

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于鞍点法的自适应分布式资源分配算法

时侠圣, 徐磊, 杨涛

引用本文:

时侠圣, 徐磊, 杨涛. 基于鞍点法的自适应分布式资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(7): 2042–2048.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.2031>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法

Distributed nonsmooth resource allocation algorithms over second-order multi-agent systems

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1336–1344 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1262>

#### 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化

Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1412–1419 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0369>

#### 网络攻击下多智能体系统动态事件触发一致性

Dynamic event-triggered consensus of multi-agent systems under cyber-attacks

*控制与决策*. 2023, 38(5): 1295–1302 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0725>

#### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

#### 事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 $H_\infty$ 故障检测

Event-triggered  $H_\infty$  fault detection for networked control systems with distributed delays

*控制与决策*. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

# 基于鞍点法的自适应分布式资源分配算法

时侠圣<sup>1</sup>, 徐磊<sup>2</sup>, 杨涛<sup>2†</sup>

(1. 中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116;

2. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110004)

**摘要:** 研究一类带有不等式约束为凸函数的多智能体系统分布式资源分配问题. 在资源分配问题中, 各智能体拥有仅自身可知的局部成本函数和局部凸不等式约束. 分布式资源分配旨在如何利用智能体间的信息交互设计一种分布式优化算法, 完成定量资源分配的同时还保证最小化全局成本函数. 针对该问题, 基于卡罗需-库恩-塔克条件和比例积分控制思想, 首先提出一种自适应分布式优化算法, 其中凸不等式约束的对偶变量可实现自适应获取; 然后, 为了降低系统的通信资源消耗, 设计一种动态事件触发控制策略以实现离散时间通信的分布式资源分配算法; 最后, 通过数值仿真验证所设计算法的有效性.

**关键词:** 分布式资源分配; 自适应控制; 事件触发; 不等式约束

中图分类号: TP13 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.2031

引用格式: 时侠圣, 徐磊, 杨涛. 基于鞍点法的自适应分布式资源分配算法[J]. 控制与决策, 2023, 38(7): 2042-2048.

## An adaptive distributed resource allocation algorithm via saddle point dynamics

SHI Xia-sheng<sup>1</sup>, XU Lei<sup>2</sup>, YANG Tao<sup>2†</sup>

(1. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China; 2. The State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** This paper studies the distributed resource allocation problem with convex inequality constraints over the multi-agent systems. The local cost function and convex inequality constraints are known by themselves of each agent in the resource allocation problem. The aim of the distributed resource allocation problem is how to design a distributed optimization algorithm by using the information exchange between neighboring agents while minimizing the global cost functions. For this problem, based on the Karush-Kuhn-Tucker condition and proportional integral control idea, we firstly propose an adaptive distributed optimization algorithm, using which the dual variable of the inequality is obtained adaptively. Then, to reduce the communication resource consumption of the system, the discrete-time communication of the distributed resource allocation algorithm is realized by designing a dynamic event-triggered control scheme. Finally, the numerical simulation shows the effectiveness of the proposed algorithms.

**Keywords:** distributed resource allocation; adaptive control; event-triggered; inequality constraint

## 0 引言

由于分布式资源分配问题在许多场景中都有广泛的应用前景, 智能电网电力调度<sup>[1]</sup>、无线通信信道分配和边缘计算资源分配等, 近几十年吸引了广大学者的密切关注<sup>[2]</sup>. 分布式资源分配问题主要研究如何在满足约束条件下, 最小化智能体局部成本函数之和. 为解决分布式多智能体系统中资源分配问题, 很

多优秀的分布式优化算法被设计出来<sup>[3]</sup>. 以离散迭代算法为例, 有余量算法<sup>[4]</sup>、Push-sum算法<sup>[5]</sup>和Nesterov加速算法<sup>[6]</sup>等. 随着信息物理系统技术和控制理论技术发展, 越来越多的学者开始关注如何将智能体动力学特性结合进来<sup>[7]</sup>设计连续时间分布式优化算法.

针对分布式资源分配问题, 文献[8-9]分别利用映射算子和微分映射算子将智能体状态量控制在局

收稿日期: 2021-11-21; 录用日期: 2022-03-28.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(62133003); 国家自然科学基金重大项目(61991403, 61991400); 江苏省自然科学基金项目(BK20210492).

†通讯作者. E-mail: yangtao@mail.neu.edu.cn.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

部约束内. 随后基于映射算子, 不同特点的分布式优化算法被提出, 如二阶多智能体系统<sup>[10]</sup>、有向平衡网络<sup>[11]</sup>、带扰动多智能体系统<sup>[12]</sup>和固定时间收敛算法<sup>[13]</sup>等. 不同于映射算子方法, 文献[14-16]利用卡罗需-库恩-塔克条件直接对局部不等式约束设计自适应迭代规则, 确保算法稳定点恰是资源分配问题的最优解, 然而上述文献仅能处理简单的箱式约束<sup>[15]</sup>. 此外, 资源分配问题作为受约束优化问题的分支之一, 引用了经典的罚函数法. 文献[17-19]分别从内点法和外点法角度入手, 设计了一类分布式优化算法. 然而文献[17]所设计的算法需要提前获知惩罚因子的信息, 这在分布式系统不易实现, 且容易引起算法在稳定点附近轻微震荡.

随着多智能体系统规模增大, 其通信环境也越来越复杂, 而分布式系统智能体间频繁通信势必会造成消息阻塞等问题<sup>[20]</sup>. 近年来, 有学者将事件触发通信机制引入到分布式优化问题求解中<sup>[21]</sup>. 文献[22-28]设计了一些事件触发通信机制分布式资源分配算法, 如二次函数经济调度问题<sup>[22-24]</sup>、基于状态和时间的静态事件触发通信机制<sup>[25-28]</sup>. 然而, 目前关于动态事件触发通信机制在分布式资源分配的应用研究鲜有涉及, 且动态事件触发通信机制相比于静态事件触发通信机制可以进一步降低智能体间的通信次数.

基于以上讨论, 本文首先利用鞍点法将文献[15]中箱式约束推广至更一般的凸不等式约束. 此外, 为降低智能体间通信负担, 引入动态事件触发通信机制, 设计一类初始状态自由分布式资源分配算法. 本文创新点总结如下: 1) 相比于已有的鞍点法分布式资源分配算法<sup>[15]</sup>, 所设计算法将智能体局部约束从箱式约束推广至更一般的凸不等式约束, 并设计3个控制参数供用户自主调节算法收敛性; 2) 不同于已有事件触发分布式资源分配算法<sup>[22-28]</sup>, 本文设计一种动态事件触发通信机制, 能够进一步减少智能体间的通信次数.

符号说明:  $\mathbf{R}$ 表示实数集; 对于给定向量  $x \in \mathbf{R}^m$ ,  $x^T$ 表示转置; 给定函数  $f(x) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\partial f(x)$ 表示梯度;  $\|\cdot\|$ 表示2范数; 若向量  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ 中每一项都小于等于零, 则记为  $x \leq 0$ , 若严格小于零, 则记为  $x < 0$ ; 符号  $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵或块对角矩阵.

## 1 基础知识介绍

### 1.1 代数图论

假设所研究多智能体系统含有  $n$  个独立智能体, 它们之间利用通信网络实现系统协同控制. 此时通

信网络标记为  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ .  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$  定义为智能体编号组成的集合,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  表示智能体间通信链路组成的集合. 若智能体  $i$  与智能体  $j$  间存在直接通信链路则表示有  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . 若智能体  $i$  与智能体  $j$  存在通信路径则表示系统存在一串通信链路  $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_l, j)$  使得智能体  $i$  与智能体  $j$  可在有限步内实现通信. 若整个网络  $\mathcal{G}$  中任意两智能体间都存在通信路径, 则称  $\mathcal{G}$  为连通网络. 此外, 网络  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵用符号  $A := [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示. 若存在  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 则定义  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 进一步地, 网络  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵  $L := [L_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  定义为  $L_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\forall i \in \mathcal{V})$  和  $L_{ij} = -a_{ij} (\forall i \neq j)$ . 若  $\mathcal{G}$  为无向网络, 即智能体间通信链路是双向的, 则矩阵  $A$ 、 $L$  都为对称阵.

**假设1** 本文所研究的资源分配系统为无向连通网络.

**引理1**<sup>[10]</sup> 若假设1成立, 则对于任意  $1_n^T x \neq 0$ , 有

$$\min_x \frac{x^T L x}{x^T x} = \rho_2. \quad (1)$$

此外, 若假设1成立, 则存在正交矩阵  $Q = \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} 1_n, R \right] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 满足

$$R A_1^{-1} R^T L = L R A_1^{-1} R^T = K_n. \quad (2)$$

其中:  $K_n = I_n - \frac{1}{n} 1_n^T 1_n$ ,  $A = \text{diag}\{\rho_2, \dots, \rho_n\}$ .  $L$  的特征根可记为  $0 = \rho_1 < \rho_2 \leq \rho_3 \leq \dots \leq \rho_n$ .

### 1.2 问题描述

在分布式多智能体系统资源分配问题中, 各智能体都有一个局部成本函数  $f_i(x_i) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , 其中  $x_i$  表示智能体决策变量或资源变量. 资源分配旨在完成一定量资源分配的同时使得系统总成本  $\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$  最低. 此外在一部分系统中, 智能体也要遵守一些容量约束, 即局部不等式约束. 如智能电网中经济调度问题, 各发电机组要确保发电量在机组发电能力范围内. 资源分配问题模型总结如下:

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i); \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n d_i, g_i(x_i) \leq 0. \quad (4)$$

其中:  $\sum_{i=1}^n d_i$  为系统资源总量,  $d_i$  为各智能体局部资源分配量. 局部不等式约束定义为  $g_i(x_i) = [g_{i,1}(x_i), \dots, g_{i,s_i}(x_i)]^T \in \mathbf{R}^{s_i}$ ,  $s_i$  为智能体  $i$  局部不等式约束个数. 在后续分析中可以发现, 当  $m > 1$  时, 只需要将

矩阵  $L$  替换为  $L \otimes I_m$  即可. 为书写方便, 后文统一默认  $m = 1$ .

**假设2** 问题(3)中, 假设函数  $f(x)$  可微且  $\mu$ -强凸. 即对于任意  $x, y \in \mathbf{R}^n$ , 有  $(x-y)^\top(\partial f(x) - \partial f(y)) \geq \mu \|x - y\|^2$ . 此外, 存在点  $\tilde{x}$  使得  $g(\tilde{x}) < 0$  和  $\sum_{i=1}^n \tilde{x} = \sum_{i=1}^n d_i$  成立. 对于不等式约束  $g_{i,s_i}(x_i) \leq 0$ , 假设  $g_{i,s_i}(x_i)$  为凸函数.

**引理2**<sup>[29]</sup> 若假设2成立, 则  $x^*$  是问题(3)的最优解当且仅当存在  $(\zeta^*, c^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{n \times s}$  使得下式成立:

$$0 \in \partial f(x) + (c^*)^\top \partial g(x^*) - 1_n \otimes \zeta^*; \quad (4a)$$

$$1_n^\top x^* = 1_n^\top d; \quad (4b)$$

$$g_{i,s_i}(x_i^*) \leq 0, c_{i,s_i}^* \geq 0, c_{i,s_i}^* g_{i,s_i}(x_i^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4c)$$

其中  $s = \sum_{i=1}^n s_i, c^* = \text{diag}\{(c_1^*)^\top, (c_2^*)^\top, \dots, (c_n^*)^\top\} \in \mathbf{R}^{n \times s}, c_i = [c_{i,1}, \dots, c_{i,s_i}]^\top \in \mathbf{R}^{s_i}$ .

## 2 算法设计与收敛性分析

### 2.1 连续时间通信算法

在引理2中, 需要求解一个全局性最优拉格朗日乘子  $\zeta^*$ . 为在分布式多智能体系统实现这一目标, 给每个智能体设置一个局部拉格朗日乘子  $\lambda_i$ , 利用多智能体一致性方法和比例积分反馈控制思想, 使得所有局部拉格朗日乘子协同收敛至最优拉格朗日乘子  $\zeta^*$ . 同时利用梯度下降法引导智能体变量  $x_i$  协同迭代, 最终实现资源分配问题(3)求解. 对于智能体  $i, \forall i \in \mathcal{V}$ , 迭代规则设计如下:

$$\dot{x}_i = -\alpha \partial f_i(x_i) - c_i^\top \partial g_i(x_i) + \lambda_i, \quad (5a)$$

$$\dot{\lambda}_i =$$

$$d_i - x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) - \beta \sum_{j=1}^n a_{ij}(z_i - z_j), \quad (5b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \quad (5c)$$

$$\dot{c}_{i,p} = k_i c_{i,p} g_{i,p}(x_i), \quad p = 1, 2, \dots, s_i. \quad (5d)$$

其中:  $\alpha, \beta, k_i$  为用户设定控制参数, 辅助变量  $z_i$  确保系统(5)稳定点满足问题(3)中的等式约束. 此外, 式(5b)中  $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)$  和  $\sum_{j=1}^n a_{ij}(z_i - z_j)$  组成比例积分控制器. 从算法(5)可以看出, 各邻居智能体仅需交互信息  $\lambda_i$  和  $z_i$ , 所以算法(5)以分布式方式实现问题(3)的求解. 算法(5)取消智能体初始状态  $x_i, \lambda_i, z_i$  的要求, 仅要求变量  $c_i(0) \succeq 0$  即可, 实现初始状态自由.

下面证明系统(5)稳定点即为问题(3)的最优解.

**引理3**  $x^*$  为问题(3)的最优解当且仅当  $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$  为系统(5)的稳定点.

**证明** 充分性. 由引理2可知, 若  $x^*$  是问题(3)的最优解, 则存在常数  $\lambda^* = 1_n \otimes \zeta^*, c^*$  使得式(4a)成立. 此外, 由于矩阵  $L$  满足  $1_n^\top L = 0_n^\top$ , 结合式(4b)可知,  $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$  为系统(5)的稳定点.

必要性. 若  $(x^*, \lambda^*, z^*, c^*)$  是系统(5)的稳定点, 则式(4c)成立. 由于矩阵  $L$  满足  $1_n^\top L = 0_n^\top$ , 有  $1_n^\top x^* - 1_n^\top d = 1_n^\top x^* - 1_n^\top d - 1_n^\top L \lambda^* - \beta 1_n^\top L z^* = 0_n^\top$ , 即式(4b)成立. 此外, 由于  $L \lambda^* = 0$ , 有  $\lambda^* = 1_n \otimes \zeta, \zeta \in \mathbf{R}$ , 即式(4b)成立. 由引理2可知,  $x^*$  是问题(3)的最优解.  $\square$

**定理1** 若假设成立, 且控制参数满足  $\alpha > \frac{1}{4\beta\mu\rho_2}, \beta > 0, k_i > 0, \forall i \in \mathcal{V}$ , 则算法(5)收敛至问题(3)的最优解.

**证明** 首先设计如下李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{4} \|\lambda - \lambda^*\|^2 + \frac{1}{4} \|\lambda - \lambda^* + z - z^*\|^2 + \frac{\beta}{2} \|z - z^*\|^2, \quad (6)$$

$$V_2 =$$

$$\sum_{i=1, c_i^* \neq 0}^n \frac{1}{k_i} c_i + \sum_{i=1, c_i^* \neq 0}^n \frac{1}{k_i} \left( c_i - c_i^* - c_i^* \ln \left( \frac{c_i}{c_i^*} \right) \right). \quad (7)$$

显然, 函数  $V_1$  满足半正定性. 下面分析函数  $V_2$  的半正定性. 令  $h_i(\theta_i) = \theta_i - \ln(1 + \theta_i)$ , 其中  $\theta_i = \frac{c_i - c_i^*}{c^*} \in (-1, +\infty)$ , 则有

$$V_2 = \sum_{i=1, c_i^* \neq 0}^n \frac{1}{k_i} c_i + \sum_{i=1, c_i^* \neq 0}^n \frac{1}{k_i} c_i^* h_i(\theta_i).$$

简单分析可得结论  $\min_{\theta_i \in (-1, +\infty)} h_i(\theta_i) = 0$ , 等式成立当且仅当  $c_i = c_i^*$ , 因此可知函数  $V_2$  也是半正定的. 进而函数  $V_1$  在系统(5)上关于时间  $t$  的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & - (x - x^*)^\top (c^\top \partial g(x) - (c^*)^\top \partial g(x^*)) - \\ & \alpha (x - x^*)^\top (\partial f(x) - \partial f(x^*)) - \\ & \frac{1}{2} (\lambda - \lambda^*)^\top L (\lambda - \lambda^*) - \frac{1}{2} \beta (z - z^*)^\top L (z - z^*) - \\ & \frac{1}{2} (x - x^*)^\top (z - z^*) \leq \\ & - (x - x^*)^\top (c^\top \partial g(x) - (c^*)^\top \partial g(x^*)) - \\ & \left( \alpha \mu - \frac{1}{4\beta\rho_2} \right) \|x - x^*\|^2 - \\ & \frac{1}{2} (\lambda - \lambda^*)^\top L (\lambda - \lambda^*) - \frac{1}{4} \beta \rho_2 \|z - z^*\|^2, \quad (8) \end{aligned}$$

其中第1个不等式利用函数  $f(x)$  的  $\mu$ -强凸性以及

Young不等式  $(x - x^*)^T(z - z^*) \leq \frac{1}{2\beta\rho_2} \|x - x^*\|^2 + \frac{\beta\rho_2}{2} \|z - z^*\|^2$ . 类似地, 函数  $V_2$  在系统(5)上关于时间  $t$  的微分为

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^n (c_i g_i(x_i) - c_i^* g_i(x_i)) = \sum_{i=1}^n (c_i - c_i^*) g_i(x_i). \quad (9)$$

令  $V = V_1 + V_2$ , 有

$$\begin{aligned} V \leq & -\left(\alpha\mu - \frac{1}{4\beta\rho_2}\right) \|x - x^*\|^2 - \\ & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^*)^T L(\lambda - \lambda^*) - \\ & \frac{1}{4}\beta\rho_2 \|z - z^*\|^2 + \sum_{i=1}^n (c_i - c_i^*) g_i(x_i) - \\ & \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) (c_i \partial g_i(x_i) - c_i^* \partial g_i(x_i^*)). \end{aligned} \quad (10)$$

由引理2可知,  $c_i^* g_i(x_i^*) = 0$ , 下面分两种情形讨论:

1) 若  $c_i^* = 0, g_i(x_i^*) \leq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} (c_i - c_i^*) g_i(x_i) - (x - x^*) (c_i \partial g_i(x_i) - c_i^* \partial g_i(x_i^*)) = \\ c_i (g_i(x_i) - g_i(x_i^*)) - (x_i - x_i^*) \partial g_i(x_i) \leq \\ c_i g_i(x_i^*) \leq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)利用了函数的凸性, 即  $g(x_i^*) \geq g(x_i) + \partial g_i(x_i)(x_i^* - x_i)$  以及结论  $c_i(t) \geq 0, t \geq 0$ .

2) 若  $c_i^* > 0, g_i(x_i^*) = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} (c_i - c_i^*) g_i(x_i) - (x_i - x_i^*) (c_i \partial g_i(x_i) - c_i^* \partial g_i(x_i^*)) = \\ c_i (g_i(x_i) - (x_i - x_i^*) \partial g_i(x_i)) - \\ c_i^* (g_i(x_i) - \partial g_i(x_i^*)(x - x^*)) \leq \\ c_i g_i(x_i^*) - c_i^* g_i(x_i^*) = (c_i - c_i^*) g_i(x_i^*) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

综合可得

$$\begin{aligned} V \leq & -\left(\alpha\mu - \frac{1}{4\beta\rho_2}\right) \|x - x^*\|^2 - \\ & \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^*)^T L(\lambda - \lambda^*) - \frac{1}{4}\beta\rho_2 \|z - z^*\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

此时, 由拉萨尔不变性原理可知, 算法(5)收敛至问题(3)的最优解.  $\square$

**注1** 问题(3)假设智能体  $i$  的局部不等式个数为  $s_i$ , 上述收敛性分析为书写简便, 默认  $s_i = 1$ .  $s_i > 1$  时收敛性分析与之类似, 仅需将定理1中  $V_2$  修改为

$$\begin{aligned} V_2 = & \sum_{i=1, p=1, c_{i,p}^* \neq 0}^{n, s_i} \frac{1}{k_i} c_{i,p} + \\ & \sum_{i=1, p=1, c_{i,p}^* \neq 0}^{n, s_i} \frac{1}{k_i} \left( c_{i,p} - c_{i,p}^* - c_{i,p}^* \ln \left( \frac{c_{i,p}}{c_{i,p}^*} \right) \right). \end{aligned}$$

后续分析过程  $\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{s_i} (c_{i,p} - c_{i,p}^*) g_{i,p}(x_i) - (x_i - x_i^*) (c_{i,p} \partial g_{i,p}(x_i) - c_{i,p}^* \partial g_{i,p}(x_i^*)) \leq 0$  与定理1类似.

**注2** 与现有算法相比, 本文所设计算法优势如下: 1) 与基于内点法罚函数法相比<sup>[17]</sup>, 本文算法(5)需要提前获知一些全局信息, 如惩罚因子大小等; 2) 与基于外点法罚函数法相比<sup>[18-19]</sup>, 虽然该方法可以通过自适应算法以分布式方式自动获取惩罚因子的大小, 但需要智能体在每一次算法执行时都要计算当前状态局部约束集法锥, 此操作会增加计算负担; 3) 与映射算子法相比<sup>[8-13]</sup>, 所设计算法的Caratheodory确定存在<sup>[30]</sup>, 且面对复杂局部约束时无需求解当前状态与局部约束的欧氏距离和映射点; 4) 与现有鞍点法相比<sup>[15]</sup>, 所设计算法(5)将局部约束从箱式约束推广至更一般的约束类型.

### 2.2 离散时间通信算法

算法(5)虽然很好地解决了一般约束下的资源分配问题, 且实现初始状态自由, 但在执行时需要时刻与邻居智能体通信以实现协同收敛. 在复杂通信网络环境中, 频繁通信会造成不必要的通信资源浪费. 为降低网络通信消耗负担, 引入事件触发通信机制, 在智能体求解资源分配问题时实现离散时间通信. 此时, 算法(5)修改如下:

$$\dot{x}_i = -\alpha \partial f_i(x_i) - c_i \partial g_i(x_i) + \lambda_i, \quad (14a)$$

$$\dot{\lambda}_i = d_i - x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} (\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j) - \beta z_i, \quad (14b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j), \quad (14c)$$

$$\dot{c}_{i,p} = k_i c_{i,p} g_{i,p}(x_i), \quad p = 1, 2, \dots, s_i. \quad (14d)$$

其中:  $\alpha, \beta, k_i$  为用户设定控制参数; 触发信息  $\hat{\lambda}_i(t) = \lambda_i(t_i^k), \forall t \in [t_i^k, t_i^{k+1}), \forall i \in \mathcal{V}, \{t_i^k\}$  为智能体  $i$  的触发时刻序列. 此外, 为解决问题(3)等式约束, 令  $z_i(0) = 0_m$ .

事件触发控制策略设计如下:

$$t_i^{k+i} = \max \left\{ t > t_i^k \mid \left( (\beta + L_{ii}) \|e_i\|^2 - \frac{\phi_i}{2} \hat{q}_i \right) \leq \frac{\chi_i}{\kappa_i} \right\}. \quad (15)$$

其中:  $\hat{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} \|\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j\|^2$ , 辅助变量  $\chi_i$  迭代规则为

$$\dot{\chi}_i = -\sigma_i \chi_i + \delta_i \left( \frac{\phi_i}{2} \hat{q}_i - (\beta + L_{ii}) \|e_i\|^2 \right). \quad (16)$$

控制参数满足  $\sigma_i > (1 - \delta_i) / \kappa_i, \delta_i \in [0, 1], \kappa_i > 0, \phi_i \in [0, 1]$ . 结合事件触发(15)可以发现,  $\dot{\chi}_i \geq -(\sigma_i +$

$\kappa_i/\delta_i)\chi_i$ . 进而可得

$$\chi_i(t) \geq \chi_i(0)\exp\left(-\left(\sigma_i + \frac{\kappa_i}{\delta_i}\right)t\right) > 0, \forall t \geq 0. \quad (17)$$

下面给出算法(14)的收敛性分析.

**定理2** 若假设成立,且控制参数满足  $\alpha > \frac{1}{4\beta\mu}, \beta > 0, k_i > 0, \sigma_i > \frac{1-\delta_i}{\kappa_i}, \forall i \in \mathcal{V}$ , 则事件触发策略(15)下,算法(14)收敛至问题(3)的最优解.

定理2收敛性分析与定理1类似,证明略.

**注3** 与现有事件触发资源分配算法相比,所设计算法(14)优势如下: 1) 与基于状态和时间的事件触发通信机制相比<sup>[12,22-28]</sup>,本文动态事件触发通信机制可进一步降低智能体间通信次数,且上述文献中指数收敛项不易选择控制参数; 2) 文献[31]采用映射算子需要求解成本函数梯度的逆函数,当面对复杂类型成本函数时,计算负担较重.

### 3 案例仿真

为表明算法的有效性和适用性,给出两组数值仿真案例.

**案例1** 考虑一个6智能体环形网络,其中每个智能体的局部成本函数均定义为

$$f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i |x_i - \gamma_i| + c_i.$$

局部不等式约束定义为

$$g_i(x_i) = (x_i - x_i^{\min})(x_i - x_i^{\max}).$$

系统参数设计为

$$a = [2, 1, 0.5, 1.5, 1, 1.5]^T,$$

$$b = [3, 4, 5, 2, 3.5, 4.5]^T,$$

$$c = [0.5, 1.5, 3, 1, 2.5, 2]^T,$$

$$\gamma = [30, 28, 45, 35, 40, 35]^T,$$

$$x^{\min} = [20, 25, 35, 25, 20, 28]^T,$$

$$x^{\max} = [40, 35, 50, 45, 47, 42]^T.$$

令算法(5)控制参数为  $\alpha = 1, \beta = 1, k_i = 1, \forall i \in \mathcal{V}$ , 各智能体资源变量  $x_i$  运行轨迹如图1所示. 与同为鞍点法的文献[14]不同,后者通过  $\max$  算子进行辅助运算. 令误差  $e_o = \ln\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*)^2\right)$ , 其中  $x^* = [23.4853, 35, 50, 30.9804, 43.7206, 31.8137]^T$  为资源分配问题理论最优解. 两者在设定相同控制参数情况下的收敛速度对比如图2所示. 由图2可见,误差  $e_o$  随时间增大逐渐趋于零.

为揭示算法(14)动态事件触发通信机制的有效性,令  $\phi_i = 0.95, \kappa_i = 1, \delta_i = 0.5, \sigma_i = 0.55$ , 算法(14)

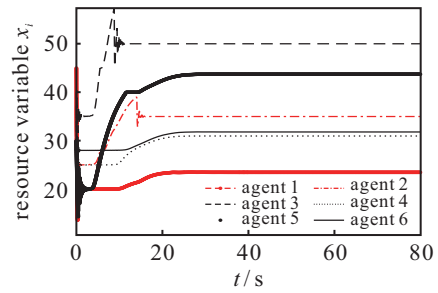


图1 案例1中各智能体资源变量  $x_i$  的轨迹

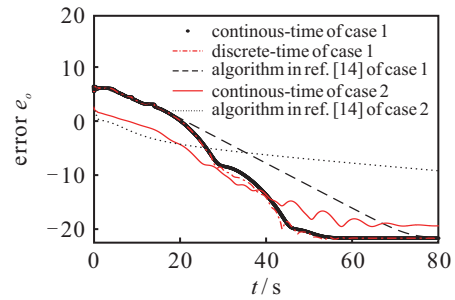


图2 本文算法与已有算法的收敛轨迹对比

初始值与案例1一致,各智能体触发时刻序列如图3所示. 智能体平均触发次数为76.3,仅占连续时间通信算法的0.45%. 作为对比,文献[27]平均触发次数为3531.5次. 此外,由图2可以看出,连续时间通信算法与离散时间通信算法收敛速度和精度大致相同,这是由于当  $\lambda_i(t)$  和  $\lambda_i(t_i^k)$  偏差过大时算法会触发新一次状态广播,且由于  $\lambda_i(t_i^k)$  总是滞后于  $\lambda_i(t)$ ,离散时间通信算法收敛速度会略快于连续时间通信算法.

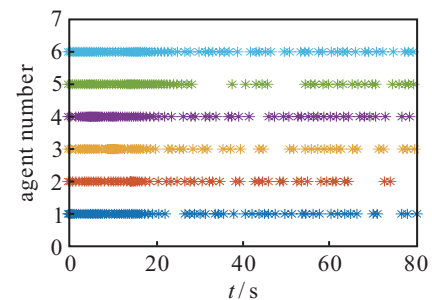


图3 案例1中各智能体触发时刻序列  $\{t_i^k\}$

**案例2** 为验证本文算法对于高维资源分配问题的有效性,对二阶多智能体系统进行案例仿真<sup>[10]</sup>,其中每个智能体的局部成本函数和局部不等式约束定义如下:

$$f_1(x_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2 + \sqrt{(x_{11} - 2)^2 + (x_{12} - 2)^2},$$

$$f_2(x_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2 + \frac{x_{21}^2}{20\sqrt{x_{21}^2 + 1}} + \frac{x_{22}^2}{20\sqrt{x_{22}^2 + 1}},$$

$$f_3(x_3) = (x_{31} - 2)^2 + (x_{32} - 3)^2,$$

$$f_4(x_4) =$$

$$\ln(\exp(-0.05x_{41}) + \exp(0.05x_{41})) + \|x_4\|^2 +$$

$$\ln(\exp(-0.05x_{42}) + \exp(0.05x_{42})), \quad (18)$$

$$\Omega_1 = \{x_1 \in \mathbf{R}^2 \mid \|x_1 - [2, 2]^T\| \leq 2\},$$

$$\Omega_2 = \{x_2 \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x_{21} \leq 2, 0 \leq x_{22} \leq 1\},$$

$$\Omega_3 = \{x_3 \in \mathbf{R}^2 \mid x_{31} \geq 0.5, x_{32} \geq 1, x_{31} + x_{32} \geq 6\},$$

$$\Omega_4 = \{x_4 \in \mathbf{R}^2 \mid \|x_4 - [3, 5]^T\| \leq 2\}.$$

该系统网络连接拓扑假定为环图. 等式约束为  $p = [7, 13]^T$ , 令控制参数  $\alpha = 1, \beta = 0.5$ , 算法(14) 轨迹如图4所示. 其中星号\*表示上述二维分布式资源分配问题理论最优解,  $x^* = [(1.8884, 3.4729), (1.8237, 1), (1.4396, 4.5604), (1.8483, 3.9666)]$ . 与案例1类似, 案例2误差收敛曲线如图4所示. 由图4可见, 当面对高维资源分配问题时, 所设计算法同样可以收敛至最优解. 此外, 与文献[14]相比, 所设计算法收敛速度相对较快. 最后从图4可以看出, 所提出算法对二维及以上资源分配亦是有效的.

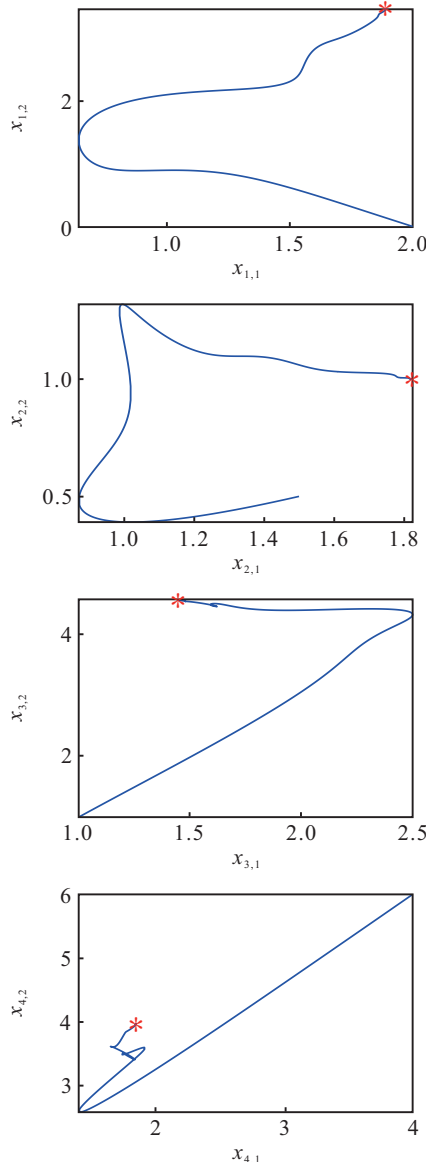


图4 案例2中各智能体资源变量  $x_i$  的轨迹

## 4 结论

本文主要研究了更一般的凸不等式约束下的分布式资源分配算法设计问题. 利用资源分配问题KKT条件和多智能体系统一致性思想, 设计了一种初始状态自由分布式优化算法. 为降低邻居智能体间通信频次, 引入动态事件触发通信机制, 实验结果验证了所提出算法的有效性. 本文仅考虑了智能体自身状态的局部约束, 但在某些复杂情形下邻居智能体的状态是相互影响的, 下一步将研究更复杂的资源分配问题, 即考虑邻居智能体间的共有约束以及智能体间存在博弈的情形.

## 参考文献(References)

- [1] 杨青润, 李澄, 丁涛, 等. 基于交替方向乘子法的电力系统完全分布式动态经济调度方法[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 709-716. (Yang Q R, Li C, Ding T, et al. Fully distributed dynamic economical dispatching method for power system based on alternating direction multiplier method[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(5): 709-716.)
- [2] Ding T, Zhu S Y, Chen C L, et al. Differentially private distributed resource allocation via deviation tracking[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing Over Networks, 2021, 7: 222-235.
- [3] Yang T, Yi X L, Wu J F, et al. A survey of distributed optimization[J]. Annual Reviews in Control, 2019, 47: 278-305.
- [4] Xu Y, Han T R, Cai K, et al. A distributed algorithm for resource allocation over dynamic digraphs[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(10): 2600-2612.
- [5] Yang T, Lu J, Wu D, et al. A distributed algorithm for economic dispatch over time-varying directed networks with delays[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(6): 5095-5106.
- [6] Li H Q, Lü Q G, Liao X F, et al. Accelerated convergence algorithm for distributed constrained optimization under time-varying general directed graphs[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(7): 2612-2622.
- [7] Wang D, Wang Z, Wen C Y, et al. Second-order continuous-time algorithm for optimal resource allocation in power systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(2): 626-637.
- [8] Yi P, Hong Y G, Liu F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems[J]. Automatica, 2016, 74: 259-269.
- [9] Deng Z H, Liang S, Hong Y G. Distributed continuous-time algorithms for resource allocation problems over weight-balanced digraphs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(11): 3116-3125.
- [10] 时侠圣, 杨涛, 林志赞, 等. 基于连续时间的二阶多

- 智能体分布式资源分配算法[J]. 自动化学报, 2021, 47(8): 2050-2060.
- (Shi X S, Yang T, Lin Z Y, et al. Distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems in continuous-time[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(8): 2050-2060.)
- [11] Zhu Y N, Ren W, Yu W W, et al. Distributed resource allocation over directed graphs via continuous-time algorithms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(2): 1097-1106.
- [12] Zhu Y N, Wen G H, Yu W W, et al. Nonsmooth resource allocation of multiagent systems with disturbances: A proximal approach[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(3): 1454-1464.
- [13] Chen G, Guo Z. Initialization-free distributed fixed-time convergent algorithms for optimal resource allocation[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(2): 845-854.
- [14] Chen G, Yang Q, Song Y D, et al. A distributed continuous-time algorithm for nonsmooth constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(11): 4914-4921.
- [15] Bai L, Ye M J, Sun C, et al. Distributed economic dispatch control via saddle point dynamics and consensus algorithms[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27(2): 898-905.
- [16] Li D W, Li N, Lewis F. Projection-free distributed optimization with nonconvex local objective functions and resource allocation constraint[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(1): 413-422.
- [17] Guo Z J, Chen G. Predefined-time distributed optimal allocation of resources: A time-base generator scheme[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(1): 438-447.
- [18] Lian M, Guo Z, Wang X, et al. Adaptive exact penalty design for optimal resource allocation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3105385.
- [19] Guo Z Y, Lian M K, Wen S P, et al. An adaptive multi-agent system with duplex control laws for distributed resource allocation[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2022, 9(2): 389-400.
- [20] Hu W F, Yang C H, Huang T W, et al. A distributed dynamic event-triggered control approach to consensus of linear multiagent systems with directed networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(2): 869-874.
- [21] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. Automatica, 2015, 55: 254-264.
- [22] Shi X S, Zheng R H, Lin Z Y, et al. Distributed optimization for economic power dispatch with event-triggered communication[J]. Asian Journal of Control, 2020, 22(6): 2412-2421.
- [23] Huang H Y, Shi M, Xu Q. Consensus-based economic dispatch algorithm in a microgrid via distributed event-triggered control[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(15): 3044-3054.
- [24] Ding L, Wang L Y, Yin G Y, et al. Distributed energy management for smart grids with an event-triggered communication scheme[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27(5): 1950-1961.
- [25] Deng Z H, Wang L. Distributed event-triggered algorithm for optimal resource allocation of second-order multi-agent systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(14): 1937-1946.
- [26] Li Y S, Zhang H G, Liang X D, et al. Event-triggered-based distributed cooperative energy management for multienergy systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(4): 2008-2022.
- [27] Zhao T Q, Li Z H, Ding Z T. Consensus-based distributed optimal energy management with less communication in a microgrid[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(6): 3356-3367.
- [28] Li K X, Liu Q S, Zeng Z G. Quantized event-triggered communication based multi-agent system for distributed resource allocation optimization[J]. Information Sciences, 2021, 577: 336-352.
- [29] Bazarara M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear programming[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2005: 188-191.
- [30] Zhou H B, Zeng X L, Hong Y G. Adaptive exact penalty design for constrained distributed optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4661-4667.
- [31] Shi X S, Zheng R H, Yang T, et al. A distributed algorithm with event-triggered communication for resource allocation problem[C]. American Control Conference. Philadelphia, 2019: 3916-3921.

### 作者简介

时侠圣(1992—), 男, 讲师, 博士, 从事多智能体分布式优化等研究, E-mail: shixiasheng@zju.edu.cn;

徐磊(1994—), 男, 博士生, 从事非凸分布式优化的研究, E-mail: 2010345@stu.neu.edu.cn;

杨涛(1981—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息物理系统、复杂工业过程的分布式优化等研究, E-mail: yangtao@mail.neu.edu.cn.