

# 控制与决策

Control and Decision

## 具有未知参数的非线性系统动态优化

付俊, 彭燕, 刘彦辉

引用本文:

付俊, 彭燕, 刘彦辉. 具有未知参数的非线性系统动态优化[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2223–2230.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0378>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

#### 基于反馈无源化的切换非线性系统 $H_\infty$ 跟踪控制

Passification-based  $H_\infty$  tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

#### 基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

控制与决策. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

#### 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599–608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

#### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 具有未知参数的非线性系统动态优化

付俊<sup>†</sup>, 彭燕, 刘彦辉

(东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110819)

**摘要:** 针对具有未知参数和不等式路径约束的非线性系统动态优化问题, 提出一种新颖有效的数值求解方法. 首先, 将未知参数视为一个动态优化问题的决策变量; 其次, 利用多重打靶法将无限维的含未知参数动态优化问题转化为有限维的非线性规划问题, 进而在不等式路径约束违反的时间段内, 用有限多个内点约束替代原不等式路径约束; 然后, 用内点法求解转化后的非线性规划问题, 在路径约束违反的一定容许度下, 经过有限多次步数迭代后得到未知参数值的同时得到控制策略, 并在理论上对所提出算法的收敛性进行相应证明; 最后, 对两个经典的含未知参数非线性系统的动态优化问题进行数值仿真以验证所提出算法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; 动态优化; 未知参数; 不等式路径约束; 多重打靶法; 内点法

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0378

引用格式: 付俊, 彭燕, 刘彦辉. 具有未知参数的非线性系统动态优化[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2223-2230.

## Dynamic optimization of nonlinear systems with unknown parameters

FU Jun<sup>†</sup>, PENG Yan, LIU Yan-hui

(State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract:** This paper proposes a novel and effective numerical solution method for dynamic optimization problems of nonlinear systems with unknown parameters and inequality path constraints. Firstly, the unknown parameters are regarded as decision variables of the dynamic optimization problem. Then, the infinite-dimensional dynamic optimization problem with unknown parameters is transformed into a finite-dimensional nonlinear programming problem by using the multiple shooting method. Furthermore, within the time interval where the inequality path constraints are violated, the path constraint of inequality is replaced by finite multiple interior point constraint. Moreover, the transformed nonlinear programming problem is solved by using the interior point method. Under a certain tolerance for the violation of path constraints, after finite number of steps iteration, the unknown parameter value is obtained and the control strategy is obtained, and then the convergence of the proposed algorithm is proved theoretically. Finally, two classic examples are given to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** nonlinear system; dynamic optimization; unknown parameters; inequality path constraint; multiple shooting method; interior point method

## 0 引言

动态优化是一类数学规划问题, 其目标函数和约束函数依赖于微分方程或差分方程的解<sup>[1-2]</sup>, 现已广泛地应用于电力系统<sup>[3-4]</sup>、化工行业<sup>[5-6]</sup>、绿色能源<sup>[7-8]</sup>和系统生物工程<sup>[9-10]</sup>等领域. 直接法<sup>[11]</sup>和间接法<sup>[12]</sup>是求解动态优化问题的主要数值算法. 间接法利用原问题的最优性条件来求解问题, 但是, 由于对状态变量和/或控制变量的相关约束, 增加了转化原问题

再进行求解的这一过程的难度<sup>[13]</sup>. 并且如果非线性系统结构比较复杂, 则利用最优性等条件转化原问题后得到的两点边值问题可能无法有效求解<sup>[14]</sup>. 直接法的常用方法主要有打靶法<sup>[15]</sup>和配点法<sup>[16]</sup>. 配点法将动态系统中的控制变量和状态变量同时离散化, 然后将其作为设计变量, 离散化的过程增加了后续非线性规划问题的求解规模, 使得最终的计算复杂度较高. 打靶法包括直接打靶法和多重打靶法: 直接打

收稿日期: 2023-03-30; 录用日期: 2023-06-11.

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(61825301).

责任编辑: 刘腾飞.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: junfu@mail.neu.edu.cn.

靶法将整个时间区域作为一整段进行处理,但由于对初值敏感,往往无法求得最优解;多重打靶法将整个时间区域分为若干段,在每个时间段内离散化控制变量.多重打靶法兼具直接打靶法和配点法的优势,可以通过合理的参数选择削减其缺点,是一种高效稳定的算法,鉴于此,本文采用多重打靶法来求解动态优化问题.

此外,为保障实际生产中的作业质量和安全,在动态系统的实际控制过程中,常常需要对某些状态变量和/或控制变量进行约束,使其函数值的变化范围在一定设定值内,因此,需要在满足不等式路径约束的前提下进行动态优化问题的求解.对于不等式路径约束, Gritsis 等<sup>[17]</sup>追踪不等式路径约束的最大违反处的位置,并大量离散化不等式路径约束以获得满足路径约束的解,然而这种方法会导致不连续. Floudas 等<sup>[18]</sup>针对优化问题利用凸函数来近似替代原路径约束,其主要思想是自适应构造低阶问题的凸松弛,用它们的 KKT 条件等价替换松弛的低阶问题,但是,这种方法主要应用于求解静态优化问题. Liu 等<sup>[19]</sup>将所有的不等式路径约束重新表述为不可微惩罚项并纳入目标函数,然后对惩罚项进行光滑处理,从而得到一个无不等式路径约束的光滑最优控制问题,但是,在后续的求解过程中,不等式路径约束的违反程度会导致目标函数的改变,从而使得获取目标函数的梯度信息十分困难.鉴于上述问题,本文设计一种能在一定容许度下满足不等式路径约束的算法.

另一方面,未知输入参数往往存在于非线性系统之中,难以避免,因此,具有未知输入参数的优化一直是系统工程中的一个重要问题.未知输入参数主要分为两类:未知常参数<sup>[20]</sup>和变量参数<sup>[21]</sup>.前者不随时间而改变,属于实数域;而后者随时间的变化而改变,在工业过程的某个操作阶段可以被直接测量或间接推导得出相应的数据.因此,本文考虑系统动态方程中包含不确定未知参数的动态优化问题.

本文的研究目的是求解具有不等式路径约束的含未知参数非线性系统的动态优化问题,本文的不确定参数是系统的一个时不变控制变量/输入.首先,对所研究的含未知参数非线性系统动态优化问题进行描述;其次,详细阐述本文所设计的算法及多重打靶法和路径约束的处理方法;然后,通过仿真实验验证算法的有效性;最后,总结全文并展望算法的可改进方向.本文的主要创新点如下:

1) 在保证未知参数求解精度的同时得到最优控制轨迹,解决了非线性系统存在的不确定性问题;

2) 在有效求解的同时满足不等式路径约束对动态系统的约束,算法在经过有限多次迭代后能求得在指定不等式路径约束违反的一定容许度下的 KKT 最优解;

3) 在违反段内处理连续不等式路径约束,有效避免了在整个时域将其大量离散化为点约束所带来的计算损耗.

## 1 问题描述

本文考虑具有不等式路径约束的含未知参数非线性系统的动态优化问题<sup>[22]</sup>,描述如下:

$$\min_{u(t)} J = \phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t), w) dt. \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), w), \quad \forall t \in T; \quad (2)$$

$$g(t, x(t), u(t), w) \leq 0, \quad \forall t \in T; \quad (3)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad (4)$$

$$u_l \leq u(t) \leq u_u, \quad \forall t \in T; \quad (5)$$

$$t_0 \leq t \leq t_f. \quad (6)$$

其中:  $n_w$  维向量  $w$  为非线性系统中的未知常数向量,不随时间  $t$  的变化而改变;  $n_x$  维状态变量  $x(t)$  和  $n_u$  维控制变量  $u(t)$  都是随时间  $t$  变化的函数;初始时间  $t_0$  和终止时间  $t_f$  在动态系统中都是固定不变的;动态系统特性由常微分方程组 (2) 和不等式路径约束 (3) 描述且初始状态为  $x_0$ ; 控制向量的上下界为  $u_l$  和  $u_u$ ; 目标函数由终端约束函数  $\phi(\cdot)$  和终端积分函数  $L(\cdot)$  组成.不失一般性,假设函数对各变量均连续可微.

本文研究的动态优化问题 (1)~(6) 可以简单描述为:在系统可行初始条件 (4) 下,满足不等式路径 (3) 和 (5)、(6) 的同时,求得针对系统的最优控制策略和未知参数的值,使得目标函数值最小.

## 2 算法描述

本文针对在不等式路径约束限制下的含未知参数非线性系统的动态优化问题,首先利用多重打靶法将无限维的含未知参数动态优化问题转化为有限维问题,未知参数也被视为决策变量加入到相应问题的求解中,使原问题的系统动态特性得以保留;然后,针对不等式路径约束采取逐点离散法的处理方式,在不等式路径约束的违反处,将该时间段内的不等式路径约束离散为有限个点约束;最后,在一定容许度内,经过有限次迭代后求得最优控制策略的同时求得未知参数.算法主要结构如图 1 所示.

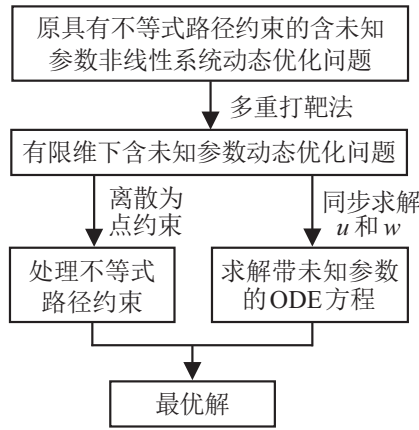


图1 算法主要结构

2.1 多重打靶法

多重打靶法的核心思想<sup>[23]</sup>是: 在离散的时间网络上将原问题中连续的控制变量进行参数化; 同时, 在每个时间段上将状态变量的初始值作为新的自由度纳入问题, 即将其同样作为待优化的参数, 再独立求解每个时间子区间的常微分方程组, 并引入辅助变量, 构造匹配条件来保证转化后状态轨迹的连续性. 于是原动态优化问题转化为一个有限维非线性规划问题, 再利用传统方法求解此非线性规划问题. 关于多重打靶法的收敛性, 文献<sup>[23-24]</sup>对此进行了详细的证明.

首先, 将动态优化问题的时间区域 $[t_0, t_f]$ 划分为 $N$ 个子区域 $T_k$ , 时间节点 $t_k$ 为固定值, 即

$$T_k = [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N; \tag{7}$$

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots \leq t_{N-1} \leq t_N = t_f. \tag{8}$$

在时间网格节点上对 $n_u$ 维控制变量 $u(t)$ 的第 $i$ 个分量 $u_i(t)$ 进行插值以近似表达控制向量随时间变化的曲线, 有

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^N u_i^k(t) \chi_k(t). \tag{9}$$

其中:  $u_i^k(t)$ 表示控制分量 $u_i(t)$ 在时间区间 $T_k$ 内的值; 单位开关函数为

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{k-1}, t_k]; \\ 0, & t \notin [t_{k-1}, t_k]. \end{cases} \tag{10}$$

$u_i^k(t)$ 可通过基函数插值近似为

$$u_i^k(t) \approx \sum_{k=0}^M \sigma_i^k [\Phi^k(t)]^M. \tag{11}$$

其中:  $\Phi^k(t)$ 是基函数,  $M$ 是基函数的阶.

控制参数 $\sigma_i^k$ 是线性组合系数, 可以通过选择不同的 $\Phi^k(t)$ 和 $M$ 来用不同的参数化方法表达 $u(t)$ . 本

文主要采用分段常数来参数化控制向量, 即

$$u_i^k(t) = \sigma_i^k. \tag{12}$$

本文针对非线性系统中存在的 $n_w$ 维未知参数向量 $w$ 的求解, 采取将 $w$ 也视为决策变量的方法, 且 $w$ 是常实数向量. 在前文中将控制变量 $u(t)$ 在整个时间区域内分为了 $N$ 段常数, 因此, 非线性系统中的第一个未知常数 $w_1$ 可视为第 $N + 1$ 段. 则多重打靶法中的控制参数可扩展为

$$\sigma = [\sigma_i^k \quad w]^T. \tag{13}$$

令状态变量在时间网络上进行打靶, 在靶段起点处引入辅助向量

$$s = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_{N-1}^T]^T, \tag{14}$$

其中 $s_k(k = 1, 2, \dots, N - 1)$ 表示状态变量 $x(t)$ 在每个靶段上的初始值. 这样, 在每个打靶区间内状态变量彼此都不相关, 原系统的动态方程可以作为初值问题(initial value problem, IVP)来求解, 有

$$\dot{x}_k(t) = f(\sigma_k, x_k(t), t), t \in [t_{k-1}, t_k]; \tag{15}$$

$$x_k(t_k) = s_k. \tag{16}$$

引入匹配条件作为等式约束以保证状态变量在整个时间区域上的连续性, 有

$$x_k(t_{k+1}) - s_{k+1} = 0. \tag{17}$$

上述多重打靶法的基本原理可以利用图2和图3来描述, 图2和图3分别为算法初始和终止时的状态变量和控制变量的示意图. 在起始阶段, 各个靶段的状态变量并不连续, 通过后续的数值迭代优化, 约束条件慢慢得到满足, 各个靶段的状态变量连接成为一条连续的曲线.

采用上述多重打靶法对原问题(1)~(6)进行处理, 得到如下通过确定控制参数 $\sigma$ 和辅助参数 $s$ 来求解的有限维NLP问题:

$$\min_{\sigma, s} J = \phi(t_f, x(t_f)) + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} L(t, x_k(t), \sigma_k) dt. \tag{18}$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^N f(t, x_k(t), \sigma_k); \tag{19}$$

$$g(t, x_k(t), \sigma_k) \leq 0; \tag{20}$$

$$x_k(t_k) = s_k; \tag{21}$$

$$x_k(t_{k+1}) - s_{k+1} = 0; \tag{22}$$

$$u_l \leq \sigma \leq u_u; \tag{23}$$

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k, k = 1, 2, \dots, N. \tag{24}$$

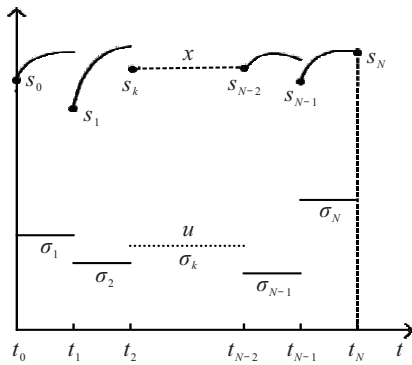


图2 多重打靶法初始阶段<sup>[24]</sup>

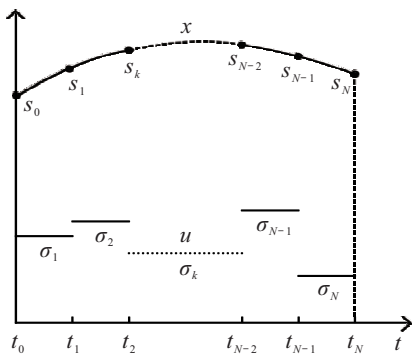


图3 多重打靶法终止阶段<sup>[24]</sup>

对于多重打靶法处理后的动态优化问题,可利用成熟的求解非线性规划问题的算法来求解. 本文采用四阶龙格-库塔法进行数值积分,求解每一个靶段内的状态变量,并利用内点法来求解NLP问题.

### 2.2 路径约束的处理

本节首先详细介绍所设计的算法步骤,然后对算法的收敛性进行理论证明.

#### 2.2.1 算法步骤

对于动态优化问题中的不等式路径约束,本文参考文献[25]中的方法进行处理:在整个连续时间区域内均需满足式(3);在违反约束的时间段内,通过对 $g(t)$ 的局部离散化,从而对式(1)和(2)构成的动态系统施加有限多个点约束,即

$$g(t_j, x(t_j), u(t_j), w) \leq 0, \quad (25)$$

其中 $t_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 是时间区域 $[t_0, t_f]$ 内 $M$ 个违反约束的离散时间点的集合. 更详细的内容可参见文献[25]. 下面给出本文求解不等式路径限制下的含未知参数非线性系统的动态优化问题的具体算法步骤.

step 1: 设置待优化参数的初值 $\sigma^{(0)}$ 和 $s^{(0)}$ ;初始化违反不等式路径约束的时间点集合 $T^{(0)} \in T$ ;设置有限且任意小的容许度 $\xi > 0$ 和分段数 $N$ ;令迭代次数 $l = 0$ .

step 2: 求解不带有不等式路径约束的问题,即求解由式(18)、(19)和(21)~(24)构成的问题.

step 3: 根据 $\sigma^{(l)}$ 和 $s^{(l)}$ 求解式(15)和(16)构成的初值问题,获得状态变量 $x(t|\sigma^{(l)}, s^{(l)})$ ,计算目标函数值 $J^{(l)}$ .

step 4: 在容许度 $\xi > 0$ 下检查 $g(t) \leq \xi$ 在时间段 $t \in [t_0, t_f]$ 的违反情况,将每个靶段中路径约束违反量最大的时间点添加到点集 $T^{(l)}$ 中,该点约束集合替代了式(3),更新 $T^{(l)}$ .

step 5: 使用内点法求解NLP问题,获得新的优化参数 $\sigma^{(l)}$ 和 $s^{(l)}$ .

step 6: 判断是否满足算法的终止条件. 若在容许度 $\xi > 0$ 下时间段 $t_j \in T^{(l)}$ 内 $g(t_j) \leq \xi$ ,则停止算法并输出结果;否则,令 $l = l + 1$ ,转step 3.

在上述迭代求解过程中,如果不满足不等式路径约束的限制,则算法会重复step 3~step 6的过程,不断迭代求解来调整优化参数 $\sigma^{(l)}$ 和 $s^{(l)}$ ,从而降低路径约束的违反程度直至收敛至一定容许度 $\xi$ 内. 将连续时间域内的 $g(t)$ 转化至有限个点约束的过程是收敛的,在下一节将对这部分内容进行证明,因此,整个动态优化算法能经过有限多次迭代最终找到满足指定容许度 $\xi$ 下的解.

#### 2.2.2 收敛性证明

对于上文中将路径约束转化至点约束的这一过程的收敛性分析,相应的证明过程如下.

对于式(3)中的每一个不等式路径约束 $g(t)$ ,满足以下假设:

假设1<sup>[26]</sup>  $g(t)$ 一阶可导,且 $|\dot{g}(t)| \leq L, L \geq 0$ ,对于 $t \notin S_N$ . 其中: $g(t)$ 上存在有界不连续的时间点集合为 $S_N$ 且 $S_N \in S_M, S_M$ 为有限集,即

$$S_M = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(\xi)} \equiv t_f\} \leq 0. \quad (26)$$

定理1 若式(3)中每一个不等式路径约束 $g(t)$ 对于假设1均满足,则对于 $g(t)$ 存在点集 $S_M$ 使得

$$g(t) \leq \xi, \xi > 0, t \in [t_0, t_f]. \quad (27)$$

证明 使用多重打靶法处理原动态优化问题后,时间区域被划分为 $N$ 段相等的时间段 $T_k$ ,在每个时间段 $T_k$ 上求解IVP问题时,对于其中任意一个小的单边开区间分段 $T_i = [t_i, t_{i+1}), T_i \in T, t_i < t_{i+1}$ ,因满足假设1,故可运用区间中值定理,得

$$|g(t) - g(t_i)| \leq (\sup_{\tau \in [t_i, t]} |\dot{c}(\tau)|) |t - t_i|, t \in T_i. \quad (28)$$

当 $|t_{i+1} - t_i| < \delta, \delta > 0$ 时,进一步放缩,可得

$$|g(t) - g(t_i)| \leq (\sup_{\tau \in [t_i, t]} |\dot{c}(\tau)|) |t_{i+1} - t_i| \leq L |t_{i+1} - t_i| \leq \xi, t \in T_i. \quad (29)$$

去除式(29)绝对值,移项后得

$$g(t_i) - \xi \leq g(t) \leq g(t_i) + \xi, t \in T_i. \quad (30)$$

将 $g(t_i) \leq 0$ 代入式(29),可得

$$g(t) \leq g(t_i) + \xi \leq \xi, t \in T_i. \quad (31)$$

同理,推广到时间区域 $[t_0, t_f]$ 上的每个子时间段 $T_i, i = 0, 1, \dots, N(\xi) - 1$ ,上式同样成立,故有

$$g(t) \leq \xi, t \in T, \quad (32)$$

其中 $N(\xi)$ 是 $\xi$ 的函数.对于有限的 $\xi > 0, N(\xi)$ 也有限. □

### 3 仿真实验

为了验证本文所提出算法求解动态优化问题的有效性,多重打靶法中使用等间隔的分段常数来近似,收敛容许度 $\xi$ 设为 $10^{-6}$ ,NLP求解器的求解精度设为 $10^{-6}$ ,对两个经典的含未知参数非线性系统的动态优化问题进行数值仿真实验.

#### 仿真1 最速下降问题.

本文首先选用最速下降问题<sup>[27]</sup>进行仿真实验,在原问题基础上加上不等式状态路径约束,引入未知参数 $w$ ,则数学模型可重新表述为

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J &= w. \\ \text{s.t. } \dot{x}_1(t) &= wx_3 \sin(u(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= -wx_3 \cos(u(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= 9.8w \cos(u(t)), \\ -(x_1(t) - 2)^2 - x_2(t) - 1 &\leq 0, \\ x(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T, \\ x(t_f) &= [10 \ -3]^T, \\ 0 &\leq u(t) \leq \pi, \\ 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (33)$$

求解时将控制变量的初始值设置为 $\pi/2$ ,使用内点法求解转化后的非线性规划问题,得到分段数 $N = 20$ 时的不等式路径约束曲线,控制曲线和路径约束曲线如图4和图5所示,此时未知参数 $w$ 的值为2.041 2108,详细结果见表1.

此外,将本文所提出的方法与文献[28]的方法进行了对比,对比结果如表1所示.本文算法在 $N = 20$ 时所求得的目标函数值为2.041 2108,小于文献[28]

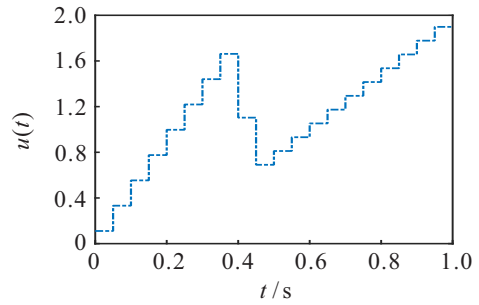


图4 控制曲线(仿真1)

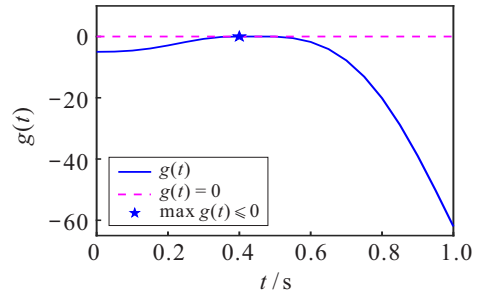


图5 路径约束曲线(仿真1)

表1 最速下降问题的求解结果

方法	分段数	目标函数值 $J$	计算时间/s
本文	20	2.041 2108	107.2
文献[28]	20	2.051 6	144.8

的目标函数值2.051 6,并且求解时间为107.2s,仅为文献[28]的74.03%.比较可知,本文所求得的目标函数值优于文献[28],体现了本文算法在计算精度上的优势.同时,本文算法所用计算时间少于文献[28]所用的时间,体现了本文算法在计算效率上的优势.

分析图4可知,图4中的控制轨迹满足原问题对其边界的约束.图5中:红虚线代表0,蓝实线代表不等式路径约束 $g(t)$ 的值,蓝色星星代表 $g(t)$ 的最大值.从图5中可以看到,在整个时域内都满足不等式路径约束,说明本文所提出的方法在处理不等式路径约束方面效果良好.

#### 仿真2 油页岩热解问题.

上面所使用的第1个算例是纯数学上的理论算例,为全面验证本文方法的优越性,本文选用更具有实际意义的油页岩热解问题作为本文的第2个仿真算例.油页岩热解问题是一个经典的化工过程系统的优化问题,油页岩中的有机物干酪根在热解后分解为热解沥青,通过加热反应产生的该产物经济价值很高.因此,此算例更具有现实意义.

参考文献[29], $x_1(t)$ 表示油页岩中的有机物干酪根浓度, $x_2(t)$ 表示热解沥青浓度,油页岩热解问题

的数学模型可表述为如下形式:

$$\begin{aligned}
 \min_{u(t)} J &= -x_2(t_f). \\
 \text{s.t.} \\
 \dot{x}_1(t) &= -w(k_1x_1 + (k_3 + k_4 + k_5)x_1x_2); \\
 \dot{x}_2(t) &= w(k_1x_1 - k_2x_2 + k_3x_1x_2); \\
 k_i &= \exp\left(a_i - \frac{b_i}{u(t)}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \\
 a_i &= (8.86 \quad 24.25 \quad 23.67 \quad 18.75 \quad 20.70); \\
 b_i &= \\
 &(10215.4 \quad 18820.5 \quad 17008.9 \quad 14190.8 \quad 15599.8); \\
 x_1(t) + x_2(t) - 1 &\leq 0; \\
 x(0) &= [1, 0]^T; \\
 698.15 \leq u(t) &\leq 748.15; \\
 0 \leq t &\leq 1.
 \end{aligned} \tag{34}$$

求解时将控制变量的初始值设置为723.15,使用内点法求解转化后的非线性规划问题,得到分段数  $N = 10$  时的不等式路径约束曲线,控制曲线和路径约束曲线如图6和图7所示,此时未知参数  $w$  的值为8.3502232,详细结果见表2.

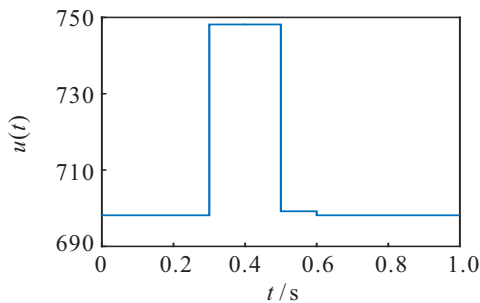


图6 控制曲线(仿真2)

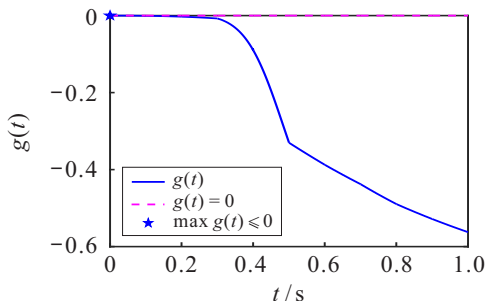


图7 路径约束曲线(仿真2)

表2 油页岩热解问题的求解结果

方法	分段数	目标函数值	参数 $w$	计算时间/s
本文	10	-0.353 606 38	8.350223 2	42.68
文献[29]	10	-0.353 606	8.350 1	-

本文方法能有效求解出未知参数的值,所求得的目标函数值  $-0.353\ 606\ 38$  与文献[29]的结果  $-0.353\ 606$  基本一致,但文献[29]未给出计算时间的值,故无法与本文进行比较.实际上,本文选取文献[29]中的算例作为本文仿真算例的初衷在于:本文所选取的第1个算例是纯数学上的理论算例,因此为全面验证本文方法的优越性,才选用了更具有实际意义的经典的化工过程中的油页岩热解问题作为本文的第2个仿真算例,更能体现本文方法对实际系统也具有相应的适用性.

分析图6可知,图中的控制轨迹满足原问题对其边界的约束.从图7中可以看到,在整个时域内都满足不等式路径约束,说明本文方法在处理不等式路径约束方面效果良好.

综合两个仿真实验,本文算法能在一定容许度内满足不等式路径约束,在求解出控制策略的同时能够求解出未知参数的值,从而验证了该方法在求解动态优化问题时的有效性.

## 4 结论

本文针对在不等式路径约束限制下的含未知参数的非线性系统的动态优化问题的求解,提出了一种有效求解该类型动态优化问题的算法.针对参数求解问题中模型线性化所导致的误差,本文将未知参数  $w$  和分段处理后的  $u(t)$  一同视为决策变量,达到同时精确求解的效果.针对不等式路径约束的处理,在约束违反的时间段内,该算法通过将原不等式路径约束离散为有限多个内点约束,并证明了可以在有限次数内收敛.最后,通过两个仿真实验的结果验证了该算法的有效性.本文所研究的未知参数在整个控制过程中保持不变,而实际工业生产过程中,动态模型中的参数可能会随着时间或加工环境的改变而变化.因此,下一步工作应研究含可变的未知参数的非线性系统的动态优化问题.

## 参考文献(References)

- [1] Fu J, Faust J M M, Chachuat B, et al. Local optimization of dynamic programs with guaranteed satisfaction of path constraints[J]. Automatica, 2015, 62: 184-192.
- [2] Hamza N, Sarker R, Essam D, et al. Evolutionary approach for dynamic constrained optimization problems[J]. Alexandria Engineering Journal, 2023, 66: 827-843.
- [3] 司方远, 韩英华, 袁怀通, 等. 计及混合潮流约束的热-电互联综合能源系统多目标优化调度[J]. 控制与决策, 2022, 37(1): 97-107.

- (Si F Y, Han Y H, Yuan H T, et al. Multi-objective optimization scheduling for integrated electricity and heating system including hybrid power flow constraints[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(1): 97-107.)
- [4] Gao C H, Liu W M, Zheng T T, et al. An improved optimal control strategy for hybrid AC/DC power system[J]. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2018, 188: 012093.
- [5] Bayón L, Fortuny Ayuso P, Otero J A, et al. Influence of enzyme production dynamics on the optimal control of a linear unbranched chemical process[J]. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2019, 57(5): 1330-1343.
- [6] Soares R M, Pinto J C, Secchi A R. An optimal control-based safety system for cost efficient risk management of chemical processes[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2016, 91: 471-484.
- [7] Wang L, Zhang G, Yin X, et al. Optimal control of renewable energy in buildings using the machine learning method[J]. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 2022, 53: 102534.
- [8] D'Amico G, Petroni F, Sobolewski R A. Optimal control of a dispatchable energy source for wind energy management[J]. *Stochastics and Quality Control*, 2019, 34(1): 19-34.
- [9] Bayen T, Cazenave-Lacroux H, Coville J, et al. Optimal control of microbial production in the chemostat[J]. *IFAC-Papers OnLine*, 2022, 55(16): 208-213.
- [10] Wang X W, Liu J, Dong X Z, et al. A symplectic pseudospectral method for constrained time-delayed optimal control problems and its application to biological control problems[J]. *Optimization*, 2021, 70(12): 2527-2557.
- [11] Luján J M, Guardiola C, Pla B, et al. Optimal control of a turbocharged direct injection diesel engine by direct method optimization[J]. *International Journal of Engine Research*, 2019, 20(6): 640-652.
- [12] Nasresfahani F, Eslahchi M R. Numerical solution of optimal control of atherosclerosis using direct and indirect methods with shooting/collocation approach[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2022, 126: 60-76.
- [13] Dal Bianco N, Bertolazzi E, Biral F, et al. Comparison of direct and indirect methods for minimum lap time optimal control problems[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2019, 57(5): 665-696.
- [14] Yazdaniyan Z, Shamsi M, Foroozandeh Z, et al. A numerical method based on the complementarity and optimal control formulations for solving a family of zero-sum pursuit-evasion differential games[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, 368: 112535.
- [15] Diedam H, Sager S. Global optimal control with the direct multiple shooting method[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2018, 39(2): 449-470.
- [16] Zhu G Z, Jie H, Hong W R. Nonlinear model predictive path tracking control for autonomous vehicles based on orthogonal collocation method[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2023, 21(1): 257-270.
- [17] Gritsis D M, Pantelides C C, Sargent R W H. Optimal control of systems described by index two differential-algebraic equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995, 16(6): 1349-1366.
- [18] Floudas C A, Stein O. The adaptive convexification algorithm: A feasible point method for semi-infinite programming[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2008, 18(4): 1187-1208.
- [19] Liu P, Li X Y, Liu X G, et al. An improved smoothing technique-based control vector parameterization method for optimal control problems with inequality path constraints[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2017, 38(4): 586-600.
- [20] Rooney W C, Biegler L T. Design for model parameter uncertainty using nonlinear confidence regions[J]. *AIChE Journal*, 2001, 47(8): 1794-1804.
- [21] Rooney W C, Biegler L T. Optimal process design with model parameter uncertainty and process variability[J]. *AIChE Journal*, 2003, 49(2): 438-449.
- [22] Fabien B C. Numerical solution of constrained optimal control problems with parameters[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, 80(1): 43-62.
- [23] Grimm W, Markl A. Adjoint estimation from a direct multiple shooting method[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997, 92(2): 263-283.
- [24] 黎向宇. 基于时间网格重构的多重打靶最优控制策略研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2017.  
(Li X Y. Research on optimal control strategy of multiple shooting based on time grid reconstruction[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2017.)
- [25] Chen T W C, Vassiliadis V S. Inequality path constraints in optimal control: A finite iteration  $\varepsilon$ -convergent scheme based on pointwise discretization[J]. *Journal of Process Control*, 2005, 15(3): 353-362.
- [26] 孙燕, 张弛, 路兴龙, 等. 具有不等式路径约束的微分代数方程系统的动态优化[J]. *自动化学报*, 2019, 45(5): 897-905.  
(Sun Y, Zhang C, Lu X L, et al. Dynamic optimization of differential-algebraic equations with inequality path constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(5): 897-905.)
- [27] Ashby N, Brittin W E, Love W F, et al. Brachistochrone with coulomb friction[J]. *American Journal of Physics*, 1975, 43(10): 902-906.

[28] 胡云卿. 基于控制变量参数化的带约束最优控制问题计算方法[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.  
(Hu Y Q. Calculation method of constrained optimal control problem based on parameterization of control variables[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013.)

[29] Floudas C A, Pardalos P M, Adjiman C, et al. Handbook of test problems in local and global optimization[M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 2013: 408-410.

作者简介

付俊(1979-), 男, 教授, 博士生导师, 从事动态优化、最优控制、切换系统及其应用等研究, E-mail: junfu@mail.neu.edu.cn;

彭燕(1998-), 女, 硕士生, 从事非线性系统、动态优化等研究, E-mail: swallowpeng@foxmail.com;

刘彦辉(1993-), 男, 博士生, 从事模型预测控制、事件触发、动态优化等研究, E-mail: cliku@outlook.com.



**特邀专家** 付俊, 教授, 博士生导师, 国家杰出青年科学基金获得者, 东北大学未来技术学院院长, 机器人学院常务副院长. 分别于2004年和2006年在东北大学获得控制科学与工程硕士和博士学位, 于2009年在加拿大康考迪亚大学获得机械工程博士学位, 2010~2014年在美国麻省理工学院担任博士后研究员. 出版 Springer 专著4部, 发表 IEEE 和 IFAC 汇刊论文70余篇. 获得2018年教育部青年科学奖(为自控管理领域首位获奖者)、2016年自动化学会青年科学家奖等奖项. 现为“IEEE TNNLS”“IEEE TII”“Control Engineering Practice”《自动化学报》和《系统工程学报》等期刊的编委(AE).

**专家寄语** 东北大学是我学习和工作的摇篮, 深切感谢母校的精心栽培. 身为东大学子, 值此东北大学百年诞辰之际, 祝福母校续历史之厚蕴, 育未来之栋梁, 展国家之宏图, 谱时代之华章.

下期要目

各向同性线性系统理论研究综述 ..... 周 彬, 等

深度神经网络学习率策略研究进展 ..... 刘云飞, 等

基于注意力机制与多尺度特征融合的电极缺陷 YOLO 检测算法 ..... 李雅雯, 等

竞争视角下考虑技术创新的逆向供应链微分博弈 ..... 王道平, 等

基于群智能的集中供暖系统水力管网控制策略优化 ..... 赵安军, 等

基于套索算法和改进正余弦优化支持向量回归的目标威胁估计 ..... 李 威, 等

多级信息补偿的U型网络图像超分辨率重建算法 ..... 宋昭漾, 等

基于非对称跨模态融合的RGB-D显著目标检测 ..... 于 明, 等

利用深度卷积特征的无人机视觉跟踪 ..... 杨帅东, 等

基于强化学习的固定翼飞机姿态控制方法 ..... 付宇鹏, 等

基于语义位置验证的鲁棒闭环检测算法 ..... 赵一夫, 等

基于自适应机制改进蚁群算法的机器人全局路径规划 ..... 毛文平, 等

基于路标点追踪的差速驱动机器人运动规划 ..... 刘延彬, 等