

控制与决策

Control and Decision

正则/非正则最优控制方法在最优趋同控制的应用

张焕水, 徐娟娟

引用本文:

张焕水,徐娟娟. 正则/非正则最优控制方法在最优趋同控制的应用[J]. *控制与决策*, 2023, 38(8): 2203–2210.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0515>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

[脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制](#)

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

[输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化](#)

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

控制与决策. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

[一种具有非线性动力学模型的智能电网快速分布式控制](#)

A fast distributed control of smart grids with nonlinear dynamic model

控制与决策. 2021, 36(8): 1849–1854 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1696>

[参数未知的离散系统Q-学习优化状态估计与控制](#)

Q-learning optimal state estimation and control for discrete systems with unknown parameters

控制与决策. 2020, 35(12): 2889–2897 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0180>

正则/非正则最优控制方法在最优趋同控制的应用

张焕水^{1†}, 徐娟娟²

- (1. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590;
2. 山东大学 控制科学与工程学院, 济南 250061)

摘要: 趋同控制已得到广泛研究并取得重要进展,但具有最优指标约束的趋同控制仍然面临挑战. 基于此,研究多智能体系统最优趋同控制问题,基于正则/非正则最优控制方法提出新型分布式控制协议,使得半正定加权矩阵性能指标最小化的同时系统能够达到趋同. 特别地,所设计的控制协议由两部分组成:一部分是个体状态的反馈,目的是最小化性能指标;另一部分是相邻个体之间相对状态的反馈,目的是保证趋同.

关键词: 多智能体系统; 最优; 趋同; 分布式协议

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0515

引用格式: 张焕水,徐娟娟. 正则/非正则最优控制方法在最优趋同控制的应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2203-2210.

Optimal consensus control of multi-agent systems with regular/irregular optimal control method

ZHANG Huan-shui^{1†}, XU Juan-juan²

- (1. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China; 2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: The consensus control with optimal cost remains major challenging although consensus control problems have been well studied in recent years. In this paper, we study the consensus control of a multi-agent system associated with a given cost function. The main contribution is to present the distributed control protocol while minimizing the given cost function with positive semi-definite weighting matrix of control based on the regular/irregular optimal control. The derived controller is composed of two parts: One part is the feedback of the individual state which minimizes the cost function and the other part is the feedback of the relative states between the neighbours which guarantees the consensus. The presented results are novel to the best of our knowledge.

Keywords: multi-agent systems; optimization; consensus; distributed protocol

0 引言

多智能体系统趋同控制在自动化^[1]、分布式计算^[2]、编队控制^[3]等方面有着广泛的应用. 文献[4]和文献[5]研究了不同通信拓扑结构下的一阶积分器的趋同问题,包括有向及无向、固定及切换以及随机网络等情形;文献[6]研究了由二阶积分器组成的多智能体系统的趋同问题;文献[7]进一步研究了一类高阶多智能体系统的趋同问题;文献[8]和文献[9]分别得到了离散时间和连续时间多智能体系统趋同的充要条件.

近年来,分布式优化受到广泛关注. 文献[10]对分布式优化算法进行了总结归纳,文献[11]提出了一种基于分层控制框架的网联车辆有限时间轨迹优化和协同控制方法,文献[12]研究了二阶积分器型线性多智能体系统的分布式资源分配问题. 注意到考虑系统动态的性能指标在刻画能量消耗最小^[13-17]等方面具有广泛应用,因此最优趋同也成为分布式优化最热门的话题之一. 在最优趋同问题中,一个基本问题是在实现全局最优时通常需要全局信息,然而由于通信约束和传感器限制等条件,使得这种情况很难实

收稿日期: 2023-04-20; 录用日期: 2023-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61821004, 62250056); 山东省自然科学基金项目(ZR2021ZD14, ZR2021JQ24); 青岛西海岸新区科技项目(2019-32, 2020-20, 2020-1-4); 青岛市西海岸新区高层次人才团队项目(RCTD-JC-2019-05); 山东省重点研发计划项目(2020CXGC01208).

责任编辑: 刘腾飞.

[†]通讯作者. E-mail: hszhang@sdu.edu.cn.

现. 已有很多研究旨在某些预先指定的性能指标下寻找最优协议^[18], 文献[18]和文献[19]通过求解黎卡提方程得到了最优趋同协议. 然而, 最优控制器的分布式结构要求通信拓扑必须符合严格的条件. 具体而言, 在文献[18]和文献[20]中, 拓扑图必须是完备的. 在文献[19]中, 主从拓扑被限制为星形图, 要求每个跟随者都有一个指向领导者的有向路径. 文献[21]和文献[22]研究了多智能体系统的逆最优问题. 在逆最优问题中, 需要同时设计指标函数和分布式最优协议. 此外, 文献[23]和文献[24]研究了优化局部指标函数的分布式协议的设计问题. 文献[25]和文献[26]通过考虑线性二次调节器提出了两种趋同协议, 然而其趋同控制器是次优的.

注意到已有文献的大部分研究中, 指标函数的控制加权矩阵均被约束为正定, 这导致最小化指标函数的最优控制器存在唯一性, 也对使用智能体信息的最优控制器的结构做出了约束. 因此, 对于具有正定控制加权矩阵的情况, 同时满足分布式及最优的控制器设计是一个难题.

本文考虑多智能体系统的最优趋同控制. 由于针对控制加权矩阵正定的指标函数很少有最优分布式控制协议, 研究一类控制加权矩阵半正定的指标函数, 提出一种新型最优趋同协议, 在最小化给定指标函数的同时使得系统趋同. 具体而言, 设计的控制器由两部分组成, 其中一部分是使指标函数最小化的自身状态的反馈, 另一部分是保证趋同的邻居之间的相对状态反馈.

以下符号将在全文中使用: R^n 代表 n -维向量族; x' 代表 x 的转置; 对称矩阵 $M > 0 (\geq 0)$ 说明 M 严格正定(半正定), M^\dagger 被称作 M 的广义逆矩阵, 其满足 $MM^\dagger M = M$, $M^\dagger MM^\dagger = M^\dagger$, $(MM^\dagger)' = MM^\dagger$ 及 $(M^\dagger M)' = M^\dagger M$; 特别地, $LX = N$ 有解, 当且仅当 $LL^\dagger N = N$ ^[27], 等价地, 有 $\text{Range}(N) \subseteq \text{Range}(L)$, 其中 $\text{Range}(N)$ 代表 N 的值域.

1 问题描述

考虑一个多智能体系统

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $x_i \in R^n$ 是第 i 个智能体的状态; $u_i \in R^m$ 是第 i 个智能体的控制输入; A 、 B 是具有相容维数的常数矩阵; 初始值为 $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$. 第 i 个多智能体的指标函数如下:

$$J_i = \int_0^\infty [x_i'(t)Qx_i(t) + u_i'(t)Ru_i(t)]dt. \quad (2)$$

其中: $Q \geq 0$, $R \geq 0$.

定义1 如果对于任意初始值 $x_i(0)$, 存在一个分布式控制协议, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_j(t) - x_i(t)\|^2 = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N,$$

则称多智能体系统(1)是趋同的.

本文的目的是设计一类分布式控制协议, 保证多智能体系统(1)趋同, 并使指标函数 $\sum_{i=1}^N J_i$ 最小.

注1 对于趋同问题, x_i 和 x_j 通常不收敛于零. 然而对于无限时域分布式优化问题, 除了一阶积分器的情况外, 文献中的趋同值均为零, 参见文献[20]及其引用的相关文献. 与已有结果不同, 本文得到的最优趋同值可以非零.

注2 在已有文献中, 控制加权矩阵 R 被假设为正定矩阵, 因此最优控制器是唯一存在的. 然而, 最优控制器未必具有分布式结构, 因此, 优化和分布式的同时设计面临挑战. 本文通过考虑控制加权矩阵半正定的优化问题, 提出一类最优趋同协议.

2 预备知识

2.1 代数图论

本文中, 智能体之间的信息交换被建模为无向图. 用 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示一个图. 其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为顶点集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ 为对称的加权邻接矩阵. 在图 \mathcal{G} 中, 第 i 个顶点表示第 i 个智能体. $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 即在智能体 i 和智能体 j 之间有一个通信链路. 如果 \mathcal{G} 的任意两个不同的智能体之间存在一条路, 则无向图 \mathcal{G} 是连通的. 对于智能体 i , $d_i \doteq \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 被定义为智能体 i 的度. 对角矩阵 $\mathcal{D} \doteq \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$ 用于表示图 \mathcal{G} 的度矩阵. $L_G = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ 表示拉普拉斯矩阵. L_G 的特征值记为 $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, N$, 从小到大依次为 $0 = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$, 即无向图的拉普拉斯矩阵 L_G 至少有一个零特征值, 所有非零特征值都在右半平面内. 此外, L_G 恰好有一个零特征值当且仅当 \mathcal{G} 连通^[28].

在后面的讨论中, 假设通信拓扑是连通的.

2.2 单智能体系统的正则最优控制

在这一部分中, 研究单智能体系统的无限时域最优控制问题, 其中线性系统为

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t). \quad (3)$$

性能指标如下:

$$J = \int_0^\infty [x'(t)\bar{Q}x(t) + u'(t)\bar{R}u(t)]dt, \quad (4)$$

其中 \bar{A} 、 \bar{B} 、 \bar{Q} 、 \bar{R} 是具有相容维数的常数矩阵. 此外, \bar{Q} 和 \bar{R} 是非零半正定的.

引入 \bar{P} 满足如下代数 Riccati 方程 (ARE):

$$0 = \bar{A}'\bar{P} + \bar{P}\bar{A} + \bar{Q} - \bar{P}\bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}, \quad (5)$$

$$\bar{B}'\bar{P} = \bar{R}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}. \quad (6)$$

当 ARE (5) 的解满足条件 (6) 时被称为正则的, 相应的 LQ 问题被称为正则 LQ 问题^[29]. 通过利用正则 Riccati 方程 (5) 和 (6) 的可解性和特征矩阵的稳定性, 可以得到无限时域最优控制问题的可解性.

定理 1 存在最小化指标函数 (4) 的最优镇定解, 当且仅当如下两项成立:

- 1) ARE (5) 和 (6) 有半正定解 $P \geq 0$;
- 2) 系统 $(\bar{A} - \bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}, \bar{B}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R}))$ 可稳.

在这种情况下, 最优镇定解为

$$u(t) = -\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t) + (I - \bar{R}^\dagger\bar{R})z(t), \quad (7)$$

$$z(t) = Kx(t), \quad (8)$$

其中 K 使得如下矩阵稳定:

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P} + \bar{B}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R})K. \quad (9)$$

证明 充分性. 通过对 $x'(t)\bar{P}x(t)$ 求导可知

$$\frac{d[x'(t)\bar{P}x(t)]}{dt} = x'(t)(\bar{A}'\bar{P} + \bar{P}\bar{A})x(t) +$$

$$u'(t)\bar{B}'\bar{P}x(t) + x'(t)\bar{P}\bar{B}u(t).$$

进一步可得

$$x'(T)\bar{P}x(T) - x'(0)\bar{P}x(0) =$$

$$\int_0^T (-x'(t)\bar{Q}x(t) - u'(t)\bar{R}u(t) + [u(t) +$$

$$\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t)]'\bar{R}[u(t) + \bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t)])dt.$$

因此, 指标函数 (4) 可以重新表述为

$$J =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x'(t)\bar{Q}x(t) + u'(t)\bar{R}u(t))dt =$$

$$x'(0)Px(0) - \lim_{T \rightarrow \infty} x'(T)\bar{P}x(T) + \int_0^\infty ([u(t) +$$

$$\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t)]'\bar{R}[u(t) + \bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t)])dt. \quad (10)$$

利用 $\bar{R} \geq 0$, 可知最优控制器为

$$u(t) = -\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}x(t) + (I - \bar{R}^\dagger\bar{R})z(t),$$

其中 $z(t)$ 为具有适当维度的任意向量, 这与控制器 (7) 一致. 结合式 (8) 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

因此, 由式 (10) 得到最优指标为

$$J^* = x'(0)\bar{P}x(0).$$

必要性. 考虑如下 Riccati 微分方程:

$$0 = \dot{\bar{P}}_T(t) + \bar{A}'\bar{P}_T(t) + \bar{P}_T(t)\bar{A} +$$

$$\bar{Q} - \bar{P}_T(t)\bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}_T(t), \quad (11)$$

$$\bar{B}'\bar{P}_T(t) = \bar{R}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}_T(t), \quad (12)$$

其中 $\bar{P}_T(T) = 0$. 由正则 LQ 问题的可解性^[29], 即通过最小化指标函数 $J_T = \int_0^T [x'(t)\bar{Q}x(t) + u'(t)\bar{R}u(t)]dt$ 来求解关于式 (3) 的有限时域最优控制问题, 可知式 (11) 和 (12) 有半正定解 $\bar{P}_T \geq 0$. 此外, 最优指标为

$$J_T^* = x'(0)\bar{P}_T(0)x(0). \quad (13)$$

注意到 $\bar{Q} \geq 0, \bar{R} \geq 0$, 可以推导出当 $T_1 < T_2$ 时

$$J_{T_1} \leq J_{T_2}.$$

这意味着

$$\bar{P}_{T_1}(0) \leq \bar{P}_{T_2}(0).$$

另一方面, 利用最优镇定控制器的存在性, 系统是可镇定的, 进而存在一个镇定控制器使得 $\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 \leq e^{-\alpha t}x(0)$ 成立. 从而, 存在一个正数 c 使得

$$J_T \leq c.$$

结合式 (13), 可以得到矩阵 $\bar{P}_T(t)$ 的一致有界性, 因此, 存在 \bar{P} 使得 $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(0) = \bar{P}$. 注意到 $\bar{P}_T(t)$ 的时不变性, 即 $\bar{P}_T(t) = \bar{P}_{T-t}(0)$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_{T-t}(0) = \bar{P}.$$

此外, 显然可得 \bar{P} 满足方程 (5) 和 (6).

利用式 (10) 和 $\bar{R} \geq 0$, 可知最优控制器满足式 (7). 因此, 系统 (3) 变为

$$\dot{x}(t) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P})x(t) + \bar{B}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R})z(t).$$

如果 $(\bar{A} - \bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}, \bar{B}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R}))$ 不是可稳的, 则对于任意的初始值和任意的 $z(t)$, 相应的状态都会发散, 这与最优镇定控制器的存在性矛盾. \square

注 3 已有文献给出了保证式 (5) 的解存在的充分条件. 事实上, 注意到 $\bar{R} \geq 0$, 存在一个正交矩阵 \bar{T} 使得

$$\bar{T}'\bar{R}\bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}\bar{T} = [\bar{B}_1 \quad \bar{B}_2],$$

则式 (5) 和 (6) 可以重新表述为

$$0 = \bar{A}'\bar{P} + \bar{P}\bar{A} + \bar{Q} - \bar{P}\bar{B}_1\bar{R}_1^{-1}\bar{B}_1'\bar{P}, \quad (14)$$

$$\bar{B}_2'\bar{P} = 0. \quad (15)$$

方程 (14) 是一个标准的 ARE. 引用文献 [30] 的结果可知, 在 (\bar{A}, \bar{B}_1) 可镇定的条件下, 式 (14) 存在半正定解 $\bar{P} \geq 0$. 如果 (\bar{A}, \bar{B}_1) 可稳且 (\bar{A}, \bar{Q}) 可观, 则 ARE (5) 存在唯一的正定解 $\bar{P} > 0$, 且该解是镇定的, 即矩阵 $\bar{A} - \bar{B}_1\bar{R}_1^{-1}\bar{B}_1'\bar{P}$ 是稳定的.

2.3 单智能体系统的非正则最优控制

与正则情况相比, 非正则 LQ 问题在实际应用中广泛存在^[31-32]. 在本节中, 为了确保阅读的完整

性和方便性,以有限时域最优控制为例进行简要介绍.考虑系统(3),其中有限时域指标函数为

$$J(0, T) = \int_0^T [x'(t)\bar{Q}x(t) + u'(t)\bar{R}u(t)]dt + x'(T)\bar{H}x(T), \quad (16)$$

这里 $\bar{Q} \geq 0$, $\bar{R} \geq 0$, $\bar{H} \geq 0$ 是具有适当维数的对称矩阵.

通过引入微分 Riccati 方程

$$0 = \dot{\bar{P}}(t) + \bar{A}'\bar{P}(t) + \bar{P}(t)\bar{A} + \bar{Q} - \bar{P}(t)\bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}(t), \quad (17)$$

$\bar{P}(T) = \bar{H}$ 且 \bar{R}^\dagger 为伪逆^[33], 当

$$\text{Range}[\bar{B}'\bar{P}(t)] \not\subseteq \text{Range}(\bar{R}) \quad (18)$$

时,对于任意初始值的系统(3),寻找控制器最小化 $J(0, T)$ 的问题称为非正则 LQ 问题.

不失一般性,令 $\text{rank}(\bar{R}) = m_0 < m$, 则有 $\text{rank}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R}) = m - m_0 > 0$. 存在一个初等行变换矩阵 T_0 , 满足

$$T_0(I - \bar{R}^\dagger\bar{R}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Upsilon_{T_0} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中 $\Upsilon_{T_0} \in R^{[m-m_0] \times m}$ 是行满秩矩阵. 定义 $A_0(t) = \bar{A} - \bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'\bar{P}(t)$, $D_0 = -\bar{B}\bar{R}^\dagger\bar{B}'$, $[* \ B_0] = \bar{B}(I - \bar{R}^\dagger\bar{R})T_0^{-1}$, 并且引入 Riccati 方程

$$0 = \dot{\bar{P}}_1(t) + \bar{P}_1(t)A_0(t) + A_0'(t)\bar{P}_1(t) + \bar{P}_1(t)D_0\bar{P}_1(t), \quad (20)$$

其中 $\bar{P}_1(T)$ 是要确定的终端值, 则非正则 LQ 问题的可解性结果如下^[34].

引理 1 非正则 LQ 问题可解, 当且仅当存在满足 $0 = B_0'(T)[\bar{P}(T) + \bar{P}_1(T)]$ 的矩阵 $\bar{P}_1(T)$, 使得性能指标

$$\bar{J}(0, T) = J(0, T) + x'(T)\bar{P}_1(T)x(T) \quad (21)$$

正则, 并且控制器在最小化式(21)的同时使得 $\bar{P}_1(T)x(T) = 0$ 成立.

3 最优趋同控制

本节考虑多智能体系统(1)的分布式最优趋同问题.

定义

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1'(t) \ \cdots \ x_n'(t)]', \\ U(t) &= [u_1'(t) \ \cdots \ u_n'(t)]', \end{aligned}$$

则多智能体系统(1)可以重写为

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) + \bar{B}U(t). \quad (22)$$

其中: $\bar{A} = I_N \otimes A$, $\bar{B} = I_N \otimes B$.

性能指标 $\sum_{i=1}^N J_i$ 可以重写为

$$J = \int_0^\infty [X'(t)\bar{Q}X(t) + U'(t)\bar{R}U(t)]dt. \quad (23)$$

其中: $\bar{Q} = I_N \otimes Q$, $\bar{R} = I_N \otimes R$.

引入相应的 Riccati 方程

$$0 = A'P + PA + Q - PBR^\dagger B'P, \quad (24)$$

$$B'P = RR^\dagger B'P, \quad (25)$$

并且令 $\mathcal{A} = A - BR^\dagger B'P$, $\mathcal{B} = B(I - R^\dagger R)$. 通过应用适当的坐标变换, 存在一个可逆矩阵 T_1 满足 $T_1^{-1}AT_1 = \text{diag}\{\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_u\}$, 且有 $T_1^{-1}B = [\mathcal{B}_s \ \mathcal{B}_u]^T$. 其中: \mathcal{A}_s 是稳定的; \mathcal{A}_u 是不稳定的, 即 \mathcal{A}_u 的所有特征值不是在单位圆上就是在单位圆外. 由文献[30], 可得如下可解性结果.

引理 2 假设 $(\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u)$ 可稳, 则下列 Riccati 方程存在唯一正定解 $\mathcal{P}_u > 0$:

$$0 = \mathcal{A}'_u \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_u \mathcal{A}_u - \mathcal{P}_u \mathcal{B}_u \mathcal{B}'_u \mathcal{P}_u + I.$$

下面给出分布式最优趋同控制的主要结果.

定理 2 对于多智能体系统(1), 存在最小化

$\sum_{i=1}^N J_i$ 的最优趋同解, 当且仅当如下条件成立:

- 1) ARE (24) 和 (25) 存在半正定解 $P \geq 0$;
- 2) 系统 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 可稳.

在这种情况下, 其中一个最优趋同解为

$$u_i(t) = -R^\dagger B' P x_i(t) + (I - R^\dagger R) z_i(t), \quad (26)$$

$$z_i(t) = \mathcal{K} \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]. \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= [0 \ \mathcal{K}_u] T_1^{-1}, \\ \mathcal{K}_u &= \max \left\{ 1, \frac{1}{\min_{i=2, \dots, N} \lambda_i} \right\} \mathcal{B}'_u \mathcal{P}_u, \end{aligned} \quad (28)$$

且 $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ 是拉普拉斯矩阵 L_G 的非零特征值.

证明 充分性. 类似于式(10)的推导, 可得

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N x_i'(0) P x_i(0) - \sum_{i=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} x_i'(T) P x_i(T) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \int_0^\infty [u_i(t) + R^\dagger B' P x_i(t)]' R \times \\ &\quad [u_i(t) + R^\dagger B' P x_i(t)] dt. \end{aligned} \quad (29)$$

考虑到 $R \geq 0$, 最优控制器满足

$$0 = u_i(t) + R^\dagger B' P x_i(t) + (I - R^\dagger R) z_i(t),$$

其中 $z_i(t)$ 是一个具有相容维度的任意向量, 控制器

(26)由此可得. 将式(26)代入(1),可知

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \\ Ax_i(t) - BR^\dagger B'Px_i(t) + B(I - R^\dagger R)z_i(t) = & \\ Ax_i(t) + \mathcal{B}z_i(t). & \end{aligned} \tag{30}$$

进而,结合式(27)、(28)和(30),并定义

$$\delta(t) = [\delta'_2(t) \ \dots \ \delta'_N(t)]',$$

其中 $\delta_i(t) = x_i(t) - x_1(t)$,可得如下动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) = & \\ (I_{N-1} \otimes \mathcal{A})\delta(t) - (L_{22} + \mathbf{1}_{N-1}\alpha') \otimes (\mathcal{B}K)\delta(t). & \end{aligned}$$

其中

$$L_{22} = \begin{bmatrix} d_2 & -a_{23} & \cdots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & d_N \end{bmatrix},$$

$$\alpha = [a_{12} \ \dots \ a_{1N}]'.$$

由文献[8]可知,存在一个可逆矩阵 T_2 使得 $T_2^{-1}(L_{22} + \mathbf{1}_{N-1}\alpha')T_2 = \text{diag}\{\lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. 令

$$\tilde{\delta}(t) = [\tilde{\delta}'_2(t) \ \dots \ \tilde{\delta}'_N(t)]' \doteq T_2^{-1}\delta(t),$$

可得

$$\dot{\tilde{\delta}}(t) = [I_{N-1} \otimes \mathcal{A} - \text{diag}\{\lambda_2, \dots, \lambda_N\} \otimes (\mathcal{B}K)]\tilde{\delta}(t),$$

即

$$\dot{\tilde{\delta}}_i(t) = [\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{B}K]\tilde{\delta}_i(t), \quad i = 2, \dots, N. \tag{31}$$

进一步定义 $\bar{\delta}_i(t) = T_1^{-1}\tilde{\delta}_i(t)$,由式(31)可以给出如下动态方程:

$$\dot{\bar{\delta}}_i(t) = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_s & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_u \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} \mathcal{B}_s \\ \mathcal{B}_u \end{bmatrix} \mathcal{K}T_1 \right) \bar{\delta}_i(t).$$

结合 $\mathcal{K} = [0 \ \mathcal{K}_u]T_1^{-1}$,以上方程可以改写为

$$\dot{\bar{\delta}}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_s & -\lambda_i \mathcal{B}_s \mathcal{K}_u \\ 0 & \mathcal{A}_u - \lambda_i \mathcal{B}_u \mathcal{K}_u \end{bmatrix} \bar{\delta}_i(t).$$

由于矩阵 \mathcal{A}_s 和 $\mathcal{A}_u - \lambda_i \mathcal{B}_u \mathcal{K}_u$ 都是稳定的,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\delta}_i(t) = 0,$$

这表明多智能体系统(1)达到趋同. 另外,令 $y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$,可知

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t), \tag{32}$$

其中初值为 $y(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0)$. 因此,式(1)的趋同值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - e^{At}y(0)\|^2 = 0. \tag{33}$$

定义半正定矩阵 $V(t) = y'(t)Py(t)$,结合式(24),可以

得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = y'(t)(\mathcal{A}'P + P\mathcal{A})y(t) = & \\ - y'(t)(Q + PBR^\dagger B'P)y(t) \leq 0. & \end{aligned}$$

因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)Py(t) \doteq \alpha$, 其中 α 是一个非负常数. 接下来考虑有限时域最优控制问题: 对于系统 $\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t)$, 寻找控制器最小化指标函数 $J_T = \int_t^{t+T} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt$ 来证明 $\alpha = 0$.

定义如下存在一个半正定解的Riccati微分方程:

$$\begin{aligned} 0 = \dot{P}_T(t) + A'P_T(t) + P_T(t)A + & \\ Q - P_T(t)BR^\dagger B'P_T(t), & \\ B'P(t) = RR^\dagger B'P(t), & \\ P_T(T) = 0. & \end{aligned}$$

最优控制器如下给出:

$$u^*(t) = -R^\dagger B'P(t)x(t),$$

最优值为 $J_T^* = y'(t)P_T(0)y(t)$. 注意到 $Q \geq 0, R \geq 0$, 以及最优解的存在性,可以得到 $P_T(0) \geq 0$ 以及 $P_T(0)$ 的一致有界性,进而推出 $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0) = P$,其中 P 是方程(24)和(25)的解.

基于控制器 $u(t) = -R^\dagger B'Py(t)$,可知

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt = & \\ \int_t^{t+T} [y'(t)Qy(t) + y'(t)P'BR^\dagger B'Py(t)]dt = & \\ V(t) - V(t+T). & \end{aligned}$$

一方面,结合有限时域的最优控制,可得

$$V(t) - V(t+T) \geq y'(t)P_T(0)y(t) \geq 0.$$

利用 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \alpha$,可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)P_T(0)y(t) = 0$,因此

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y'(t)P_T(0)y(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} y'(t)Py(t) = 0,$$

即 $\alpha = 0$. 进而,可得

$$\begin{aligned} \|x'_i(t)Px_i(t) - y'(t)Py(t)\|^2 = & \\ \|[x_i(t) - y(t)]'P[x_i(t) - y(t)] + & \\ 2y'(t)P[x_i(t) - y(t)]\|^2 \leq & \\ 2\|[x_i(t) - y(t)]'P[x_i(t) - y(t)]\|^2 + & \\ 4\|y'(t)P[x_i(t) - y(t)]\|^2 \leq & \\ 2\|[x_i(t) - y(t)]'P[x_i(t) - y(t)]\|^2 + & \\ 4\|y'(t)Py(t)\|P^{\frac{1}{2}}[x_i(t) - y(t)]\|^2. & \end{aligned}$$

由式(33)可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x'_i(t)Px_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)Py(t) = 0.$$

结合式(29),最优指标为

$$J^* = \sum_{i=1}^N x'_i(0) P x_i(0). \quad (34)$$

必要性的证明与定理1的证明相似,此略. □

注4 1)当 $R = 0$ 时,分布式最优趋同问题可以退化为标准趋同问题. 定理2可以表述为:系统(1)的趋同控制存在,当且仅当系统 (A, B) 可稳. 事实上,当 $R = 0$ 时,由式(26)和(27)能够得到

$$u_i(t) = \mathcal{K} \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)].$$

其中: $\mathcal{K} = \max \left\{ 1, \frac{1}{\min_{i=2, \dots, N} \lambda_i} \right\} B' \hat{P}$, \hat{P} 满足 Riccati 方程

$$0 = A' \hat{P} + \hat{P} A + I - \hat{P} B B' \hat{P},$$

这与文献[8]中的定理2一致.

2)当 R 可逆时,由于最优控制器的存在唯一性,并且不存在分布式结构,一般不存在最优趋同控制器. 确保趋同的唯一方法是最优控制器保证所有智能体的稳定性,此时趋同值是零.

3)当 $R \geq 0$ 时,可以通过 $x_i(t)$ 的反馈形式设计 $z_i(t)$ 来实现平凡趋同,然而此时趋同值是零. 作为比较,使用相对状态反馈形式(27)的 $z_i(t)$,得到的趋同值是所有智能体状态的平均值,它与 Riccati 方程(24)和(25)有关,如下一节例2所示,它可能是非零的.

4 数值算例

例1 考虑分布式最优趋同优化问题,其中式(1)和(2)中的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情况下,式(24)和(25)的解是

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

易证 $\text{rank}(B, AB) = 2$,这意味着 (A, B) 是可控的,从而可稳. 令拓扑的 Laplacian 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

相应的特征值是0、1、3、4. 由定理2可知最优控制器为

$$u_i(t) = (I - R^\dagger R) z_i(t) =$$

$$(I - R^\dagger R) \max \left\{ 1, \frac{1}{\min_{i=2, \dots, N} \lambda_i} \right\} B' \mathcal{P} \times$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)],$$

其中 \mathcal{P} 是 Riccati 方程

$$0 = A' \mathcal{P} + \mathcal{P} A - \mathcal{P} B B' \mathcal{P} + I$$

的解. 通过求解上述 Riccati 方程,最优趋同协议是

$$u_i(t) = \max \left\{ 1, \frac{1}{\min_{i=2, \dots, N} \lambda_i} \right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \times$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]. \quad (35)$$

从式(34)可以看出,由于 $P = 0$,最优指标为零. 如图1所示,各状态之间的误差趋于零,这表明多智能体系统可以实现趋同.

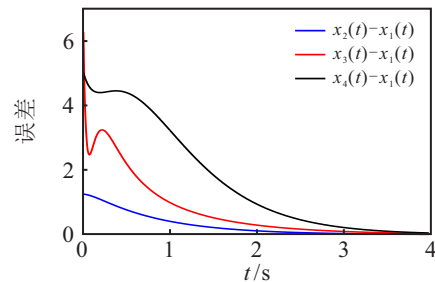


图1 状态误差轨迹

例2 这里给出一个例子说明当 $R > 0$ 时,常规的 LQ 问题是不可能达到趋同的;而当 R 被设定为非负定数时,趋同是可行的. 令多智能体的通信拓扑结构与例1中的相同,式(1)和(2)中的系统参数为 $A = 0, B = [1 \ 1], Q = 0$.

首先,令 $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,可得式(24)和(25)的解是 $P = 0$,相应的控制器(26)是 $u_i(t) = 0$. 因此,多智能体系统为 $\dot{x}_i(t) = x_i(t)$,初值为 $x_i(0)$. 显然,对于任何初值都不能达到趋同.

然后,令 $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 式(24)和(25)的解仍为 $P = 0$. 此时, $A = 0, B = [0 \ 1]$. 易证 $\text{rank}(B, AB) = 1$,这意味着 (A, B) 是可控的,从而可稳. 由定理2可知,存在最优趋同解,其中一个解可以从式(26)和(27)中得到,即

$$u_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_i(t),$$

$$z_i(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)].$$

此时, 闭环系统为 $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]$. 众所周知, 上述闭环多智能体系统能够达到趋同.

例2说明, 在 $R \geq 0$ 的情况下, 正则 LQ 问题达到趋同是可行的, 而在 $R > 0$ 的情况下是不可行的. 特别地, 趋同值为 $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i(0)$, 是非零的.

5 结论

本文研究了多智能体系统的最优趋同控制. 通过考虑控制加权矩阵半正定的指标函数, 设计了一类新型的分布式最优趋同协议, 以确保多智能体系统达到趋同的同时最小化 LQ 指标函数. 特别地, 所设计的趋同协议由两部分组成: 一部分是使指标函数最小化的个体状态反馈, 另一部分是保证趋同的基于邻居信息的相对状态反馈.

参考文献(References)

- [1] Liao F C, Lu Y R, Liu H Y. Cooperative optimal preview tracking control of continuous-time multi-agent systems[J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(10): 2019-2028.
- [2] Lynch N A. *Distributed algorithms*[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1996.
- [3] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [4] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [5] Hatano Y, Mesbahi M. Agreement over random networks[C]. 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Nassau, 2005: 2010-2015.
- [6] Zhang Y, Tian Y P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1195-1201.
- [7] Lin P, Li Z, Sun M, et al. High-order multi-agent consensus with dynamically changing topologies and time-delays[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(8): 976-981.
- [8] Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(5): 1263-1268.
- [9] You K Y, Xie L H. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(10): 2262-2275.
- [10] 杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望[J]. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50(11): 1413-1425. (Yang T, Chai T Y. Research status and prospect of distributed collaborative optimization[J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2020, 50(11): 1413-1425.)
- [11] 郭戈, 张忍永康, 杨冬琪, 等. 网联车辆有限时间分布式轨迹优化和协同控制[J]. *控制与决策*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0369. (Guo G, Zhang R Y K, Yang D Q, et al. Finite-time distributed trajectory optimization and collaborative control of connected vehicle platoon[J]. *Control and Decision*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0369.)
- [12] 时侠圣, 孙佳月, 徐磊, 等. 二阶智能体的分布式非光滑资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1336-1344. (Shi X S, Sun J Y, Xu L, et al. Distributed non-smooth resource allocation algorithm for second-order agents[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1336-1344.)
- [13] Chen S P, Li X J, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, 36(5): 1685-1702.
- [14] Lim A E B, Zhou X Y. Stochastic optimal LQR control with integral quadratic constraints and indefinite control weights[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(7): 1359-1369.
- [15] Schenato L, Sinopoli B, Franceschetti M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 163-187.
- [16] Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453-1464.
- [17] Zhang H S, Li L, Xu J J, et al. Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(10): 2599-2613.
- [18] Cao Y C, Ren W. Optimal linear-consensus algorithms: An LQR perspective[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 819-830.
- [19] Ma J Y, Zheng Y S, Wang L. LQR-based optimal topology of leader-following consensus[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(17): 3404-3421.

- [20] Zhang F F, Wang W, Zhang H S. Design and analysis of distributed optimal controller for identical multiagent systems[J]. Asian Journal of Control, 2015, 17(1): 263-273.
- [21] Movric K H, Lewis F L. Cooperative optimal control for multi-agent systems on directed graph topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 769-774.
- [22] Zhang H G, Feng T, Yang G H, et al. Distributed cooperative optimal control for multiagent systems on directed graphs: An inverse optimal approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(7): 1315-1326.
- [23] Bauso D, Giarré L, Pesenti R. Non-linear protocols for optimal distributed consensus in networks of dynamic agents[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55(11): 918-928.
- [24] Semsar E, Khorasani K. Optimal control and game theoretic approaches to cooperative control of a team of multi-vehicle unmanned systems[C]. IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control. London, 2007: 628-633.
- [25] Nguyen D H. A sub-optimal consensus design for multi-agent systems based on hierarchical LQR[J]. Automatica, 2015, 55: 88-94.
- [26] Gupta V, Hassibi B, Murray R M. A sub-optimal algorithm to synthesize control laws for a network of dynamic agents[J]. International Journal of Control, 2005, 78(16): 1302-1313.
- [27] Rami M A, Chen X, Zhou X Y. Discrete-time indefinite LQ control with state and control dependent noises[J]. Journal of Global Optimization, 2002, 23(3): 245-265.
- [28] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer, 2001.
- [29] Zhang H S, Xu J J. Optimal control with irregular performance[J]. Science China Information Sciences, 2019, 62(9): 1-14.
- [30] Zhang H S, Xu J J. Control for itô stochastic systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(1): 350-365.
- [31] Chen H F. Unified controls applicable to general case under quadratic index[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1982, 5(1): 45-52.
- [32] Ho Y C. Linear stochastic singular control problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1972, 9(1): 24-31.
- [33] Penrose R. A generalized inverse for matrices[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, 51(3): 406-413.
- [34] Zhang H S, Xu J J. The difference and unity of irregular LQ control and standard LQ control and its solution[J]. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2021, 27: S31.

作者简介

张焕水(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事最优控制、时滞系统、随机系统等研究, E-mail: hszhang@sdu.edu.cn;

徐娟娟(1984—), 女, 教授, 博士, 从事分布式趋同、最优控制、网络化控制等研究, E-mail: juanjuanxu@sdu.edu.cn.



特邀专家 张焕水, 1997年获东北大学工学博士学位, 1994年晋升为副教授, 1999年晋升为教授, 2003年8月受聘哈尔滨工业大学教授、博士生导师, 2006年当选山东省首批“泰山学者”, 并加入山东大学控制科学与工程学院, 2008年获得国家杰出青年科学基金, 2010年受聘教育部“长江学者”特聘教授。现为山东科技大学自动化学院特聘教授、山东大学控制学院教授。主要研究方向包括最优控制理论、随机系统、时滞系统、网络控制系统、分散式控制和博弈控制。曾担任IEEE Trans. on Automatic Control等国内外多种期刊编委。

专家寄语 值此东北大学百年华诞之际, 谨向母校致以最诚挚的祝贺! 祝贺母校为祖国富强做出的贡献, 祝愿母校人才辈出, 再创辉煌!