, I) = \beta_i \lambda_i S_{ii} (1 - \kappa_i^t) \left(\sum_{j \in \Omega} I_{ji} \right) / N_i^p, \quad (11)$$

$$f_{ij}(S, I) = \beta_j \lambda_j S_{ij} (1 - \kappa_j^t) \left(\sum_{i \in \Omega} I_{ij} \right) / N_j^p, \quad (12)$$

$$f_{i\bar{j}}(S, I) = \sum_{m \in M} \sum_{k \in \Omega \setminus \{i\}} \sum_{l \in \Omega} c_{ij}^m \beta_m S_{i\bar{j}} \left(\frac{\lambda_{ij,kl}^m I_{kl}}{N_{kl}} + \frac{\lambda_{ij,kl}^m I_{kl}}{N_{kl}} \right), \quad (13)$$

$$f_{i\bar{j}}(S, I) = \sum_{m \in M} \sum_{k \in \Omega \setminus \{i\}} \sum_{l \in \Omega} c_{ij}^m \beta_m S_{i\bar{j}} \left(\frac{\lambda_{ij,kl}^m I_{kl}}{N_{kl}} + \frac{\lambda_{ij,kl}^m I_{kl}}{N_{kl}} \right). \quad (14)$$

式(3)~(10)分别对应 S_{ii} 、 S_{ij} 、 $S_{i\bar{j}}$ 、 S_{ij} 、 I_{ii} 、 I_{ij} 、 $I_{i\bar{j}}$ 和 I_{ij} 八类迁徙-疾病群体随时间变化的动力学方程。总体而言, 每个等式右边包含4部分: 迁徙流入人数、迁徙流出人数、接触感染人数和出生与死亡及康复人数。以式(3)为例, 等式右边的第1项为 t 时刻从其他城市返回户籍地 $i \in \Omega$ 的总易感染人数; 第2项为 t 时刻离开户籍地 i 的总易感染人数; 第3项为 t 时刻户籍地 i 的易感染户籍居民接触感染者后转化为感染者的总人数; 第4项为 t 时刻户籍地 i 的出生与死亡及康复的总易感染人数, 包含出生户籍人口、死亡人口和疫情康复人口。考虑到在无疫情状态, i 市户籍居民的出生人口归类到其户籍地, 将 i 市户籍居民的出生人口加入到本地易感染居民 (S_{ii}) 中。此外, 由于城际之间的迁徙所用时间较短, 不考虑迁徙过程(式(8)和(10))中感染群体 I_{ij} 和 $I_{i\bar{j}}$ 分别康复为 S_{ij} 和 $S_{i\bar{j}}$ 。在市内扩散方面, 式(11)表示 i 市的易感染者与本地感染者及其他城市流入的感染者互相接触而感染的人数。同理, 式(12)表示 i 市活跃到 j 市的易感染者与 j 市的总感染者互相接触而感染的人数。在迁徙途中扩散方面, 式(13)和(14)分别表示从 i 市到 j 市的去程和回程易感染者与所有在途感染者接触而感染的人数。

定理1 系统(3)~(10)的可行解在域 $\mathbf{R}_+^{2(3|\Omega|-2)}$ 内有界。

定理2 系统(3)~(10)有两类稳定点: 无疫情稳定点和有疫情稳定点。

推论1 若系统(3)~(10)处于无疫情稳定状态, 则 i 市关联的迁徙城市及迁徙途径处于无疫情状态。

推论2 若系统(3)~(10)处于疫情爆发稳定状态, 则 i 市关联的迁徙城市可能会爆发疫情。

推论3 当系统(3)~(10)处于稳定状态时, 若在

i 市的出市人群中检测有感染者,则 i 市处于疫情爆发状态;若在 i 市的入市人群中检测有感染者,则与该感染者同乘交通工具的人群所在城市至少有一个城市处于疫情爆发状态.

易得,疫情的扩散速度和范围与该市的疫情状态、往来迁徙城市的状态以及迁徙所使用的交通工具有关.若在使用某交通工具的在途人群中检测出感染者,则意味着该途径涉及的城市面临被入侵而爆发疫情的风险;只有在所有城市及在途人群都无感染者时,该疫情才有可能消失.上述疫情扩散动力学模型刻画了疫情在多城市之间沿交通工具扩散的机理,但需进一步运用控制理论分析如何在有限应急资源环境下实现最优的控制策略.

2 疫情扩散的最优控制策略模型

文中 i 市可采取对该市内的感染者实施隔离及对城市间的移动感染者实施出/入市检查拦截两种管控策略,以最小化该市 T 个周期内未受隔离的感染者总数.令 κ_i^t 表示 t 时刻 $i \in \Omega$ 市对本地户籍居民和外来居民感染者的隔离率;令 $\omega_i^{m,t}$ 表示 t 时刻对使用交通工具 $m \in M$ 即将进入和离开 i 市的迁徙感染者的拦截率.令隔离群体 Q_{ii} 和 Q_{ji} 分别表示 t 时刻在 i 市隔离的本地户籍感染人数和来自城市 $j \in \Omega \setminus \{i\}$ 的感染人数.通过上述隔离和拦截措施,原扩散模型(3)~(14)需做以下两方面调整:

1) 疫情感染风险,式(11)~式(14)分别调整为

$$f_{ii}(S, I) = \beta_i \lambda_i S_{ii} (1 - \kappa_i^t) \left(\sum_{j \in \Omega} I_{ji} \right) / N_i^p, \quad (15)$$

$$f_{ij}(S, I) = \beta_j \lambda_j S_{ij} (1 - \kappa_j^t) \left(\sum_{i \in \Omega} I_{ij} \right) / N_j^p, \quad (16)$$

$$f_{i\bar{j}}(S, I) = \sum_{m \in M} c_{ij}^m \beta_m S_{i\bar{j}} \left[\sum_{k \in \Omega \setminus \{l\}} \sum_{l \in \Omega} \frac{(1 - \omega_k^{m,t}) \lambda_{i\bar{j}, \bar{k}l}^m I_{\bar{k}l}}{N_{\bar{k}l}} + \sum_{k \in \Omega \setminus \{l\}} \sum_{l \in \Omega} \frac{(1 - \omega_l^{m,t}) \lambda_{i\bar{j}, \bar{l}k}^m I_{\bar{l}k}}{N_{\bar{l}k}} \right], \quad (17)$$

$$f_{i\leftarrow j}(S, I) = \sum_{m \in M} c_{ij}^m \beta_m S_{i\leftarrow j} \left[\sum_{k \in \Omega \setminus \{l\}} \sum_{l \in \Omega} \frac{(1 - \omega_l^{m,t}) \lambda_{i\leftarrow j, \bar{l}k}^m I_{\bar{l}k}}{N_{\bar{l}k}} + \sum_{k \in \Omega \setminus \{l\}} \sum_{l \in \Omega} \frac{(1 - \omega_k^{m,t}) \lambda_{i\leftarrow j, \bar{k}l}^m I_{\bar{k}l}}{N_{\bar{k}l}} \right]. \quad (18)$$

式(15)和(16)表示城市内的隔离措施使感染风险降低,因此使用 $(1 - \kappa_i^t)$ 和 $(1 - \kappa_j^t)$ 分别降低城市 i 和城市 j 的感染风险/力度.同理,式(17)和(18)表示通过

拦截不同交通工具的迁徙感染者而减少区域间扩散风险.

2) 动态方程.式(7)~(10)分别调整如下:增加隔离群体 Q_{ii} 和 Q_{ji} 的随时间变化的动力学方程式如下:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ii}^{t+1}}{dt} = & \sum_{j \in \Omega \setminus \{i\}} \left(1 - \sum_{m \in M} \omega_i^{m,t} c_{ij}^m \right) \alpha_{i\leftarrow j} I_{i\leftarrow j} - \\ & g_i I_{ii} + f_{ii}(S, I) - (\mu + \tau + \sigma + \kappa_i^t) I_{ii}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{i\bar{j}}^{t+1}}{dt} = & \left(1 - \sum_{m \in M} \omega_i^{m,t} c_{ij}^m \right) g_i \theta_{ij} I_{ii} - \alpha_{i\bar{j}} I_{i\bar{j}} + \\ & f_{i\bar{j}}(S, I) - (\mu + \sigma) I_{i\bar{j}}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ij}^{t+1}}{dt} = & \left(1 - \sum_{m \in M} \omega_j^{m,t} c_{ij}^m \right) \alpha_{i\bar{j}} I_{i\bar{j}} + f_{ij}(S, I) - \\ & (\tau + \mu + \sigma + \kappa_j^t) I_{ij} - r_{ij} I_{ij}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{i\leftarrow j}^{t+1}}{dt} = & \left(1 - \sum_{m \in M} \omega_j^{m,t} c_{ij}^m \right) r_{ij} I_{ij} - \alpha_{i\leftarrow j} I_{i\leftarrow j} + \\ & f_{i\leftarrow j}(S, I) - (\mu + \sigma) I_{i\leftarrow j}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{ii}^{t+1}}{dt} = & \sum_{j \in \Omega \setminus \{i\}} \sum_{m \in M} \omega_i^{m,t} c_{ij}^m \alpha_{i\leftarrow j} I_{i\leftarrow j} + \kappa_i^t I_{ii} + \\ & \sum_{m \in M} \omega_i^{m,t} c_{ij}^m g_i \theta_{ij} I_{ii} - (\mu + \sigma) Q_{ii}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{ij}^{t+1}}{dt} = & \sum_{m \in M} \omega_j^{m,t} c_{ij}^m \alpha_{i\bar{j}} I_{i\bar{j}} - (\mu + \sigma) Q_{ij} + \\ & \sum_{m \in M} \omega_j^{m,t} c_{ij}^m r_{ij} I_{ij} + \kappa_j^t I_{ij}, \quad \forall j \in \Omega \setminus \{i\}. \end{aligned} \quad (24)$$

与式(7)~(10)相比,式(19)~(22)的右端分别减少采取隔离和拦截措施而使对应感染人群降低人数.式(23)和(24)分别表示 i 市的户籍居民因感染而被隔离在 i 市和 j 市的总人数.式(23)右端各项分别表示入城拦截人数、城市内活动隔离人数、出城拦截人数、自然死亡人数和因病死亡人数.

由于最优控制的目标是使得管辖区域内未受隔离的感染人数最小化,可构建如下目标函数:

$$J_i(\boldsymbol{\kappa}_i, \boldsymbol{\omega}_i) = \chi_i \sum_{j \in \Omega} I_{ji}^T + \sum_{t=0}^{T-1} \left(\chi_i \sum_{j \in \Omega} I_{ji}^t + \frac{B_i}{2} (\kappa_i^t)^2 + \sum_{m \in M} \frac{C_i}{2} (\omega_i^{m,t})^2 \right). \quad (25)$$

其中: χ_i 、 B_i 和 C_i 分别为权重值, 代表它们分别在时间 T 内均衡感染者人数和两种控制变量, 并将疫情管控措施与感染人数统一量化为费用/成本; $\boldsymbol{\kappa}_i$ 为 T 维控制向量; $\boldsymbol{\omega}_i$ 为 $T \times |M|$ 维控制向量。

本文利用控制参数的有界性刻画应急资源(比如: 救护车、方舱医院、病房数量等)的有限性, 可得控制参数的可行域分别为

$$U\boldsymbol{\kappa}_i = \{ \kappa_i^t | \kappa_i^{\min} \leq \kappa_i^t \leq \kappa_i^{\max}, t = 0, 1, \dots, T-1 \}. \quad (26)$$

其中: κ_i^{\min} 和 $\omega_i^{m,\min}$ 为控制参数的下界, κ_i^{\max} 和 $\omega_i^{m,\max}$ 为控制参数的上界。例如, $\kappa_i^{\max} = E_n/e_w$ 表示在救护车总数 (E_n) 限制下可最大允许隔离感染人群率, e_w 是单位隔离率所需救护车数。因此, 本文寻找最优控制策略 $\boldsymbol{\kappa}_i^*$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i^*$ 以满足

$$J_i(\boldsymbol{\kappa}_i^*, \boldsymbol{\omega}_i^*) = \min \{ J_i(\boldsymbol{\kappa}_i, \boldsymbol{\omega}_i) | \boldsymbol{\kappa}_i \in U\boldsymbol{\kappa}_i, \boldsymbol{\omega}_i \in U\boldsymbol{\omega}_i \}. \quad (27)$$

定理3 (充分条件) 若动力学方程(3)~(10)的控制问题(25)有最优解, 则最优控制对 $(\boldsymbol{\kappa}_i^*, \boldsymbol{\omega}_i^*)$ 满足 $J_i(\boldsymbol{\kappa}_i^*, \boldsymbol{\omega}_i^*) = \min \{ J_i(\boldsymbol{\kappa}_i, \boldsymbol{\omega}_i) | \boldsymbol{\kappa}_i \in U\boldsymbol{\kappa}_i, \boldsymbol{\omega}_i \in U\boldsymbol{\omega}_i \}$ 。

定理4 (必要条件) 给定最优控制 $(\boldsymbol{\kappa}_i^*, \boldsymbol{\omega}_i^*)$ 和状态 $(S_{ii}^*, S_{ij}^*, S_{ij}^*, S_{ij}^*, I_{ii}^*, I_{ij}^*, I_{ij}^*, I_{ij}^*, Q_{ii}^*, Q_{ij}^*)$, 存在控制问题(25)的伴随变量组 $\xi_{ii}^t, \xi_{ij}^t, \xi_{ij}^t, \xi_{ij}^t, v_{ii}^t, v_{ij}^t, v_{ij}^t, v_{ij}^t, \gamma_{ii}^t, \gamma_{ij}^t, \gamma_{ij}^t, j \in \Omega \setminus \{i\}, t = 1, 2, \dots, T$, 满足

$$\begin{cases} \xi_{ij}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial S_{ij}^t}, \xi_{ij}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial S_{ij}^t}, \\ \xi_{i\leftarrow j}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial S_{ij}^t}, j \in \Omega \setminus \{i\}; \\ v_{ij}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial I_{ij}^t}, v_{ij}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial I_{ij}^t}, \\ v_{i\leftarrow j}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial I_{ij}^t}, j \in \Omega \setminus \{i\}; \\ \xi_{ii}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial S_{ii}^t}, v_{ii}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial I_{ii}^t}, \gamma_{ii}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial Q_{ii}^t}, \\ \gamma_{ij}^t = -\frac{\partial H_i}{\partial Q_{ij}^t}, j \in \Omega \setminus \{i\}. \end{cases}$$

其中: $\xi_{ii}^T = 0, \xi_{ij}^T = 0, \xi_{ij}^T = 0, \xi_{ij}^T = 0, v_{ii}^T = \chi_i, v_{ij}^T = 0, v_{ij}^T = \chi_i, v_{i\leftarrow j}^T = 0, \gamma_{ii}^T = v_{ij}^T = 0, j \in \Omega \setminus \{i\}$ 为横截性条件。

3 数值分析

为分析疫情通过交通工具(火车和汽车)在城际间的扩散机理, 假设初始时刻疫情已在城市1扩散,

而城市2尚处于无疫情情况。

3.1 管控策略分析

在管控策略方面, 分别考虑以下4种情况: 1) 无管控措施, 即 $\boldsymbol{\kappa} = 0, \boldsymbol{\omega} = 0$; 2) 仅对市内感染群体实施隔离, 即 $\boldsymbol{\kappa} \neq 0, \boldsymbol{\omega} = 0$; 3) 仅对城际感染群体实施隔离, 即 $\boldsymbol{\kappa} = 0, \boldsymbol{\omega} \neq 0$; 4) 对市内和城际感染群体都实施隔离, 即 $\boldsymbol{\kappa} \neq 0, \boldsymbol{\omega} \neq 0$ 。图2刻画了4种管控策略下各个感染群体随时间的动态演变过程。总体而言, 与无管控措施情形相比(图中实线), 仅对市内感染群体实施隔离(图中星点虚线)、仅对城际感染群体实施隔离(图中空心圆虚线)和同时实施市内和城际两种管控策略(图中实点虚线)3种管控措施对降低疫情的扩散速度(感染相同数量所用时间)和感染数量(同一时刻不同感染类数量)是有效可行的。

为了进一步分析管控策略对感染群体 I 在管控期间内的影响, 以无管控时的感染人数为基准, 图3对比了仅市内隔离、仅城际隔离及市内和城际都实施隔离3种管控情形下总感染人数在稳态时的减少率和管控期间内的总减少率。由图2和图3可见: 1) 市内感染群体实施隔离措施可降低活跃在本市户籍居民的总感染人数, 但会不同程度地使该市外出居民的总感染人数增加。以疫情处于稳定/均衡状态的城市1为例(图3(a)), 仅采取对市内感染群体实施隔离措施, 使活跃在该市的本地感染类 I_{11} 降低了6.24%, 但使外出感染类 I_{12} 、 $I_{1\bar{2}}$ 和 $I_{1\frac{1}{2}}$ 分别增加了1.17%、1.99%和0.11%。这是因为本地感染类 I_{11} 的降低使得外出的易感染类 $S_{1\bar{2}}$ 增加。由于未对交通工具实施管控, 这部分易感染者在比城市内感染率更高的交通工具内与感染者接触而增大了 $I_{1\bar{2}}$ 的感染人数, 进而使 I_{12} 和 $I_{1\frac{1}{2}}$ 增大。2) 城际迁徙隔离措施可同时降低活跃在本市户籍居民和该市外出流动居民。以城市1为例, 通过对城际迁徙的感染者实施隔离管控, 首先降低了使用交通工具跨区域迁徙的 $I_{1\bar{2}}$ 数量, 进而降低了到达城市2活动的 I_{12} 数量以及从其返回户籍地的 $I_{1\frac{1}{2}}$ 数量。由于城市内的感染人数减少, 其单位时间内可接触并转化的总易感染者人数也相应地降低。3) 在总感染人数降低率方面, 仅实施城际迁徙隔离措施要优于仅实施市内感染隔离, 且同时实施两种隔离措施呈现“1 + 1 > 2”特征。如图3(b)所示, 上述3种管控情形分别使总感染人数下降了1.12%、25.63%和40.67%。这是因为疫情在城市内扩散初期, 城市内感染群体可接触的易感染群体数量较大, 对其实施管控可有效降低其扩散速度和范围; 而在通过交通

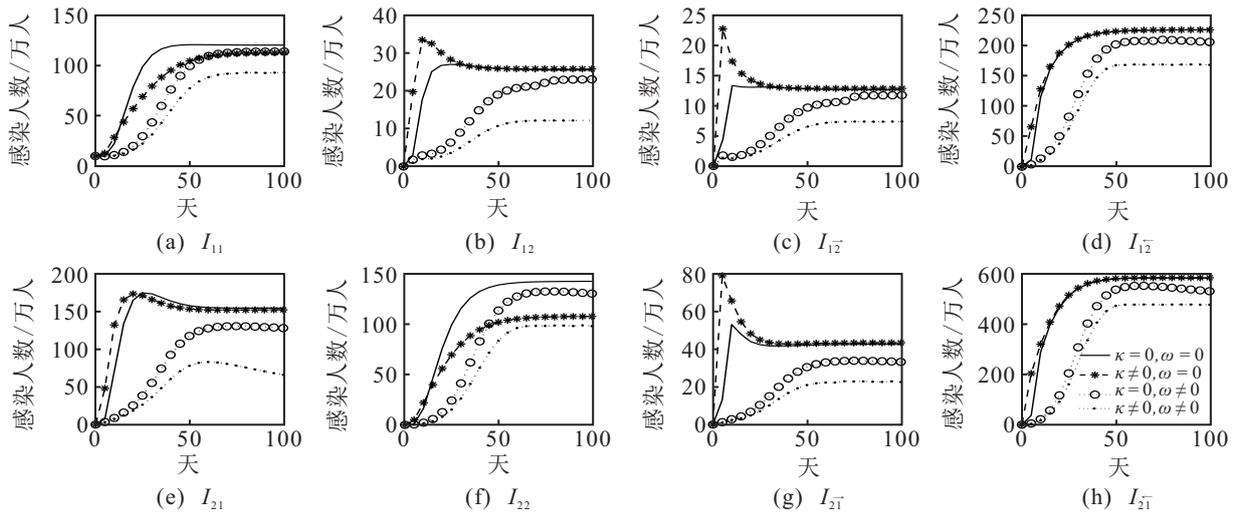


图2 不同管控情形下感染群体 I 随时间 t 变化曲线

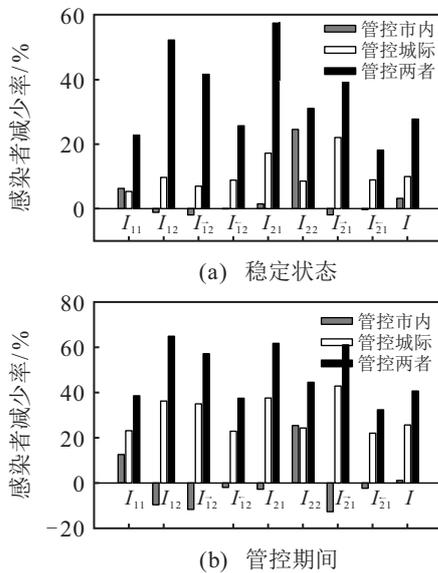


图3 不同管控情形下感染群体 I 的降低率对比

工具向城市外蔓延时,对区域间迁徙感染者实施阻隔可降低疫情外溢速度及交通工具内接触感染风

险. 综上所述,政府及相关应急管理部门,在疫情爆发初期宜采取限制移动、隔离和防护等全面的防控措施对感染群体实施管控以降低疫情的扩散速度和影响程度,并提高易感染群体的防护意识,加快推进疫苗的研发并提高易感染群体的接种率.

3.2 交通管控分析

为了定量分析疫情沿交通工具跨区域扩散影响,以城市内感染群体无隔离措施 ($\kappa = 0$) 为例,进一步考虑以下4种交通管控情形: 1) 无区域间管控措施; 2) 仅对使用火车迁徙的城际感染群体实施隔离; 3) 仅对使用汽车迁徙的城际感染群体实施隔离; 4) 对两种运输方式迁徙的城际感染群体都实施隔离. 图4刻画了4种情况下各感染群体 (I) 随时间的动态演变过程. 简而言之,疫情可以借助交通工具在城际之间快速扩散. 对拟使用交通工具的迁徙感染者实施阻隔,可以快速减少进入城际运输系统的迁徙感染者. 迁徙感染者的降低意味着交通工具内单位时间接触

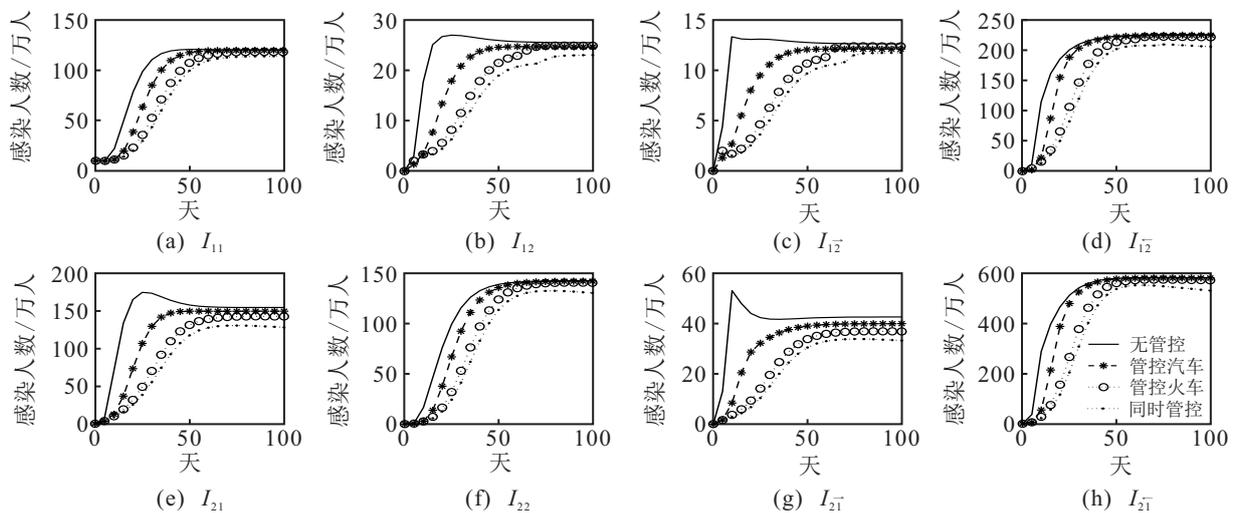


图4 不同区域间管控情形下感染群体 I 随时间 t 变化曲线

并感染的易感染迁徙者也随之降低. 最后, 到达目的地的感染者也进一步减少而使城市内感染风险降低. 此外, 由于城际迁徙的人群中选择火车出行的比例要远大于公共汽车, 且前者的感染概率大于后者, 在疫情爆发初期方面, 对拟使用火车跨区域迁徙感染者实施阻隔, 其单位时间内可使迁徙感染者人数和火车内的感染风险比相应的汽车管控减幅更大. 因此, 对汽车运输系统实施交通管控在抑制疫情跨区域扩散速度方面要优于火车运输系统管控.

相比无管控情形, 图5进一步对比了实施不同管控决策使总感染人数在稳态时的减少率和管控期间的总减少率. 虽然对使用单一类型的交通工具的迁徙感染者采取隔离措施有利于降低疫情初期的扩散速度, 但它们在降低稳定状态及管控期间的感染总数方面差异较大. 在稳定状态时, 汽车管控、火车管控和两者都管控情形使感染者数量平均降低了0.94%、2.92%和9.89%. 而在管控期间, 3种管控情形使感染者数量平均降低了8.54%、19.02%和25.63%. 因此, 对火车运输系统实施交通管控在疫情控制均衡状态和管控期间的疫情扩散范围/人数要优于汽车运输系统管控, 而综合实施两种管控使管控期间的总感染人数略低于单一实施这两种交通工具管制的总和. 虽然对使用单一类型的交通工具的迁徙感染者采取隔离措施有利于降低疫情初期的扩散速度, 但对均衡状态的扩散范围影响小. 这是因为管控某一类型交通工具的扩散风险并不能完全控制疫情沿其他类型交通工具的传播途径, 进而对稳定状态时感染群体人数影响很小. 对所有跨区域交通工具实施管控, 不仅可以降低疫情扩散速度, 而且可以大幅降低均衡

状态和管控期间感染群体的人数. 综上, 在疫情扩散初期, 交通运输部门宜加大对所有城际交通工具的疫情检测和限制人群移动等管控措施以快速控制疫情跨区域扩散风险, 进而减少感染规模与范围.

4 结论

本文研究了疫情沿交通工具跨区域扩散机制及最优控制策略问题. 首先分析人群使用交通工具跨区域迁徙过程及状态, 构建了基于SIS疫情的多区域扩散动力学方程并从模型中获得相关性质和推论; 其次, 从最优控制视角建立了考虑城市内和城际间管控策略的疫情扩散最优控制模型; 最后, 对疫情沿交通工具跨区域扩散模型进行数值计算, 并对比分析了不同管控策略组合下疫情的扩散速度与范围. 研究表明: 疫情可以借助交通工具快速传播, 两种管控措施在控制疫情扩散方面是有效的. 为有效降低疫情的影响程度, 早期宜对感染者采取严格的隔离措施, 并限制感染者活动; 而单一的管控措施虽然可以降低疫情扩散速度, 但对均衡状态的感染人数影响很小.

未来的研究可以进一步考虑潜伏状态和免疫状态等多种类型的疾病模型, 结合时间的动态性和物资的有限性对应急物资进行多个周期、多个优化目标建模和优化算法设计, 以及将所构建的模型和求解方法应用于实际案例中, 为政府、交通和应急管理等部门提供理论基础和疫情管控策略与建议.

参考文献(References)

[1] 唐少虎, 刘小明, 朱伟, 等. 基于多学科设计优化的路网交通分布式协同控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(9): 1867-1875.
(Tang S H, Liu X M, Zhu W, et al. Distributed cooperative control of road network traffic based on multidisciplinary design optimization[J]. Control and Decision, 2019, 34(9): 1867-1875.)

[2] 刘明, 曹杰, 章定. 数据驱动在疫情应急物流网络动态调整优化[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(2): 437-448.
(Liu M, Cao J, Zhang D. Dynamic adjustment method for optimizing epidemic-logistics network based on data-driven[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2020, 40(2): 437-448.)

[3] Ross R. Some quantitative studies in epidemiology[J]. Nature, 1911, 87(2188): 466-467.

[4] 蒋杰辉, 马良. 多目标应急物资路径优化及其改进智能水滴算法[J]. 计算机应用研究, 2016, 33(12): 3602-3605.
(Jiang J H, Ma L. Multi-objective routing optimization

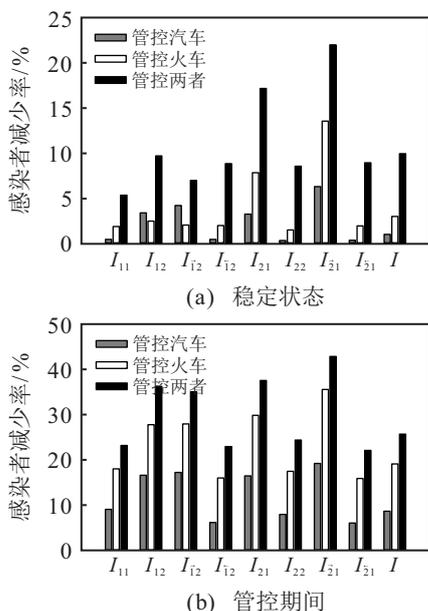


图5 不同交通管控情形下感染群体I的降低率对比

- of emergency materials and its improved intelligent water drops algorithm[J]. *Application Research of Computers*, 2016, 33(12): 3602-3605.)
- [5] 邵俊杰, 禹世雄, 高婧婧, 等. 基于SEIR模型的中国山东省与韩国COVID-19疫情早期传播特征比较分析[J]. *华中师范大学学报: 自然科学版*, 2020, 54(6): 1072-1077.
(Shao J J, Yu S X, Gao J J, et al. Comparative analysis of the early transmission characteristics of COVID-19 epidemic between Shandong Province in China and South Korea based on the SEIR model[J]. *Journal of Central China Normal University: Natural Sciences*, 2020, 54(6): 1072-1077.)
- [6] 陈莫凡, 黄建华. 基于SEIQR演化博弈模型的突发网络舆情传播与控制研究[J]. *情报科学*, 2019, 37(3): 60-68.
(Chen M F, Huang J H. Research on diffusion and control of emergency network public opinion based on SEIQR evolutionary game model[J]. *Information Science*, 2019, 37(3): 60-68.)
- [7] Meng X Y, Cai Z Q, Si S B, et al. Analysis of epidemic vaccination strategies on heterogeneous networks: Based on SEIRV model and evolutionary game[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 403: 126172.
- [8] Zakary O, Rachik M, Elmouki I. On the analysis of a multi-regions discrete SIR epidemic model: An optimal control approach[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2017, 5(3): 917-930.
- [9] 梁霜霜, 聂麟飞, 胡琳. 具有年龄结构和水平传播的媒介传染病模型研究[J]. *华东师范大学学报: 自然科学版*, 2021(3): 47-55.
(Liang S S, Nie L F, Hu L. Analysis of vector-borne infectious disease model with age-structured and horizontal transmission[J]. *Journal of East China Normal University: Natural Science*, 2021(3): 47-55.)
- [10] Oum T H, Wang K. Socially optimal lockdown and travel restrictions for fighting communicable virus including COVID-19[J]. *Transport Policy*, 2020, 96: 94-100.
- [11] 郭寒英, 张殿业, 石红国. 交通运输突发疫情扩散理论与模型研究[J]. *铁路运输与经济*, 2004, 26(2): 65-67.
(Guo H Y, Zhang D Y, Shi H G. Spreading theory and model study of broke-out diseases in traffic & transportation[J]. *Railway Transport and Economy*, 2004, 26(2): 65-67.)
- [12] Tatem A J, Rogers D J, Hay S I. Global transport networks and infectious disease spread[J]. *Advances in Parasitology*, 2006, 62: 293-343.
- [13] 贾兴利, 周吴啸, 韩兴家, 等. 交通管控措施对市域新冠疫情传播的阻断效果分析[J]. *中国公路学报*, 2022, 35(1): 252-262.
(Jia X L, Zhou W X, Han X J, et al. Blocking effects of traffic control measures on COVID-19 transmission in city territories[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2022, 35(1): 252-262.)
- [14] 张宇, 田万利, 吴忠广, 等. 基于改进SEIR模型的新冠肺炎疫情沿交通线路传播机制[J]. *交通运输工程学报*, 2020, 20(3): 150-158.
(Zhang Y, Tian W L, Wu Z G, et al. Transmission mechanism of COVID-19 epidemic along traffic routes based on improved SEIR model[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2020, 20(3): 150-158.)
- [15] Qian X W, Ukkusuri S V. Connecting urban transportation systems with the spread of infectious diseases: A Trans-SEIR modeling approach[J]. *Transportation Research—Part B: Methodological*, 2021, 145: 185-211.
- [16] Kandhway K, Kuri J. How to run a campaign: Optimal control of SIS and SIR information epidemics[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 231: 79-92.

作者简介

蒋杰辉(1990—), 男, 讲师, 博士, 从事应急管理的研究, E-mail: asdjiangjiehui@163.com;

盛典(1990—), 男, 副研究员, 博士, 从事运输管理的研究, E-mail: dianshenghust@gmail.com;

杨鹏(1980—), 男, 教授, 博士, 从事物流与供应链网络优化等研究, E-mail: yangpeng@hufe.edu.cn.