

# 控制与决策

Control and Decision

## 分布式反馈优化研究现状与发展

刘腾飞, 秦正雁, 姜钟平

引用本文:

刘腾飞, 秦正雁, 姜钟平. 分布式反馈优化研究现状与发展[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2301–2312.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0643>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

#### 分布式最小二乘估计中隐匿FDI攻击策略的设计

Hidden FDI attack strategy for distributed least square estimation

控制与决策. 2021, 36(8): 1963–1969 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1688>

#### 丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

控制与决策. 2021, 36(7): 1771–1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

#### 多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

#### 脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

# 分布式反馈优化研究现状与发展

刘腾飞<sup>1†</sup>, 秦正雁<sup>1</sup>, 姜钟平<sup>2</sup>

(1. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110819; 2. 纽约大学 坦登工学院, 纽约 11201)

**摘要:** 对于多自主体系统, 分布式反馈优化研究各个自主体如何利用自身状态及局部梯度信息的实时反馈值以及自主体之间的实时信息交换使整个多自主体系统的输出趋近于某个总体优化指标的最优值点. 在特定情况下, 分布式反馈优化可以简化为分布式优化或集中式反馈优化, 基于此介绍分布式反馈优化的研究现状与发展. 利用文献调查法和归纳推理法, 首先介绍分布式反馈优化的研究背景与意义以及相关领域发展现状; 然后分析分布式反馈优化的基本难点, 从线性系统和非线性系统两方面综述分布式反馈优化的研究现状; 最后展望未来发展方向.

**关键词:** 多自主体系统; 反馈优化; 分布式优化; 实时反馈值; 线性系统; 非线性系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0643

引用格式: 刘腾飞, 秦正雁, 姜钟平. 分布式反馈优化研究现状与发展[J]. 控制与决策, 2023, 38(8): 2301-2312.

## Distributed feedback optimization: Status and prospects

LIU Teng-fei<sup>1†</sup>, QIN Zheng-yan<sup>1</sup>, JIANG Zhong-Ping<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Tanden Institute of Technology, New York University, New York 11201, USA)

**Abstract:** For multi-agent systems, the problem of distributed feedback optimization is about forcing the output of the multi-agent system to converge to the optimizer of certain global cost function by means of a distributed controller that depends on the local state of each agent, the real-time feedback value of the local gradient information, and the real-time information exchange with other agents. In some special cases, the distributed feedback optimization problem can be reduced to a distributed optimization problem or a centralized feedback optimization problem. This paper reviews the current state of the art of distributed feedback optimization and discusses its outlook. Through literature survey and inductive reasoning, this paper first introduces the research background and significance of distributed feedback optimization and the development status of related fields, then analyzes the fundamental difficulties of distributed feedback optimization, and then summarizes the research status of distributed feedback optimization from the aspects of linear systems and nonlinear systems. Finally, this paper gives the future development direction.

**Keywords:** multi-agent systems; feedback optimization; distributed optimization; real-time feedback value; linear systems; nonlinear systems

## 0 引言

对于多自主体系统, 分布式反馈优化研究各个自主体如何利用自身状态及局部梯度信息的实时反馈值以及自主体之间的实时信息交换使整个多自主体系统的状态趋近于某个总体优化指标的最优值点. 通常, 每个自主体具有一定的动力学, 能获得其目标函数的实时梯度信息, 并称每个自主体对应的目标函数为局部目标函数, 所有自主体的总体优化指标为全局目标函数. 一类受到普遍关注的情形为: 全局目标函数是所有自主体局部目标函数的和函数, 并且要

求所有自主体的输出均收敛到该全局目标函数的最优值点. 通常, 不同自主体局部目标函数的最优值点不同, 而且并不是全局目标函数的最优值点, 因此不能通过每个自主体独立寻找其局部目标函数最优值点的方式寻找到全局目标函数的最优值点. 又因为每个自主体不能获得全局目标函数的梯度函数, 仅能获得其自身局部目标函数的实时梯度值, 所以需要通过对自主体之间实时信息交换的方式协同寻找全局目标函数的最优值点. 需要注意的是, 对于局部目标函数, 分布式反馈优化考虑利用其在自主体输出处的实

收稿日期: 2023-05-14; 录用日期: 2023-06-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1911401); 美国国家科学基金项目(EPCN-1903781).

责任编辑: 杨光红.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: tliu@mail.neu.edu.cn.

时梯度值作为反馈,而无需知道其梯度函数的具体形式.

分布式反馈优化问题在流程工业、电力系统、交通系统、多机器人系统等复杂系统的运行优化和控制中普遍存在<sup>[1-3]</sup>. 例如,在图1所示的多四旋翼飞行器组同时寻源和编队问题中,信号源在其周围产生一个未知信号场,每架四旋翼飞行器可以利用自身设备获得其所在位置处的信号场场强梯度值,但无法知道此信号场的场强函数具体表达式<sup>[4-6]</sup>. 控制目标是四旋翼飞行器形成期望的三角队形,并到达场强之和最大的3个位置. 此问题即是一个分布式反馈优化问题,其中,每个自主体代表一架四旋翼飞行器,局部目标函数为信号场场强函数,全局目标函数为所有局部目标函数之和,并且要求所有自主体在最优值点处满足代表三角队形的等式约束. 类似问题也出现在用机器人网络监测环境边界<sup>[7]</sup>和覆盖某个区域<sup>[8]</sup>等问题中. 相比于“先优化,后控制,优化不受控制效果影响”的串级结构,分布式反馈优化的相关研究成果能够在一定程度上提高控制品质,保证闭环系统在平衡点处的稳定性,并提高系统对干扰和环境变化的鲁棒性.

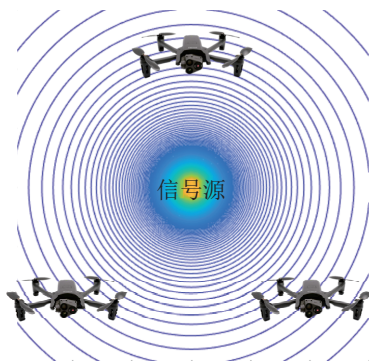


图1 多四旋翼飞行器组的同时编队与寻源场景

如果各个受控自主体的动力学模型可以抽象为一阶积分器,则分布式反馈优化通常可简化为分布式优化问题;如果能够设计统一的优化器和控制器,利用整个多自主体系统的状态和优化指标梯度信息进行寻优,则分布式反馈优化还原为集中式反馈优化问题. 分布式优化通常研究每个自主体如何利用其相应局部目标函数以及邻居自主体信息寻找到全局目标函数的最小值点,并且每个自主体的动力学为一阶积分器. 对于该问题,受到广泛关注的基于梯度的解决方法通常正是使用依赖于自主体输出的局部目标函数实时梯度值,因此是分布式反馈优化的特殊形式. 集中式反馈优化要求每个自主体能够使用所有自主体的状态以及全局目标函数实时梯度值,可以看

作每个自主体能够与系统中所有自主体进行信息交换的情形,因此是分布式反馈优化的特殊形式. 然而,许多系统具有比积分器更加复杂的动力学,并且仅能得到依赖于其自身状态或输出的局部目标函数实时梯度值,此时多个自主体协同寻优时必须考虑系统动力学的影响,超出了分布式优化研究的范围. 此外,许多自主体系统由于空间分布广或通讯资源受限等原因,以及出于提高系统鲁棒性或保密性的考虑,各自主体无法获得所有自主体的状态信息以及全局目标函数信息,此时自主体必须通过合作才能寻找到全局目标函数的最优值点,这是集中式反馈优化所做不到的.

## 1 相关领域发展现状

### 1.1 分布式优化的研究现状

有关分布式优化的研究可以追溯到20世纪80年代的分式计算<sup>[9]</sup>,最近的研究趋势是通过协调局部子优化问题的解寻找大规模全局优化问题的解<sup>[10-14]</sup>. 文献[15]利用多自主体系统求解优化问题

$$\min_{s \in \mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^N c_i(s). \quad (1)$$

其中:每个自主体能够获得局部目标函数  $c_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,而不能获得全局目标函数  $c(s) = \sum_{i=1}^N c_i(s)$ ;每个自主体的动力学模型为一阶差分器,通过与邻居进行信息交换使其状态收敛到优化问题(1)的最优解. 在近十多年中,人们已经将分布式优化算法从离散时间情况<sup>[15-23]</sup>推广到连续时间情况<sup>[24-34]</sup>,并且将信息交换拓扑从固定拓扑情况推广到时变拓扑情况<sup>[35-39]</sup>. 而且,最近的研究也从单积分器或双积分器形式的自主体发展到具有动态不确定性的一阶多自主体系统<sup>[40-41]</sup>、具有高阶线性动力学的多自主体系统<sup>[42-48]</sup>等. 此外,学者们还考虑了系统具有已知非线性动力学情形<sup>[45,49]</sup>,以及系统具有匹配不确定性的情形<sup>[50-54]</sup>. 在众多优秀成果中,下述两类算法在连续时间分布式优化算法中极具代表性,是许多分布式优化算法研究的基础. 针对连续时间一阶积分器型多自主体系统和优化问题(1),文献[25]通过推广经典优化算法中的原始对偶方法<sup>[55]</sup>,提出有向图情形下的分布式优化算法,即

$$\dot{r}_i = -\nabla c_i(r_i) - \rho \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j) - \sum_{j=1}^N a_{ij}(q_i - q_j), \quad (2)$$

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j). \quad (3)$$

其中:  $\rho$  为待设计参数,  $a_{ij} \geq 0, i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ . 之后, 文献[26]设计了如下优化算法:

$$\dot{r}_i = -\alpha \nabla c_i(r_i) - \beta \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j) - q_i, \quad (4)$$

$$\dot{q}_i = \alpha \beta \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j), \quad \sum_{i=1}^N q_i(0) = 0, \quad (5)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  为待设计参数. 与式(2)和(3)相比, 该算法通过对自主体初始状态施加约束, 取消了自主体  $i$  在整个寻优过程中接收其邻居自主体  $j$  状态  $q_j$  的要求, 需要较少的通讯量. 需要注意的是, 这两种算法均需要使用目标函数的梯度函数解析式, 并计算出其在辅助变量处的值作为反馈, 当目标函数时变或受到干扰时难以及时作出响应.

### 1.2 反馈优化的研究现状

人们对反馈优化的研究可以追溯到20世纪80年代的工业过程控制领域<sup>[56]</sup>, 在此基础上, 工业界逐步形成了至今仍广泛使用的实时优化框架<sup>[57]</sup>. 需要注意的是, 传统的实时优化仍然将优化层与控制层分离, 当控制层运行一段时间后将系统的实时信息(系统模型、目标函数等)发送给优化层进行优化算法更新, 得到控制层需要的新设定值, 如此循环往复. 最近十年, 关于反馈优化的研究侧重于利用与被控对象输出有关的信息设计优化与控制紧密融合的控制律, 使系统具有更快的响应速度和更强的鲁棒性. 文献[58]针对受到未知常值干扰影响的非线性系统, 考虑一类以其输出作为决策变量, 干扰作为优化问题参数的反馈优化问题, 所提出解决方案可以解释为针对恒定参考信号的标准输出调节方法的推广. 由于需要在算法更新的每个时刻求解一个有限维线性互补问题, 该方法在计算速度和精度上要求较高. 文献[59]考虑系统输出映射为状态的线性方程形式, 当该方程含有时变不确定项并且目标函数为时变函数时, 设计了依赖于系统输出的控制律, 使系统输出收敛到最优解附近的某个邻域内, 所提出方法可以解释为原始对偶投影梯度法的在线实现. 文献[60]考虑受到未知常值干扰影响的线性系统, 假设测量到的输出为状态、控制输入和干扰的非线性函数, 引入最优性模型概念, 并基于此模型解决反馈优化问题. 文献[61]考虑非线性系统的反馈优化问题, 并基于时间尺度分离方法给出了更加简洁的控制律设计方法. 文献[62]考虑受外部干扰影响的线性系统, 将原始对偶梯度投影算法与时间尺度分离方法相结合, 使系统的输出收敛到时变优化问题的最优解附近邻域内. 文献[61]的具体介绍及与现有文献的对比见例1.

**例1** 具有李普希茨连续动力学的非线性系统的反馈优化.

文献[61]考虑具有李普希茨连续动力学的非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (6)$$

其中:  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $u \in \mathbf{R}^p$  为控制输入,  $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$  为李普希茨连续函数. 假设: 1) 存在可微、李普希茨连续的映射  $h: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$  使  $f(h(u), u) = 0$  对于所有的  $u \in \mathbf{R}^p$  都成立; 2) 存在  $\tau, K > 0$  使得对于任意的初始状态  $x(0)$  和任意的常向量  $\hat{u}$ , 当  $u(t) \equiv \hat{u}$  时, 状态  $x$  的轨迹满足

$$|x(t) - h(\hat{u})| \leq K|x(0) - h(\hat{u})|e^{-\tau t}. \quad (7)$$

反馈优化的目标是利用  $\nabla \Phi(x, u)$  和  $u$  使系统的状态和控制输入渐近收敛到如下优化问题的解:

$$\min_{x, u} \Phi(x, u); \quad (8)$$

$$\text{s.t. } x = h(u). \quad (9)$$

其中  $\Phi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$  为连续可微的目标函数. 假设可以获得依赖于实时状态  $x(t)$  和实时控制输入  $u(t)$  的目标函数梯度值  $\nabla \Phi(x(t), u(t))$ , 考虑基于  $\nabla \Phi(x, u)$  和  $u$  的控制律

$$\dot{u} = -\epsilon[\nabla^T h(u), I_p] \nabla \Phi(x, u). \quad (10)$$

如果函数  $\Phi$  是李普希茨的, 并且具有紧的支撑集, 则存在正数  $\epsilon^*$ , 使得当选取  $\epsilon < \epsilon^*$  时, 系统的状态  $x$  和控制输入  $u$  渐近收敛到集合

$$\left\{ (x, u) : \frac{d\Phi(h(u), u)}{du} = 0, x = h(u) \right\}$$

内. 特别地, 如果  $\Phi$  是凸函数且  $h$  是线性函数, 则系统的状态  $x$  和控制输入  $u$  将渐近收敛到优化问题(8)和(9)的最小值点.

与经典优化算法相比, 上述控制器引入一个参数  $\epsilon$ , 仅需要调整该参数即可实现反馈优化目标. 从时间尺度分离的角度分析, 当系统(6)运行足够快, 并且控制器系统(10)运行足够慢时, 闭环系统可以实现反馈优化目标. 与文献[59, 63-64]相比, 该结果适用于更一般的系统. 与文献[58]相比, 所得到的控制律较为简洁.

## 2 分布式反馈优化的基本难点

针对优化问题(1), 若局部目标函数  $c_i$  的梯度函数  $\nabla c_i$  已知, 则可以直接使用串级控制器设计方法. 即首先利用现有分布式优化算法产生可以收敛到最优值  $y_*$  的参考信号  $p_i$ , 然后为自主体设计可以跟踪  $p_i$  的控制律<sup>[49-51]</sup>. 此时, 可以用标准的串级系统稳定性

分析方法分析闭环系统的稳定性.

在分布式反馈优化系统设定中,梯度函数 $\nabla c_i$ 不可知,唯一可用的梯度信息是实时输出 $y_i(t)$ 处的梯度测量值 $\nabla c_i(y_i(t))$ . 这种情况下,用梯度值直接替换现有分布式优化算法的梯度项会导致优化器和受控自主体之间相互关联. 具体而言,分布式优化器动态受到受控自主体跟踪误差的影响,而跟踪误差动态又受到分布式优化器产生的参考信号影响. 这使得基于串级分析方法的现有结果不再适用. 事实上,下面的例2表明,即使是一阶多自主体系统,串级控制器设计方法也是无效的.

**例2** 优化算法与跟踪控制律的串级设计方法失效.

考虑由两个自主体构成的多自主体系统( $N = 2$ ),第 $i$  ( $i = 1, 2$ )个自主体的动力学为

$$\dot{x}_i = u_i + y_i \theta_i, \quad (11)$$

$$y_i = x_i, \quad (12)$$

其中 $x_i, y_i, u_i, \theta_i \in \mathbf{R}$ 分别为状态、输出、控制输入和不确定参数. 局部目标函数为

$$c_1(r) = c_2(r) = \frac{1}{2}(r-1)^2. \quad (13)$$

描述信息交换拓扑的有向图为 $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ ,其中 $\mathcal{A} = [0, 1; 1, 0]$ . 可以验证,此情形满足文献[24]中所有假设,且 $\omega = 0.8, \vartheta = 1$ . 如果自主体 $i$  ( $i = 1, 2$ )可以获得梯度函数 $\nabla c_i$ 的解析形式,则可以用文献[24]中的分布式优化算法

$$\dot{r}_i = -\nabla c_i(r_i) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(r_i - r_j) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(q_i - q_j), \quad (14)$$

$$\dot{q}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(r_i - r_j) \quad (15)$$

为自主体 $i$ 产生参考信号 $r_i$ ,然后设计自适应控制律

$$u_i = -0.5(y_i - r_i) - y_i \hat{\theta}_i, \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = y_i(y_i - r_i) \quad (17)$$

来控制自主体的输出跟踪参考信号 $r_i$ . 此时的闭环系统具有串联结构,可以很容易地得到系统的稳定性和收敛性<sup>[65]</sup>.

然而,如第1节介绍的一样,在多四旋翼飞行器组同时寻源与编队等场景中, $\nabla c_i$ 的解析形式不可预先获得,从而无法计算得到 $\nabla c_i(r_i)$ ,但每个自主体 $i$ 可以利用自身装置测量得到其所在位置 $y_i$ 处 $\nabla c_i(y_i)$ 的值. 此时,一个简单的做法是将式(14)中的 $\nabla c_i(r_i)$ 替换为 $\nabla c_i(y_i)$ . 这种处理导致从受控自主体到分布式优化器具有反馈链路. 对于这种情况,针对串级系

统的稳定性分析方法不再有效. 例如,当 $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.2$ 时,图2给出的仿真结果表明,系统的状态会发生振荡. 图2初始状态为 $r(0) = [1, 2]^T, q(0) = [1, -1]^T, x(0) = [0, 1]^T, \hat{\theta}(0) = [1, -1]^T$ .

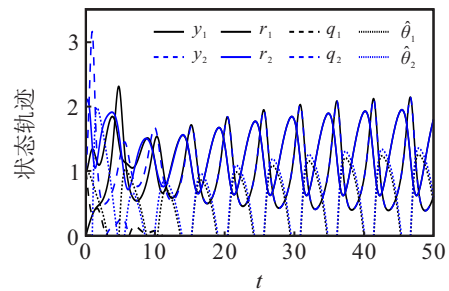


图2 使用梯度值 $\nabla c_i(y_i)$ 时闭环多自主体系统状态轨迹

特别地,分布式反馈优化面临如下基本难点:

- 1) 如何处理自主体的复杂动力学;
- 2) 如何利用自主体状态和局部目标函数梯度的实时反馈值寻找最优值点;
- 3) 如何分析由分布式优化器与受控自主体构成的闭环系统稳定性.

后续介绍分布式反馈优化的研究现状时所提及的文献在一定程度上突破了这3个基本难点.

### 3 分布式反馈优化的研究现状

随着分布式优化和反馈优化理论的发展,分布式反馈优化在最近几年受到关注. 文献[44, 63, 66]和[2, 53, 67-70]分别针对线性多自主体系统 and 非线性多自主体系统设计了分布式优化律. 具体地,文献[63]考虑一类动力学可转化为优化算法标准形式的线性多自主体系统,由经典优化理论直接保证实现分布式反馈优化目标. 文献[71]针对高阶积分器型多自主体系统,给出基于事件触发机制的分布式反馈优化解决方案,并考虑了状态受限的情形. 文献[72]针对受参数化不确定影响的高阶积分器型非线性多自主体系统,设计了有限时间分布式控制律,近似实现分布式反馈优化目标(即所有自主体的输出收敛到全局目标函数最小值附近的一个邻域内). 文献[44]利用层级控制思想,为模型已知的最小相位线性多自主体系统设计了分布式控制律,使每个自主体仅利用局部目标函数在其输出处的梯度值以及邻居自主体信息,实现所有自主体的输出收敛到优化问题(1)的最优解. 文献[73]同样利用层级控制思想,为高阶线性多自主体系统和受参数化不确定影响的高阶积分器型非线性多自主体系统设计了分布式控制律,保证可以实现分布式反馈优化目标. 文献[66]为具有特定参考跟踪能力的线性系统——I型系统设计分布式控制律,允许系统具有一定程度的不确定性,使分布

式反馈优化目标得以实现. 由文献[44, 66]可以发现, 层级控制思想有助于解决复杂多自主体系统的分布式反馈优化问题. 文献[67]针对不确定欧拉-拉格朗日系统描述的机械系统, 设计一类具有内外环结构的分布式控制律, 使具有强非线性和不确定性的该系统实现了分布式反馈优化目标. 文献[2]针对电网系统的社会福利最大化问题给出了分布式反馈优化控制器设计方法. 文献[68]基于小增益定理解决了一类含有不确定动态的非线性多自主体系统的分布式反馈优化问题, 并为严格反馈型自主体设计了串级非线性比例积分控制器, 使自主体具有期望的参考信号跟踪能力. 文献[69]基于自适应反步法解决了含有参数化不确定性的高阶多自主体系统的分布式反馈优化问题, 并给出了该结果的诸多推广性结果.

下面, 从线性多自主体系统和非线性多自主体系统两个方面详细介绍几个典型结果.

### 3.1 线性系统的分布式反馈优化

如下例3和例4分别给出文献[44]和文献[66]的具体结果以及与现有文献的对比.

#### 例3 最小相位系统的分布式反馈优化.

文献[44]考虑如下形式的线性多自主体系统:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad (18)$$

$$y_i = C_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

其中  $x_i \in \mathbf{R}^k$ ,  $y_i \in \mathbf{R}^m$  和  $u_i \in \mathbf{R}^m$  分别为自主体  $i$  的状态、输出和控制输入. 假设每个自主体是最小相位的, 并且具有相对度  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ . 分布式反馈优化的目标是每个自主体利用局部目标函数  $c_i$  在其输出  $y_i$  处的梯度值  $\nabla c_i(y_i)$  以及邻居自主体的信息使所有自主体的输出收敛到优化问题(1)的解. 为实现此目标, 文献[44]首先设计一个最优信号产生器, 然后将信号发生器嵌入反馈回路中得到一个嵌入式控制律. 所设计的控制律由3部分组成: 1) 用于将系统转化为标准形式的预补偿器; 2) 求解最优信号的最优信号发生器; 3) 控制自主体跟踪最优信号发生器产生的信号的参考跟踪控制器. 当信息交换图是无向连通图, 并且局部目标函数均是强凸的,  $\nabla c_i$  是李普希茨的时, 所设计的控制器可以保证系统实现分布式反馈优化目标. 通过利用李雅普诺夫逆定理和构造组合李雅普诺夫函数对闭环系统进行稳定性分析. 与现有文献大都考虑具有相对度  $(1, 1, \dots, 1)$  的一阶系统<sup>[24-26]</sup>或者具有相对度  $(k, k, \dots, k)$  的高阶积分器系统<sup>[42]</sup>相比, 此结果适用于更加一般的系统.

#### 例4 I型系统的分布式反馈优化.

文献[66]研究了控制系统的分析和综合中广泛使用的I型系统<sup>[74]</sup>构成的多自主体系统的分布式反馈优化问题. 由文献[74]可知, I型系统的输出能够渐近收敛到任何给定的恒定参考信号,  $r_i$  和  $y_i$  分别代表系统的参考输入和输出.

在系统设定中, 自主体  $i$  只能使用目标函数  $c_i$  的实时梯度值  $\nabla c_i(y_i)$  以及邻居自主体之间的信息交换. 在对目标函数和信息交换拓朴作一定假设后, 通过利用如下优化算法调整自主体的参考信号  $r_i$  可以使所有自主体的输出收敛到优化问题(1)的全局最优解  $\arg \min_{r \in \mathbf{R}^m} \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(r)$ :

$$\dot{r}_i = -\alpha \nabla c_i(y_i) - \beta \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j) - q_i, \quad (20)$$

$$\dot{q}_i = \alpha \beta \sum_{j=1}^N a_{ij}(r_i - r_j). \quad (21)$$

其中:  $\alpha$  和  $\beta$  为适当设计的参数, 初始状态满足  $\sum_{i=1}^N q_i(0) = 0$ . 通过构造I型系统对应状态空间模型的李雅普诺夫函数以及整个系统的组合李雅普诺夫函数进行闭环系统稳定性分析.

上述结果表明, 只要所有自主体都能被控制成I型系统, 那么分布式反馈优化问题便可以通过调整参考输入解决. 注意到, 在较为温和的条件下, 可以通过积分反馈的方式将一个可锁定的自主体变成I型系统. 与主要考虑高阶积分器的文献[42, 45, 71]和考虑最小相位系统的文献[44]相比, 此处自主体动力学具有更一般的形式. 与文献[43, 46-48, 73]相比, 此结果不需要假设目标函数与自主体动态之间的依赖关系, 也不需要自主体系统矩阵满足较为复杂的矩阵等式和矩阵秩关系.

### 3.2 非线性系统的分布式反馈优化

非线性和不确定性在自然界中广泛存在<sup>[65, 75-76]</sup>. 本节介绍基于无源性、小增益定理和自适应反步法等3种方法解决非线性多自主体系统分布式反馈优化问题的典型结果以及与现有文献的对比.

#### 3.2.1 基于无源性的方法

如下例5和例6分别给出机械系统和电网系统的分布式反馈优化问题解决方法.

#### 例5 机械系统的分布式反馈优化.

文献[67]研究了由  $N$  个如下不确定欧拉-拉格朗日系统描述的机械系统分布式反馈优化问题:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i = \tau_i. \quad (22)$$

其中:  $i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $[q_i^T, \dot{q}_i^T]^T \in \mathbf{R}^{2m}$  为自

主体状态,  $q_i$  为自主体输出,  $M_i(q_i) \in \mathbf{R}^{m \times m}$  和  $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbf{R}^{m \times m}$  为依赖于状态的未知矩阵,  $\tau_i \in \mathbf{R}^m$  为控制输入. 系统设定是: 每个自主体仅能利用局部目标函数  $c_i$  在其实时位置处的梯度值  $\nabla c_i(q_i)$  以及它相对于邻居自主体的位置  $q_i - q_j$ . 分布式反馈优化的目标是: 使每个自主体的输出都收敛到优化问题(1)的最优解, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = \arg \min_{r \in \mathbf{R}^m} \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i(r).$$

为此, 文献[67]提出如下分布式控制律:

$$\tau_i = -(\alpha_1 + \alpha_2 |\dot{q}_i|^2)(\dot{q}_i - q_i^d), \quad (23)$$

$$q_i^d = -\alpha_3 \nabla c_i(q_i) - \alpha_4 \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(q_i - q_j) - \xi_i, \quad (24)$$

$$\dot{\xi}_i = \alpha_3 \alpha_4 \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(q_i - q_j), \quad (25)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\alpha_4$  均为正数. 如图3所示, 所提出的分布式控制器具有内-外环结构. 其中: 内环和外环分别对应  $\dot{q}_i$  子系统和  $q_i$  子系统, 虚线箭头代表控制器使用了实时梯度值  $\nabla c_i(q_i)$ . 外环计算  $\dot{q}_i$  的期望值  $q_i^d$ , 内环使  $\dot{q}_i$  跟踪此期望值  $q_i^d$ . 当系统模型、目标函数和信息交换拓扑满足一定假设条件时, 该控制器可使系统实现分布式反馈优化目标. 通过利用欧拉-拉格朗日系统的无源性以及构造组合李雅普诺夫函数进行整个闭环系统的稳定性分析.

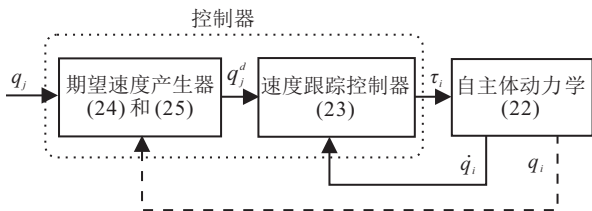


图3 具有内-外环结构的欧拉-拉格朗日系统的控制器

上面给出的以内-外环结构为特征的分布式控制器将分布式优化算法与非线性控制方法紧密融合, 解决了文献[77-78]需要知道目标函数的梯度函数和文献[79]仅能得到半全局结果的问题.

针对分布式反馈优化的应用, 文献[2, 80-83]和[5-7, 84]分别在智能电网和多机器人系统领域开展研究. 文献[80-81, 83]考虑线性电网模型, 主要通过将每个自主体的动力学重构为某类现有优化算法的形式解决分布式反馈优化问题, 一般称为逆向工程, 该方法对于非线性电网模型不再适用. 文献[2, 82]考虑非线性电网模型中的分布式反馈优化问题, 其中文献[2]利用基于无源的方法进行系统分析和控制器设计, 使每条母线的频率偏差收敛到零, 并且实现社会福利总体最大化; 文献[82]利用时间尺度分离方法进

行控制器设计, 解决了最优潮流控制问题. 例6详细介绍了文献[2]的结果.

例6 电网系统的分布式反馈优化.

文献[2]考虑由  $N$  条母线组成的电网系统, 第  $i$  条母线的动力学为

$$\dot{\delta}_i = \omega_i, \quad (26)$$

$$M_i \dot{\omega}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} B_{ij} E'_{qi} E'_{qj} \sin \delta_{ij} - A_i \omega_i + P_{gi} - P_{di}, \quad (27)$$

$$T'_{di} \dot{E}'_{qi} = E_{fi} - (1 - (X_{di} - X'_{di}) B_{ii}) E'_{qi} - (X_{di} - X'_{di}) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} B_{ij} E'_{qj} \cos \delta_{ij}. \quad (28)$$

其中:  $\delta_i \in \mathbf{R}$  为电压角,  $\omega_i = \omega_i^b - \omega^n$  为频率偏差,  $\omega_i^b \in \mathbf{R}$  为频率,  $\omega^n \in \mathbf{R}$  为标准频率,  $P_{di} \in \mathbf{R}$  为市场需要的电能,  $P_{gi} \in \mathbf{R}$  为产生的电能, 其余符号定义见文献[2].  $P_{gi}$  和  $P_{di}$  是控制输入, 记

$$P_g = [P_{g1}, P_{g2}, \dots, P_{gN}]^T,$$

$$P_d = [P_{d1}, P_{d2}, \dots, P_{dN}]^T.$$

定义社会福利为

$$S(P_g, P_d) = \sum_{i=1}^N S_{i1}(P_{di}) - \sum_{i=1}^N S_{i2}(P_{gi}),$$

$S_{i1}, S_{i2} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  分别为凹和凸的连续可微函数. 分布式反馈优化的目标是利用依赖于  $P_{gi}$  和  $P_{di}$  的  $\nabla S_{i1}(P_{di})$  和  $\nabla S_{i2}(P_{gi})$  使系统在实现零频率偏差的同时实现社会福利的最大化. 考虑如下优化问题:

$$\min_{P_g, P_d, v} -S(P_g, P_d) = \sum_{i=1}^N S_{i2}(P_{gi}) - \sum_{i=1}^N S_{i1}(P_{di}), \quad (29)$$

$$\text{s.t. } Dv - P_g + P_d = 0. \quad (30)$$

矩阵  $D = [D_{ij}]_{N \times N}$  的定义为: 如果母线  $j$  可以获得母线  $i$  的信息, 则  $D_{ij} = -1$  且  $D_{ji} = 1$ . 记优化问题(29)和(30)的解为  $(P_g^*, P_d^*, v^*)$ . 经分析, 分布式反馈优化目标可转化为使  $P_g$  和  $P_d$  渐近收敛到  $P_g^*$  和  $P_d^*$ .

考虑如下控制律:

$$\dot{P}_{gi} = -\nabla S_{i2}(P_{gi}) + \lambda_i - \omega_i, \quad (31)$$

$$\dot{P}_{di} = -\nabla S_{i1}(P_{di}) - \lambda_i + \omega_i, \quad (32)$$

$$\dot{v}_i = - \sum_{j=1}^N D_{ji} \lambda_j, \quad (33)$$

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{j=1}^N D_{ij} v_j - P_{gi} + P_{di}. \quad (34)$$

当母线动力学满足一定条件, 并且信息交换图是连通图时, 该控制律可使电网系统的  $P_{gi}$  和  $P_{di}$  渐近收敛

到  $P_g^*$  和  $P_d^*$ , 即实现分布式反馈优化目标. 通过利用电网系统的无源性以及构造组合李雅普诺夫函数进行整个闭环系统的稳定性分析.

上述分布式控制律是原始对偶方法与基于无源的控制器的设计方法相结合的产物. 与文献[63, 80-81]考虑线性模型描述的电网系统相比, 该结果考虑非线性模型描述的电网系统; 与文献[85]相比, 该结果对信息交换拓扑的要求更弱.

### 3.2.2 基于小增益定理的方法

文献[68]针对动力学包含不确定性的非线性多自主体系统, 基于小增益方法研究其分布式反馈优化问题. 具体地讲, 考虑由  $N$  个自主体组成的多自主体系统, 第  $i$  个自主体的动力学为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \tag{35}$$

$$y_i = g_i(x_i). \tag{36}$$

其中:  $i \in \mathcal{N}, x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  为状态,  $u_i \in \mathbf{R}^{m_i}$  为控制输入,  $y_i \in \mathbf{R}^n$  为输出,  $f_i : \mathbf{R}^{n_i} \times \mathbf{R}^{m_i} \rightarrow \mathbf{R}^{n_i}$  和  $g_i : \mathbf{R}^{n_i} \rightarrow \mathbf{R}^n$  分别为系统动力学和输出映射的局部李普希茨函数. 为使每个自主体的输出渐近收敛到优化问题(1)的解, 提出“下层是自主体, 上层是优化器, 中间层是参考信号跟踪控制器”的控制系统结构.

利用局部目标函数在自主体输出处的实时梯度值  $\nabla c_i(y_i)$  和邻居自主体信息, 设计如下分布式优化器计算期望输出:

$$\dot{r}_i = -\nabla c_i(y_i) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(q_i - q_j), \tag{37}$$

$$\dot{q}_i = \mu \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ji}(r_i - r_j). \tag{38}$$

其中:  $r_i, q_i \in \mathbf{R}^n$  为优化器状态,  $\mu > 0$  为待设计参数, 并将  $r_i$  作为自主体  $i$  输出  $y_i$  的参考信号. 记  $r = [r_1^T, r_2^T, \dots, r_n^T]^T, q = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T]^T$ . 为解决  $y_i \equiv r_i$  时  $(r, q)$  系统的平衡点不唯一带来的分析困难, 对其进行降维, 证明降维之后系统对参考信号跟踪误差作为输入是输入到状态稳定的.

只要每个自主体在某个参考信号跟踪控制器控制下, 对参考信号具有微分输入到状态稳定性描述的跟踪能力, 即可将闭环多自主体系统视为多个相互关联子系统构成的动态网络(见图4), 并用 Sontag 提出的输入到状态稳定性描述子系统之间的关联关系, 进而得到基于小增益定理的分布式优化器与参考信号跟踪控制器联合设计方法, 使多自主体系统实现分布式反馈优化目标. 图4中:  $V_0(Z)$  和  $V_i(X_i)$  分别为分布式优化器和受参考信号跟踪控制器控制的自主体的输入到状态稳定李雅普诺夫函数,  $\bar{y}_i$  为  $r_i$  与最优解的偏差,  $\tilde{y}_i = y_i - r_i$  为自主体的参考信号跟踪误差.

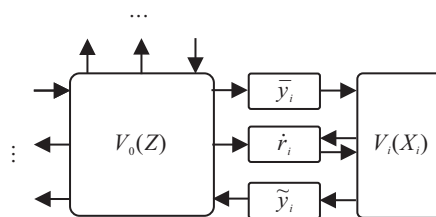


图4 受控多自主体系统的内部关联关系

如图5所示, 针对严格反馈型系统, 通过递归设计方法逐一处理  $x_{ij}$  子系统, 设计了一类串级比例积分分环路控制器, 使系统具有任意期望的输入到状态稳定增益, 并将此结果推广到输出反馈情形. 图5中: 对于  $i = 1, 2, \dots, n, m_i$  是正的常数,  $k_i$  是适当设计的非线性函数.

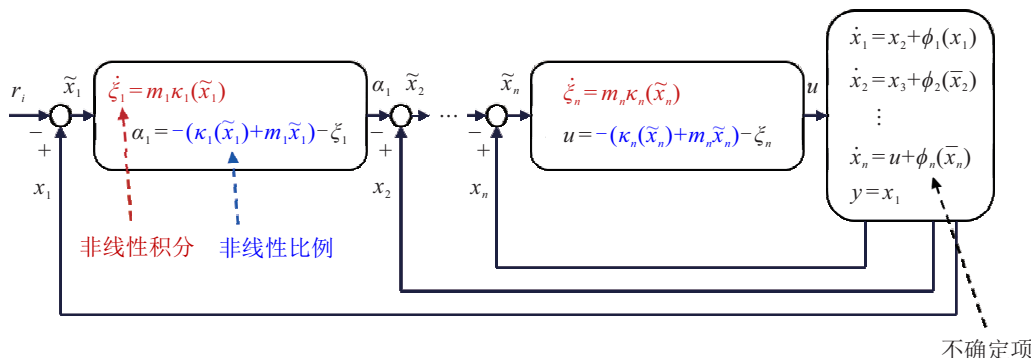


图5 串级非线性比例积分环路控制系统

与现有文献[40]和[44-45]分别考虑自主体具有一阶非线性不确定性和高阶线性动力学等情形相比, 文献[69]考虑具有非线性不确定性的更一般形式动力学, 并给出了系统性解决方案.

### 3.2.3 基于自适应反步法的方法

文献[69]将自适应反步法推广到分布式反馈优化领域, 解决具有参数化不确定性的非线性多自主体系统的分布式反馈优化问题. 具体地讲, 首先针对一

阶非线性不确定多自主体系统

$$\dot{x}_i = u_i + f_i^T(x_i)\theta_i, \quad (39)$$

$$y_i = x_i, \quad (40)$$

设计依赖于局部目标函数实时梯度值  $\nabla c_i(y_i)$  和自主体之间交换信息的分布式自适应优化算法如下:

$$u_i = -b_i(y_i - r_i) - f_i^T(x_i)\hat{\theta}_i, \quad (41)$$

$$\dot{r}_i = -\delta_1 \nabla c_i(y_i) - \delta_2 \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(r_i - r_j) - \delta_3 \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(q_i - q_j), \quad (42)$$

$$\dot{q}_i = \delta_4 \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(r_i - r_j), \quad (43)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i f_i(x_i)(y_i - r_i). \quad (44)$$

其中:  $b_i$ 、 $\delta_1$ 、 $\delta_2$ 、 $\delta_3$ 、 $\delta_4$  为正数,  $\Gamma_i \in \mathbf{R}^{w_i \times w_i}$  为正定矩阵. 借助组合李亚普诺夫函数证明闭环系统的稳定性, 并给出可以保证多自主体系统实现分布式反馈优化目标  $\delta_1$ 、 $\delta_2$ 、 $\delta_3$ 、 $\delta_4$ 、 $b_i$ 、 $\Gamma_i$  的选取方法. 进而考虑第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 个自主体的动力学为如下参数化严格反馈形式:

$$\dot{x}_{ik} = g_{ik}x_{i(k+1)} + f_{ik}^T(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})\theta_i, \quad k = 1, 2, \dots, n_i, \quad (45)$$

$$x_{i(n_i+1)} = u_i, \quad (46)$$

$$y_i = x_{i1}. \quad (47)$$

其中:  $[x_{i1}^T, \dots, x_{in_i}^T]^T \in \mathbf{R}^{n_i \times n}$  为状态,  $u_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  为控制输入,  $y_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  为输出,  $g_{ik} \in \mathbf{R}$  为虚拟控制系数,  $f_{ik}: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{w_i \times n}$  为局部李普希茨函数,  $\theta_i \in \mathbf{R}^{w_i}$  为未知参数. 不失一般性, 假设  $g_{ik} \neq 0$  且  $f_{ik}$  足够光滑. 将新型分布式自适应优化算法作为高阶系统控制器递归设计的初始步. 需要指出的是, 在递归设计过程中, 被控自主体与分布式自适应优化算法(即出现的  $\dot{r}_i$  这一项)之间存在非线性关联, 为了避免在接下来的步骤中使用  $\dot{r}_i$  (包含  $\nabla c_i(y_i)$  和邻居自主体状态  $r_j$ 、 $q_j$ ) 的导数, 在  $x_{i1}, \dots, x_{i(n_i-1)}$  子系统的虚拟控制器中不使用  $\dot{r}_i$ , 而是引入一个适当设计的非线性阻尼项  $\zeta_{ik}$ . 通过构造组合李雅普诺夫函数对闭环系统进行稳定性分析.

另外, 文献[69]也指出, 如果要保证所设计的分布式反馈优化控制器对于满足强凸和梯度李普希茨条件的任意目标函数都有效, 则描述信息交换拓扑的有向图必须含有生成树, 并且是权平衡的.

与文献[50-53]相比, 文献[69]考虑系统含有不匹配的参数化不确定性情形, 并且得到了控制系数未知、输出反馈和相对测量反馈等情形下的推广性

结果. 由于无法设计一个可使非线性不确定受控对象状态以指数收敛速度收敛到任意期望稳定状态的自适应控制器, 即使多自主体系统退化到  $N = 1$  情形, 文献[61]中基于时间尺度的方法也无法解决文献[69]研究的问题.

## 4 未来发展方向

分布式反馈优化已经得到国内外学者的广泛关注, 并在一定程度上突破了分布式反馈优化的3个基本难点, 实现了特定线性和非线性系统的分布式反馈优化. 然而, 现有结果均对目标函数、约束条件、自主体动力学、信息交换拓扑等具有较强要求, 无法解决更加一般的分布式反馈优化问题. 因此, 分布式反馈优化未来的发展方向如下:

1) 考虑更为一般的目标函数. 局部目标函数不需要满足强凸条件, 而仅是严格凸或者凸的, 甚至是非凸的. 局部目标函数不需要仅依赖于单个自主体自身的输出, 也可以依赖于邻居输出, 甚至所有自主体的输出, 即为耦合局部目标函数. 局部目标函数不需要是时不变的, 也可以是切换的或时变的. 局部目标函数的梯度函数不需要满足全局李普希茨条件, 而仅是局部李普希茨的, 甚至局部目标函数可以不具有梯度函数.

2) 考虑更为一般的约束. 约束条件不需要仅包含等式约束, 也可以包含不等式约束和集合约束, 并且不等式约束的函数映射以及集合约束的约束集合都可以是非凸的. 局部约束不需要仅依赖于单个自主体的输出, 也可以依赖于邻居输出, 甚至所有自主体的输出, 即为耦合约束. 局部约束不需要是时不变的, 也可以是时变的. 另外, 不需要仅对自主体的稳态输出提出约束, 也可以对自主体的输出或状态的暂态性能提出约束.

3) 考虑更为一般的动力学. 动力学不需要是时不变的、线性的、严格反馈的或全驱动的, 也可以是时变的、切换的、非线性的、前馈的、完全反馈的、非完整的和欠驱动的. 动力学包含的不确定性不需要是参数化的、时不变的或者具有已知上界函数的, 也可以是非参数化的、切换的、时变的或者具有未知上界函数的. 另外, 动力学不需要是连续的或确定性的, 也可以是离散的、混杂的或者随机的.

4) 考虑更为一般的关联拓扑. 关联拓扑不需要是固定的、强连通的或权平衡的, 也可以是切换的、时变的、随机跳变的、联合连通的或非权平衡的. 关联拓扑上的信息交换不需要是连续的、实时的或精确的, 也可以是离散的、混杂的、有时延的、周期性的、

事件触发的、随机发生的、量化的、饱和的,以及带有测量误差或随机干扰的。

5) 考虑更为一般的多时间尺度实现. 多时间尺度的实现方式不需要优化层、控制层与被控对象层均为连续时间情形,也可以是离散的优化层、连续的控制层与连续的被控对象层,或者离散的优化层、离散的控制层与连续的被控对象层,或者离散的优化层、连续的控制层与连续的被控对象层等诸多方式. 而且,不同时间尺度上子系统之间关联关系的描述方式不需要仅仅是线性关联,也可以是非线性关联,甚至是涉及微分和积分的关联。

#### 参考文献(References)

- [1] Dirza R, Matias J, Skogestad S, et al. Experimental validation of distributed feedback-based real-time optimization in a gas-lifted oil well rig[J]. *Control Engineering Practice*, 2022, 126: 105253.
- [2] Stegink T, de Persis C, van der Schaft A. A unifying energy-based approach to stability of power grids with market dynamics[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(6): 2612-2622.
- [3] Briñón-Arranz L, Renzaglia A, Schenato L. Multirobot symmetric formations for gradient and hessian estimation with application to source seeking[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2019, 35(3): 782-789.
- [4] Ogren P, Fiorelli E, Leonard N E. Cooperative control of mobile sensor networks: Adaptive gradient climbing in a distributed environment[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1292-1302.
- [5] Zhang F, Leonard N E. Cooperative filters and control for cooperative exploration[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 650-663.
- [6] Bayat B, Crasta N, Crespi A, et al. Environmental monitoring using autonomous vehicles: A survey of recent searching techniques[J]. *Current Opinion in Biotechnology*, 2017, 45: 76-84.
- [7] Bullo F, Cortés J, Martínez S. *Distributed control of robotic networks*[M]. Princeton, 2009.
- [8] Ataç G M, Stipanovi D M, Voulgaris P G. A swarm-based approach to dynamic coverage control of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108637.
- [9] Tsitsiklis J, Bertsekas D, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803-812.
- [10] Boyd S. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2010, 3(1): 1-122.
- [11] Nedi A, Olshevsky A, Rabbat M G. Network topology and communication-computation tradeoffs in decentralized optimization[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2018, 106(5): 953-976.
- [12] Nedi A, Liu J. Distributed optimization for control[J]. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 2018, 1(1): 77-103.
- [13] Yang T, Yi X L, Wu J F, et al. A survey of distributed optimization[J]. *Annual Reviews in Control*, 2019, 47: 278-305.
- [14] 王龙, 卢开红, 关永强. 分布式优化的多智能体方法[J]. *控制理论与应用*, 2019, 36(11): 1820-1833. (Wang L, Lu K H, Guan Y Q. Distributed optimization via multi-agent systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1820-1833.)
- [15] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.
- [16] Zhu M, Martínez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 151-164.
- [17] 娄有成. 多自主体系统的分布式集合协调与优化[D]. 北京: 中国科学院大学, 2013. (Lou Y C. Distributed set coordination and optimization of multi-agent systems[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2013.)
- [18] 衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用[J]. *中国科学: 数学*, 2016, 46(10): 1547-1564. (Yi P, Hong Y G. Distributed cooperative optimization and its applications[J]. *Scientia Sinica: Mathematica*, 2016, 46(10): 1547-1564.)
- [19] You K Y, Tempo R, Xie P. Distributed algorithms for robust convex optimization via the scenario approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(3): 880-895.
- [20] Mai V S, Abed E H. Distributed optimization over directed graphs with row stochasticity and constraint regularity[J]. *Automatica*, 2019, 102: 94-104.
- [21] 朱翰鑫. 电-气-热综合能源系统分布式优化调度研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2021. (Zhu H X. Research on distributed optimal dispatching of electricity-gas-heat integrated energy system[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2021.)
- [22] 贾楠. 多区域互联综合能源系统分布式优化运行研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2021. (Jia N. Research on distributed optimal operation of multi-regional interconnected comprehensive energy system[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2021.)
- [23] 花志浩. 综合能源系统需求响应及分布式优化调度方法研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2021.

- (Hua Z H. Research on demand response and distributed optimal scheduling method of integrated energy system[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2021.)
- [24] Wang J, Elia N. Control approach to distributed optimization[C]. The 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Monticello, 2011: 557-561.
- [25] Ghahesifard B, Cortés J. Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 781-786.
- [26] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. Automatica, 2015, 55: 254-264.
- [27] Yang S F, Liu Q S, Wang J. A multi-agent system with a proportional-integral protocol for distributed constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(7): 3461-3467.
- [28] Rahili S, Ren W. Distributed continuous-time convex optimization with time-varying cost functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(4): 1590-1605.
- [29] Liang S, Zeng X L, Hong Y G. Distributed nonsmooth optimization with coupled inequality constraints via modified Lagrangian function[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(6): 1753-1759.
- [30] Anderson T, Chang C Y, Martínez S. Distributed approximate Newton algorithms and weight design for constrained optimization[J]. Automatica, 2019, 109: 108538.
- [31] 陈明飞. 约束条件下的多智能体系统分布式优化[D]. 大连: 大连理工大学, 2019.  
(Chen M F. Distributed optimization of multi-agent system under constraints[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019.)
- [32] 田方正. 多智能体系统分布式优化问题及其在动态经济调度问题中的应用[D]. 南京: 东南大学, 2019.  
(Tian F Z. Distributed optimization problem of multi-agent system and its application in dynamic economic scheduling problem[D]. Nanjing: Southeast University, 2019.)
- [33] Wei Y, Fang H, Zeng X L, et al. A smooth double proximal primal-dual algorithm for a class of distributed nonsmooth optimization problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(4): 1800-1806.
- [34] 杨涛, 徐磊, 易新蕾, 等. 基于事件触发的分布式优化算法[J]. 自动化学报, 2022, 48(1): 133-143.  
(Yang T, Xu L, Yi X L, et al. Event-triggered distributed optimization algorithms[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(1): 133-143.)
- [35] Shi G, Johansson K H, Hong Y. Reaching an optimal consensus: Dynamical systems that compute intersections of convex sets[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(3): 610-622.
- [36] Qiu Z R, Liu S, Xie L H. Distributed constrained optimal consensus of multi-agent systems[J]. Automatica, 2016, 68: 209-215.
- [37] Li X, Xie L. Distributed algorithms for computing a fixed point of multi-agent nonexpansive operators[J]. Automatica, 2020, 122: 109286.
- [38] Maros M, Jalden J. A geometrically converging dual method for distributed optimization over time-varying graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(6): 2465-2479.
- [39] 刘洋. 时变非平衡图下多智能体分布式优化算法设计[D]. 大连: 大连理工大学, 2021.  
(Liu Y. Design of multi-agent distributed optimization algorithm under time-varying unbalanced graph[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021.)
- [40] Wang X H, Hong Y G, Ji H B. Distributed optimization for a class of nonlinear multiagent systems with disturbance rejection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(7): 1655-1666.
- [41] 段书晴, 陈森, 赵志良. 一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1559-1566.  
(Duan S Q, Chen S, Zhao Z L. Active disturbance rejection distributed optimization algorithm for first-order multi-agent disturbance systems[J]. Control and Decision, 2022, 37(6): 1559-1566.)
- [42] Zhang Y, Hong Y. Distributed optimization design for high-order multi-agent systems[C]. Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Piscataway: IEEE, 2015: 7251-7256.
- [43] Zhao Y, Liu Y, Wen G, et al. Distributed optimization of linear multi-agent systems: Edge-and node-based adaptive designs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(7): 3602-3609.
- [44] Tang Y T, Deng Z H, Hong Y G. Optimal output consensus of high-order multiagent systems with embedded technique[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(5): 1768-1779.
- [45] Xie Y J, Lin Z L. Global optimal consensus for higher-order multi-agent systems with bounded controls[J]. Automatica, 2019, 99: 301-307.
- [46] Li Z, Wu Z, Li Z, et al. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multi-agent systems with event-triggered mechanisms[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65: 1763-1770.
- [47] Zhang J, Liu L, Ji H B. Exponential convergence of distributed optimal coordination for linear multi-agent systems over general digraphs[C]. The 39th Chinese

- Control Conference. Shenyang, 2020: 5047-5051.
- [48] Li L, Yu Y, Li X, et al. Exponential convergence of distributed optimization for heterogeneous linear multi-agent systems[J/OL]. 2021, arXiv: 2101.04353v1.
- [49] Huang B M, Zou Y, Meng Z Y, et al. Distributed time-varying convex optimization for a class of nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(2): 801-808.
- [50] Ye M, Hu G. A robust extremum seeking scheme for dynamic systems with uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2016, 66: 172-178.
- [51] Tang Y T, Wang X H. Optimal output consensus for nonlinear multiagent systems with both static and dynamic uncertainties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(4): 1733-1740.
- [52] Li R, Yang G H. Optimal steady-state regulator design for a class of nonlinear systems with arbitrary relative degree[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(6): 4728-4740.
- [53] Pilloni A, Franceschelli M, Pisano A, et al. Sliding mode-based robustification of consensus and distributed optimization control protocols[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(3): 1207-1214.
- [54] 郭戈, 张忍永康, 杨冬琪, 等. 网联车辆有限时间分布式轨迹优化和协同控制[J]. 控制与决策, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0369. (Guo G, Zhang R Y K, Yang D Q, et al. Finite-time distributed trajectory optimization and collaborative[J]. Control and Decision, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0369.)
- [55] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [56] Morari M, Arkun Y, Stephanopoulos G. Studies in the synthesis of control structures for chemical processes, Part I: Formulation of the problem[J]. AIChE Journal, 1980, 26(2): 220-232.
- [57] Krishnamoorthy D, Skogestad S. Real-time optimization as a feedback control problem — A review[J]. Computers & Chemical Engineering, 2022, 161: 107723.
- [58] Jokic A, Lazar M, van den Bosch P P J. On constrained steady-state regulation: Dynamic KKT controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(9): 2250-2254.
- [59] Bernstein A, Dall'Anese E, Simonetto A. Online primal-dual methods with measurement feedback for time-varying convex optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(8): 1978-1991.
- [60] Lawrence L S P, Simpson-Porco J W, Mallada E. Linear-convex optimal steady-state control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(11): 5377-5384.
- [61] Hauswirth A, Bolognani S, Hug G, et al. Timescale separation in autonomous optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(2): 611-624.
- [62] Bianchin G, Cortés J, Poveda J I, et al. Time-varying optimization of LTI systems via projected primal-dual gradient flows[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 9(1): 474-486.
- [63] Zhang X, Papachristodoulou A, Li N. Distributed control for reaching optimal steady state in network systems: An optimization approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(3): 864-871.
- [64] Colombino M, Dall'Anese E, Bernstein A. Online optimization as a feedback controller: Stability and tracking[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 7(1): 422-432.
- [65] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. The 3rd edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [66] Liu T F, Qin Z, Jiang Z P. A new look at distributed optimal output agreement of multi-agent systems[J]. Automatica, 2022, 136: 110053.
- [67] Qin Z Y, Jiang L Z, Liu T F, et al. Distributed optimization for uncertain euler—Lagrange systems with local and relative measurements[J]. Automatica, 2022, 139: 110113.
- [68] Liu T, Qin Z, Hong Y, et al. Distributed optimization of nonlinear multi-agent systems: A small-gain approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(2): 676-691.
- [69] Qin Z Y, Liu T F, Jiang Z P. Adaptive backstepping for distributed optimization[J]. Automatica, 2022, 141: 110304.
- [70] 秦正雁. 不确定非线性多自主体系统的分布式反馈优化[D]. 沈阳: 东北大学, 2022. (Qin Z Y. Distributed feedback optimization of nonlinear uncertain multi-agent systems[D]. Shenyang: Northeastern University, 2022.)
- [71] 王东. 不同类别约束多智能体系统分布式优化与控制[D]. 大连: 大连理工大学, 2018. (Wang D. Distributed optimization and control of multi-agent systems with different class constraints[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.)
- [72] 王璐瑶. 几类非线性多智能体系统有限时间一致性及分布式优化[D]. 沈阳: 东北大学, 2018. (Wang L Y. Finite time consistency and distributed optimization of several nonlinear multi-agent systems[D]. Shenyang: Northeastern University, 2018.)
- [73] 朱浩. 高阶多智能体系统的分布式优化问题[D]. 北京: 北京邮电大学, 2020. (Zhu H. Distributed optimization problem of high-order multi-agent system[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2020.)
- [74] Franklin G F, Powell J D, Emami-Naeini A. Feedback

- control of dynamic systems[M]. The 6th edition. NJ: Pearson Higher Education, 2010.
- [75] Freeman R A, Kokotovic P V. state-space and Lyapunov techniques[M]. Boston: Birkhauser, 1996.
- [76] Su Y, Huang J. Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60: 2378-2389.
- [77] Zhang Y Q, Deng Z H, Hong Y G. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous euler-Lagrangian systems[J]. Automatica, 2017, 79: 207-213.
- [78] Zou Y, Meng Z Y, Hong Y G. Adaptive distributed optimization algorithms for euler-Lagrange systems[J]. Automatica, 2020, 119: 109060.
- [79] Deng Z H, Hong Y G. Multi-agent optimization design for autonomous Lagrangian systems[J]. Unmanned Systems, 2016, 4(1): 5-13.
- [80] Zhao C H, Topcu U, Li N, et al. Design and stability of load-side primary frequency control in power systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(5): 1177-1189.
- [81] Li N, Zhao C H, Chen L J. Connecting automatic generation control and economic dispatch from an optimization view[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2016, 3(3): 254-264.
- [82] Dörfler F, Bolognani S, Simpson-Porco J W, et al. Distributed control and optimization for autonomous power grids[C]. The 18th European Control Conference. Naples, 2019: 2436-2453.
- [83] Qu G N, Li N. Optimal distributed feedback voltage control under limited reactive power[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(1): 315-331.
- [84] Li Z, You K Y, Song S J. AUV based source seeking with estimated gradients[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2018, 31(1): 262-275.
- [85] Zhang X, Papachristodoulou A. A real-time control framework for smart power networks: Design methodology and stability[J]. Automatica, 2015, 58: 43-50.

### 作者简介

刘腾飞(1985—),男,教授,博士生导师,从事非线性系统稳定性理论、运动体安全控制、分布式反馈优化等研究, E-mail: tliu@mail.neu.edu.cn;

秦正雁(1991—),男,博士生,从事分布式反馈优化、分布式控制等研究, E-mail: qinzhengyan163@163.com;

姜钟平(1966—),男,教授,博士生导师,从事稳定性理论、鲁棒/自适应/分布式非线性控制、鲁棒自适应动态规划等研究, E-mail: zjiang@nyu.edu.



**特邀专家** 刘腾飞,教授,博士生导师,2014年至今在东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室从事教学科研工作. 曾入选青年千人计划,国家优秀青年科学基金获得者,主要研究领域为关联非线性系统的稳定性与控制. IEEE自动控制汇刊和 Automatica 发表论文30篇,出版中英文专著3部,曾获得中国控制会议“关肇直”奖及其他国际会议的多项论文奖,指导的研究生团队曾获得国际小型无人机竞赛室外组第1名,承担国家自然科学基金等项目多项,作为第三完成人获得国家自然科学二等奖.

**专家寄语** 一百年,知山川之伟大,知物产之丰美,知使命之重大. 吾辈将奋勉,知行合一,自强不息,学习知识,建设祖国.