

控制与决策

Control and Decision

各向同性线性系统理论研究综述

周彬, 任玉武, 姜怀远

引用本文:

周彬,任玉武,姜怀远. 各向同性线性系统理论研究综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(9): 2433–2443.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1221>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

控制与决策. 2021, 36(10): 2389–2398 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

基于反馈无源化的切换非线性系统 H_∞ 跟踪控制

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

基于Razumikhin方法的时变时滞非线性系统的输出反馈镇定

Output-feedback stabilization for nonlinear systems with time-varying delay based on Razumikhin-type approach

控制与决策. 2021, 36(11): 2812–2816 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0304>

各向同性线性系统理论研究综述

周彬^{1†}, 任玉武^{1,2}, 姜怀远¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001;
2. 中国航空工业集团公司洛阳电光设备研究所, 河南 洛阳 471023)

摘要: 各向同性线性系统作为一类特殊的线性系统, 不仅具有广泛的应用背景, 还具备许多一般线性系统不具有的特殊性质. 鉴于此, 系统地归纳总结各向同性线性系统的特点, 特别是这类系统与其对应的复系数线性系统之间的关联; 此外, 讨论对各向同性线性系统设计各向同性反馈的必要性, 并以航天器姿态控制系统为例介绍各向同性线性系统的具体应用实例; 结合几类常见的可用各向同性线性系统描述的工程控制系统, 对现有的相关结果进行归纳和介绍; 最后对各向同性线性系统进一步的研究方向进行简单的展望.

关键词: 各向同性线性系统; 复系数线性系统; 各向同性反馈; 航天器姿态控制

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1221

引用格式: 周彬, 任玉武, 姜怀远. 各向同性线性系统理论研究综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(9): 2433-2443.

An overview of isotropic linear systems theory

ZHOU Bin^{1†}, REN Yu-wu^{1,2}, JIANG Huai-yuan¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. The 613th Research Institute of AVIC, Luoyang 471023, China)

Abstract: As a special kind of linear systems, isotropic linear systems not only have a wide range of engineering application background, but also have many special properties that are not available in general linear systems. In this paper, the characteristics of isotropic linear systems are systematically summarized, especially the relationship between the isotropic linear systems and their corresponding complex coefficient linear systems. In addition, the necessity of designing isotropic feedback for isotropic linear systems is also discussed, and the spacecraft attitude control system is introduced as a specific application example of isotropic linear systems. Combining several common types of engineering control systems that can be described by isotropic linear systems, the study status and existing results of isotropic linear systems are briefly summarized and discussed. Further research directions are briefly introduced at the end of this paper.

Keywords: isotropic linear systems; complex-valued linear systems; isotropic feedback; spacecraft attitude control

0 引言

考虑如下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (1)$$

其状态、输入和输出分别为 $2n$ 、 $2m$ 和 $2p$ 维的列向量^[1], 表示为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

其中: $x_i \in \mathbf{R}^n$, $u_i \in \mathbf{R}^m$, $y_i \in \mathbf{R}^p$, $i = 1, 2$; 系统矩阵 $A \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, 控制矩阵 $B \in \mathbf{R}^{2n \times 2m}$, 输出矩阵 $C \in \mathbf{R}^{2p \times 2n}$ 和前馈矩阵 $D \in \mathbf{R}^{2p \times 2m}$ 形如

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix}.$$

这里: $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $C_i \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $D_i \in \mathbf{R}^{p \times m}$, $i = 1, 2$. 满足如上结构特点的各个矩阵 A 、 B 、 C 、 D 为各向同性矩阵, 具有此形式的线性系统称为各向同性线性系统^[2-5] (isotropic linear system). 需要说明的是, 在一些参考文献中, 将形如式(1)的线性系统称为对称线性系统 (symmetric linear system)^[1], 也有文献将其称为斜对称线性系统 (skew-symmetric

收稿日期: 2022-07-09; 录用日期: 2023-05-13.

基金项目: 国家自然科学基金杰出青年项目 (62125303); 国家自然科学基金基础科学中心项目 (62188101); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (HIT.BRET.2021008).

[†]通讯作者. E-mail: binzhou@hit.edu.cn.

linear system)^[6-8]. 但是一般而言,对称线性系统常用来表示具有 $A^T = A, C^T = B, D^T = D$ 形式的系统,其与斜对称线性系统都有自身特定的含义. 为避免混淆,本文称式(1)为各向同性线性系统. 易见,各向同性线性系统系数矩阵的维数必为偶数.

本文首先介绍卫星姿态和卫星动量轮姿态控制系统的动力学模型等典型的各向同性线性系统实例,以及各向同性线性系统的性质;然后介绍各向同性线性系统的研究现状;最后对相关问题进行总结和简单的展望.

为使符号统一且便于表示,给出以下符号说明: A^T 、 $A^\#$ 、 A^H 和 $\lambda(A)$ 分别表示矩阵 A 的转置、共轭、共轭转置和特征值集合. j 表示单位复向量,即 $j = \sqrt{-1}$. $R^{m \times n}$ 和 $C^{m \times n}$ 分别表示由所有 $m \times n$ 维实矩阵和 $m \times n$ 维复矩阵组成的集合. 当 $A \in R^{n \times n}, A > (\geq) 0$ 时,表示 A 是一个对称正定(半正定)实矩阵;当 $A \in C^{n \times n}, A > (\geq) 0$ 时,表示 A 是一个正定(半正定) Hermitian 矩阵; \otimes 表示 Kronecker 积.

1 典型实例——航天器姿态控制系统

为了直观地说明各向同性系统的应用,给出两个航天器姿态控制系统的典型实例.

首先考虑线性化的航天器姿态控制系统^[9]. 由于其俯仰系统的运动与滚转-偏航系统的运动是解耦的,在此不予考虑. 滚转-偏航系统线性化运动模型为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 4\omega_0^2\sigma_1q_1(t) - \omega_0(1 - \sigma_1)\dot{q}_3(t) = \frac{\tau_1(t)}{2J_1}, \\ \ddot{q}_3(t) + \omega_0^2\sigma_3q_3(t) + \omega_0(1 - \sigma_3)\dot{q}_1(t) = \frac{\tau_3(t)}{2J_3}. \end{cases}$$

其中: $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ 为姿态四元数; $\tau_1(t)$ 和 $\tau_3(t)$ 为控制力矩; $\sigma_1 = (J_2 - J_3)/J_1, \sigma_3 = (J_2 - J_1)/J_3, J_1, J_2, J_3$ 为航天器的转动惯量; ω_0 为航天器的轨道角速率.

取状态变量 $x = [q_1, \dot{q}_1, q_3, \dot{q}_3]^T$ 和控制变量 $u = [\tau_1(t), \tau_3(t)]^T$, 系统的线性化模型可以写为 $\dot{x} = Ax + Bu$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4\omega_0^2\sigma_1 & 0 & 0 & \omega_0(1 - \sigma_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega_0(\sigma_3 - 1) & -\omega_0^2\sigma_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2J_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2J_3} \end{bmatrix}.$$

当 $\sigma_1 = 0, \sigma_3 = 0, J_1 = J_3$ 时,上述系统成为各向同性线性系统,满足此条件的航天器也被称为惯量对称航天器^[10]. 这种航天器在航空航天工程中非常常用,且此条件可以保证滚转-偏航系统的 Lyapunov 稳定性^[9].

下面介绍卫星动量轮姿态控制系统的动力学模型^[11-12],对卫星和动量轮建立的坐标系如图1所示.

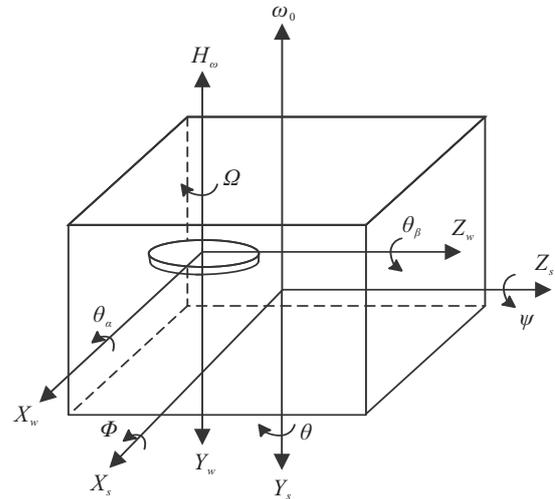


图1 卫星动量轮姿态控制系统

同样只考虑滚转-偏航系统,其线性化方程为

$$\begin{aligned} J_{sx}\ddot{\phi} + H_w\dot{\psi} + l_s\dot{\phi} + \omega_0H_w\phi + \\ J\ddot{\theta}_\alpha + H_w\dot{\theta}_\beta + \omega_0H_w\theta_\alpha &= T_x, \\ J_{sz}\ddot{\psi} - H_w\dot{\phi} + l_s\dot{\psi} + \omega_0H_w\psi + \\ J\ddot{\theta}_\beta - H_w\dot{\theta}_\alpha + \omega_0H_w\theta_\beta &= T_z. \end{aligned}$$

动量轮对应的线性化运动方程为

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi} + H_w\dot{\psi} + \omega_0H_w\phi + H_w\dot{\theta}_\beta + K_w\Omega\theta_\beta + \\ J\ddot{\theta}_\alpha + (K_w + d_w)\dot{\theta}_\alpha + (c_w + \omega_0H_w)\theta_\alpha &= 0, \\ J\ddot{\psi} - H_w\dot{\phi} + \omega_0H_w\psi - H_w\dot{\theta}_\alpha - K_w\Omega\theta_\alpha + \\ J\ddot{\theta}_\beta + (K_w + d_w)\dot{\theta}_\beta + (c_w + \omega_0H_w)\theta_\beta &= 0. \end{aligned}$$

其中: J_{sx} 和 J_{sz} 为卫星本体坐标系下 x 方向和 z 方向的整体横向转动惯量, J 为动量轮转子横向转动惯量, ϕ 和 ψ 为卫星的滚转和偏航姿态角度, H_w 为动量轮的角动量, ω_0 为轨道角速率, l_s 为实验室环境的能量耗散系数, θ_α 和 θ_β 为动量轮转子倾斜运动的相对角度, T_x 和 T_z 为卫星的外扭矩, K_w 为旋转阻尼系数, Ω 为动量轮转速, c_w 为径向轴承刚度, d_w 为定子能量耗散系数.

取状态变量 $x = [\phi, \theta_\alpha, \psi, \theta_\beta]^T$ 和控制变量 $u = [T_x, T_z]^T$, 则系统状态方程可以写成

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = B_0u. \tag{2}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} J_{sx} & J & 0 & 0 \\ J & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{sz} & J \\ 0 & 0 & J & J \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} l_s & 0 & H_w & H_w \\ 0 & K_w + d_w & H_w & H_w \\ -H_w & -H_w & l_s & 0 \\ -H_w & -H_w & 0 & K_w + d_w \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_0 H_w & \omega_0 H_w & 0 & 0 \\ \omega_0 H_w & c_w + \omega_0 H_w & 0 & K_w \Omega \\ 0 & 0 & \omega_0 H_w & \omega_0 H_w \\ 0 & -K_w \Omega & \omega_0 H_w & c_w + \omega_0 H_w \end{bmatrix}.$$

假设卫星整体对称,有 $J_{sx} = J_{sz} = J_s$. 容易看出 M 、 D 、 K 、 B_0 都是各向同性矩阵,因此这是一个“二阶”各向同性线性系统. 通过选择合适的状态变量,“二阶”各向同性线性系统可以转化为形如式(1)的各向同性系统. 为方便后文叙述,记所有维数为 $2p \times 2q$ 的各向同性矩阵集合为

$$\mathbf{S}^{p \times q} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} : A_i \in \mathbf{R}^{p \times q} \right\} \subset \mathbf{R}^{2p \times 2q}.$$

引理1^[13] 考虑形如式(2)的“二阶”各向同性线性系统,其中 $M, D, K \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathbf{S}^{n \times m}$, 且有

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m}.$$

假设 M 可逆,则 $M^{-1}D$ 、 $M^{-1}B_0$ 、 $M^{-1}K$ 也是各向同性矩阵. 在此基础上,设

$$M^{-1}D = \begin{bmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix}, M^{-1}K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ K_2 & K_1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}B_0 = \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}.$$

取增广状态变量 $X = [x_1^T, \dot{x}_1^T, x_2^T, \dot{x}_2^T]^T$ 和控制变量 $U = u$, 则系统(2)可以等价写成式(1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ -K_1 & -D_1 & K_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ -K_2 & -D_2 & -K_1 & -D_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & -B_2 \\ 0 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}.$$

需要指出的是,如果简单取增广状态变量 $X = [x^T, \dot{x}^T]^T$, 则对应的一阶系统不是各向同性线性系

统.

2 各向同性线性系统的性质

2.1 各向同性矩阵和对应的复矩阵

容易验证,各向同性矩阵具有如下性质^[13]:

- 1) $A, B \in \mathbf{S}^{p \times q} \implies A + B \in \mathbf{S}^{p \times q}$;
- 2) $A \in \mathbf{S}^{p \times q}, B \in \mathbf{S}^{q \times s} \implies AB \in \mathbf{S}^{p \times s}$;
- 3) $A \in \mathbf{S}^{p \times p} \implies A^{-1} \in \mathbf{S}^{p \times p}$;
- 4) $0 \leq A \in \mathbf{S}^{p \times p} \implies 0 \leq A^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}^{p \times p}$.

为方便讨论,考虑映射 $\phi: \mathbf{S}^{p \times q} \rightarrow \mathbf{C}^{p \times q}$, 有

$$\phi \left(\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \right) = A_1 + jA_2 \in \mathbf{C}^{p \times q},$$

其中 $A_1, A_2 \in \mathbf{R}^{p \times q}$. 由此可见, $\phi(A)$ 将各向同性矩阵 A 映射成一个复数矩阵. 定义其逆映射 $\phi^{-1}: \mathbf{C}^{p \times q} \rightarrow \mathbf{S}^{p \times q}$ ^[14] 为

$$\phi^{-1}(A_1 + jA_2) = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix},$$

则如下等式成立^[14]:

- 1) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), A \in \mathbf{S}^{p \times q}, B \in \mathbf{S}^{q \times s}$;
- 2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B), A, B \in \mathbf{S}^{p \times q}$;
- 3) $\phi(A^T) = (\phi(A))^H, A \in \mathbf{S}^{p \times q}$;
- 4) $\phi(A^{-1}) = (\phi(A))^{-1}, A \in \mathbf{S}^{p \times p}$;
- 5) $\phi(A^{\frac{1}{2}}) = (\phi(A))^{\frac{1}{2}}, A \in \mathbf{S}^{p \times p}$;
- 6) $A > (\geq) 0 \iff \phi(A) > (\geq) 0, A \in \mathbf{S}^{p \times p}$.

2.2 各向同性线性系统对应的复线性系统

针对系统(1),考虑如下状态和输入变换:

$$z = H_n x \triangleq \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, v = H_m u \triangleq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$H_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \otimes I_k, k \in \{m, n\}.$$

其中: $z_i \in \mathbf{C}^n, v_i \in \mathbf{C}^m, i = 1, 2$. 容易看出 $z_1 = z_2^\# = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + jx_2), v_1 = v_2^\# = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 + ju_2)$, 则系统(1)可以被等价表述为

$$\dot{z} = H_n A H_n^{-1} z + H_n B H_m^{-1} v = \begin{bmatrix} \phi(A) & 0 \\ 0 & \phi^\#(A) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \phi(B) & 0 \\ 0 & \phi^\#(B) \end{bmatrix} v.$$

在此基础上,变换后的线性系统可重写为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \phi(A)z_1 + \phi(B)v_1, \\ \dot{z}_1^\# = \phi^\#(A)z_1^\# + \phi^\#(B)v_1^\#. \end{cases}$$

注意到上式中第2个子系统可由第1个子系统的各变量取共轭得到,即其中一个子系统是冗余的. 因此,实数域的 $2n$ 维各向同性线性系统(1)可由复数域的 n 维线性系统

$$\dot{z}_1 = \phi(A)z_1 + \phi(B)v_1 \quad (3)$$

完全描述. 线性系统(3)也被称为各向同性线性系统(1)所对应的复系统^[1].

原系统与复系统之间有紧密的联系. 由

$$H_n A H_n^{-1} = \begin{bmatrix} \phi(A) & 0 \\ 0 & \phi^\#(A) \end{bmatrix}$$

可得如下结论.

引理2^[15] 设 $A \in \mathbf{S}^{n \times n}$, 任何 $\phi(A)$ 的特征值一定是 A 的特征值. 反之, 如果 s_0 是 A 的特征值, 则 s_0 或其复共轭 $s_0^\#$ 是 $\phi(A)$ 的特征值.

可以看出, 对于任何 $\phi(A)$ 的特征值 s_0 , s_0 或其复共轭 $s_0^\#$ 一定是 A 的特征值. 这进一步表明, 各向同性矩阵 A 的特征值必须为共轭复数对或成对出现的实数. 此外, 可以利用 $\phi(A)$ 的特征值集合 $\lambda(\phi(A))$ 推算出 A 的特征值集合 $\lambda(A)$ ^[1,15]. 进而各向同性线性系统与其对应的复线性系统的稳定性是等价的, 即各向同性线性系统是稳定的, 当且仅当其所对应的复线性系统是稳定的.

引理3^[16] 各向同性线性系统(1)的传递函数矩阵可表示为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} G_1(s) & -G_2(s) \\ G_2(s) & G_1(s) \end{bmatrix}.$$

对应的复系统(3)的传递函数矩阵为

$$\phi(G(s)) = \phi(C)(sI - \phi(A))^{-1}\phi(B) + \phi(D) = G_1(s) + jG_2(s).$$

各向同性线性系统与对应的复线性系统的能控(能稳)性和能观(能检测)性也是完全等价的.

引理4 设 $A \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{S}^{n \times m}$, 则 (A, B) 能控(能稳)当且仅当 $(\phi(A), \phi(B))$ 能控(能稳). 设 $A \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $C \in \mathbf{S}^{r \times n}$, 则 (A, C) 能观(可测)当且仅当 $(\phi(A), \phi(C))$ 能观(可测).

此外, 各向同性反馈能保持系统各向同性不变.

引理5 考虑各向同性线性系统(1)以及状态反馈 $u = Kx$, 如果 $K \in \mathbf{S}^{m \times n}$, 则闭环系统也是各向同性线性系统. 类似地, 考虑输出反馈 $u = Fy$, 如果 $F \in \mathbf{S}^{m \times p}$, 则闭环系统也是各向同性线性系统.

2.3 与各向同性线性系统相关的代数方程

本节给出几个与各向同性线性系统相关的代数方程的解的性质. 虽然相关结论的证明比较简单, 但由于没有在文献中找到明确的陈述, 为了完整性, 本文给出简略的证明.

引理6 设 $A \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{S}^{n \times m}$, $Q \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $R \in \mathbf{S}^{m \times m}$, 且 $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) 能稳, $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ 能

检测, 则代数Riccati方程(ARE)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (4)$$

有唯一的对称半正定解 $P \in \mathbf{S}^{n \times n}$.

证明 由于 $Q \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $R \in \mathbf{S}^{m \times m}$, 有 $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $R^{-1} \in \mathbf{S}^{m \times m}$. 考虑如下代数Riccati方程:

$$\begin{aligned} & (\phi(A))^H \bar{P} + \bar{P} \phi(A) + \phi(Q) - \\ & \bar{P} \phi(B)(\phi(R))^{-1}(\phi(B))^H \bar{P} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

由于 (A, B) 能稳, 由引理4可知 $(\phi(A), \phi(B))$ 能稳. 同理, 由于 $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ 能检测, 可知 $(\phi(A), (\phi(Q))^{\frac{1}{2}})$ 也能检测. 又因为 $Q \geq 0$, $R > 0$, 所以有 $\phi(Q) \geq 0$, $\phi(R) > 0$. 根据文献[17]可知ARE(5)有唯一对称正定解 $\bar{P} > 0$. 对式(5)各项进行 $\phi^{-1}(\cdot)$ 运算, 可得

$$\begin{aligned} & A^T \phi^{-1}(\bar{P}) + \phi^{-1}(\bar{P})A + Q - \\ & \phi^{-1}(\bar{P})BR^{-1}B^T \phi^{-1}(\bar{P}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

又因为 (A, B) 能稳, $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ 能检测, 且 $Q \geq 0$, $R > 0$, 由文献[17]可知Riccati方程(4)有唯一的对称半正定解 P . 由于 $\phi^{-1}(\bar{P}) > 0$, 将式(4)与(6)比较可知必有 $P = \phi^{-1}(\bar{P})$, 这表明 $P \in \mathbf{S}^{n \times n}$. \square

此外, 对于Lyapunov方程和Sylvester方程也具有类似的结论.

引理7 设 $A \in \mathbf{S}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{S}^{m \times m}$, 则对于任意 $C \in \mathbf{S}^{n \times m}$, Sylvester矩阵方程

$$AX - XB = C$$

有唯一解 $X \in \mathbf{S}^{n \times m}$ 当且仅当 $\lambda(A) \cap \lambda(B) = \emptyset$. 对于任意正定矩阵 $Q \in \mathbf{S}^{n \times n}$, Lyapunov矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q$$

有唯一对称正定解 $P \in \mathbf{S}^{n \times n}$ 当且仅当 $\dot{x} = Ax$ 渐近稳定.

类似结论在离散情形同样成立, 具体细节略.

2.4 各向同性反馈的必要性

各向同性线性系统的特点是可以等价转化为维数是其一半的复数系统. 此外, 针对特定各向同性线性系统进行反馈设计时, 往往期望所设计的闭环系统仍然保持各向同性. 在控制器设计过程中, 保持系统的各向同性将会对系统的性能产生有益的影响. 举例来说: 针对工业过程中常见的旋转圆盘控制系统, 相比于不保持各向同性的控制方法, 保持各向同性的控制方法将有效地抑制圆盘系统的横向震颤, 从而提升系统的控制性能和使用寿命; 又如滚转导弹, 保持该系统的各向同性, 能够使其在飞行过程中以纵向对称轴为旋转轴进行低速自旋, 从而简化系统的控制器设计, 并在一定程度上降低加工误差对控制系统的影响^[18-19]. 根据引理5, 如果反馈增益是各向同性矩阵, 则闭环系统一定是各向同性线性系统. 现在的问题

是,如果反馈增益不是各向同性矩阵,则闭环系统还可能是各向同性线性系统吗? 下面的引理回答了这个问题.

引理8 设 $(A, B, C) \in (\mathcal{S}^{n \times n} \times \mathcal{S}^{n \times m} \times \mathcal{S}^{p \times n})$, 且 $\text{rank}(B) = 2m, \text{rank}(C) = 2p$, 则 $A + BKC \in \mathcal{S}^{n \times n}$ 当且仅当 $K \in \mathcal{S}^{m \times p}$.

证明 由于 $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$, 有 $A + BKC \in \mathcal{S}^{n \times n}$ 当且仅当 $BKC \in \mathcal{S}^{n \times n}$. 充分性显然, 下面证明必要性. 设

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix},$$

其中 $K_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的维数相同. 则有

$$BKC = \begin{bmatrix} B_1T_1 - B_2T_2 & B_1T_3 - B_2T_4 \\ B_2T_1 + B_1T_2 & B_2T_3 + B_1T_4 \end{bmatrix}.$$

其中: $T_1 = K_1C_1 + K_2C_2, T_2 = K_3C_1 + K_4C_2, T_3 = K_2C_1 - K_1C_2, T_4 = K_4C_1 - K_3C_2$. 因此, $BKC \in \mathcal{S}^{n \times n}$ 当且仅当

$$\begin{cases} B_1T_1 - B_2T_2 = B_2T_3 + B_1T_4, \\ B_2T_1 + B_1T_2 = B_2T_4 - B_1T_3. \end{cases}$$

由上式可得

$$B \begin{bmatrix} K_1 - K_4 & K_2 + K_3 \\ K_2 + K_3 & K_4 - K_1 \end{bmatrix} C = 0.$$

由于 $\text{rank}(B) = 2m, \text{rank}(C) = 2p$, 上式有唯一解 $K_1 - K_4 = 0, K_2 + K_3 = 0$, 即 $K \in \mathcal{S}^{m \times p}$. \square

由引理8可知, 在条件 $\text{rank}(B) = 2m$ 以及 $\text{rank}(C) = 2p$ 的前提下, 如果反馈增益不是各向同性矩阵, 则闭环系统一定不是各向同性线性系统, 这表明各向同性反馈是必要的.

注意到 $\text{rank}(B) = 2m$ 这一假设的物理意义是每个控制量对系统的控制作用都是独一无二的, 即任何一个控制量不能由其他控制量(或其线性组合)所代替, 这是合理的. 事实上, 如果不满足这一假设, 则可以通过引入输入变换 $\phi^{-1}(M)$ (其中 $M \in \mathcal{C}^{m \times m}$ 且可表示为 $M = M_1 + jM_2$) 去掉能用其他控制量(或其线性组合)所代替的控制量, 此时 $\phi(B)M$ 满足

$$\phi(B)M = [\phi(\bar{B}) \ 0],$$

其中 $\phi(\bar{B}) = \bar{B}_1 + j\bar{B}_2 \in \mathcal{C}^{n \times m}$, 且满足 $\text{rank}(\phi(\bar{B})) = \bar{m} < m$. 不难验证 B 矩阵经变换后将满足

$$B\phi^{-1}(M) = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & 0 \\ \bar{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{B}_2 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix} = 0.$$

类似的讨论对 C 也成立. 若 $C = I$, 上述引理所讨论

的输出反馈问题则转化为状态反馈问题, 此时有类似的结论成立.

下面从最优控制的角度说明各向同性反馈的必要性. 考虑如下二次性能指标:

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \tag{7}$$

其中 $Q \geq 0, R > 0$ 为加权矩阵. 由 $z = H_n x$ 和 $v = H_m u$ 可得

$$J(u) = \int_0^\infty (z^H H_n Q H_n^{-1} z + v^H H_m R H_m^{-1} v) dt.$$

其中: $z = [z_1^T, z_1^H]^T, v = [v_1^T, v_1^H]^T$. 由于 z_1 与 $z_1^\#$ 一一对应, v_1 与 $v_1^\#$ 一一对应, 从设计简单的原则出发, 性能指标函数只需要取 z_1 和 v_1 的二次型即可, 即

$$J(u) = \int_0^\infty (z_1^H Q_z z_1 + v_1^H R_v v_1) dt,$$

其中 $Q_z = Q_1 + jQ_2 \geq 0, R_v = R_1 + jR_2 > 0$ 为适当的加权矩阵. 显然有 $Q_1 = Q_1^T, Q_2 = -Q_2^T, R_1 = R_1^T, R_2 = -R_2^T$. 注意到

$$\int_0^\infty z_1^H Q_z z_1 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1 + jx_2)^H (Q_1 + jQ_2) (x_1 + jx_2) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T \phi^{-1}(Q_z) x + jx^T \varphi^{-1}(Q_z) x) dt,$$

$$\varphi^{-1}(Q_z) = \begin{bmatrix} Q_2 & Q_1 \\ -Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}.$$

可以看出 $x^T \varphi^{-1}(Q_z) x \equiv 0$. 对 $\int_0^\infty v_1^H R_v v_1 dt$ 进行相似的分析后可得

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T \phi^{-1}(Q_z) x + u^T \phi^{-1}(R_v) u) dt.$$

其中: $\phi^{-1}(Q_z) \geq 0, \phi^{-1}(R_v) > 0$. 将上式与式(7)比较应有 $x^T Q x = x^T \phi^{-1}(Q_z) x, u^T R u = u^T \phi^{-1}(R_v) u, \forall x, u$. 这等价于 $Q = \phi^{-1}(Q_z)$ 以及 $R = \phi^{-1}(R_v)$, 即 Q 和 R 都是各向同性矩阵. 以上分析表明, 对于各向同性线性系统, 相应的二次性能指标函数的加权矩阵应取为各向同性矩阵. 另一方面, 根据引理6可知, 最优控制所对应的 Riccati 方程的正定解也是各向同性矩阵, 因此相应的最优反馈控制律

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x(t),$$

也是一个各向同性反馈. 这表明对各向同性线性系统设计各向同性反馈确实具有独特的意义和必要性.

使用一般线性系统的设计方法对各向同性线性系统进行控制器设计时, 往往不能保证所得控制律是各向同性的. 因此, 有必要将各向同性系统先转化为对应的复线性系统, 再针对此复线性系统设计复系数的反馈控制律, 最后将此复系数反馈控制律还原成实系数. 在这种情况下, 控制律的各向同性特性能够得

到保证.

例1 考虑前文介绍的惯量对称卫星姿态控制系统. 简便起见, 对系统进行无量纲化处理并设 $\omega_0 = 1, J_1 = J_3 = 1/2$. 现考虑该系统的状态反馈极点配置问题. 设期望的闭环系统的极点集合为 $\{-1 + j, -1 - j, -2, -2\}$, 可以得到如下反馈控制增益:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

满足期望闭环极点要求. 显然这不是一个各向同性反馈增益, 下面针对其对应的复系统进行极点配置. 根据引理2, 取期望的闭环系统的极点集合为 $\{-1 + j, -2\}$, 得到该极点集合所对应控制增益为

$$\phi(K) = [2 - 2j \quad 3 - 2j].$$

其对应的实反馈增益为

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 2 & 2 \\ -2 & -2 & | & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

这便是一个各向同性反馈增益.

3 研究现状

3.1 各向同性线性系统的应用背景

各向同性系统作为一类特殊的实系数线性系统, 在实际工程应用中存在很多实例, 如各向同性转子-轴承系统^[3,5,20-25]、陀螺仪^[26-27]、磁轴承系统^[3,8,28-32]、旋转圆盘^[2,3,33-37]、磁悬浮飞轮转子系统^[6]、滚转导弹^[38-41]、高速动量轮^[11-12]等旋转机械系统, 以及双馈感应电机^[42-43]、自激感应发电机^[15,44]、三相LCL逆变器^[1,45]、三相转换器^[16]、滤波器^[46-47]等电力系统等. 这些系统涵盖了军事、能源、航天、工业等很多方面, 密切影响着日常生活. 此外, 对于一些非各向同性线性系统, 在参数满足一定约束条件或对各向异性部分采用消除控制^[8,20,25,28,48]后, 同样可以转化为各向同性线性系统.

值得一提的是, 一直以来广大学者对于各向同性系统的研究大多针对具体系统, 针对一般各向同性系统的分析与设计理论尚没有得到系统性的总结与归纳. 因此, 本文所介绍的关于各向同性线性系统地研究大多结合具体应用实例, 而系统性地探讨各向同性线性系统的理论工作较少.

3.2 复数域线性系统的研究现状

各向同性线性系统转化为对应的复系统后, 系统的维数降为原来的一半, 这使得对系统(特别是高阶系统)的分析和设计变得简单^[49]. 文献[50]也指出, 复数域处理方法在展示系统结构的几何关系等方面具有一些实数域下处理方法不具备的优点. 以上原因

使得复数域处理方法在很多系统分析和设计问题中得到了大量使用.

复数域线性系统作为一般线性系统的一种自然延伸得到学者们的广泛关注, 并取得了许多优秀成果. 文献[51]将Kharitonov准则扩展到对不确定复系数多项式零点的判定中. 文献[52-54]将部分鲁棒控制理论的结果推广到复数域模型中. 文献[55]表明了复系统的引入会简化不同区域中的鲁棒控制和极点配置问题的处理过程, 同时推导了实系统与相应复系统之间反馈控制律的联系, 并通过使用复系统的代数Riccati方程确定了将系统所有极点配置到设定的区域时反馈控制矩阵各参数需要满足的容许范围. 但需要指出, 文献[55]所述方法只能用于处理单输入系统, 同时要求系统的所有极点为复数对, 即不能含有实极点. 在方程求解方面, 文献[56]针对标量和矩阵形式的具有复系数的离散时间各向同性多项式方程展开研究, 提出并评估了几种求解算法. 文献[57]提出一种针对具有误差变量的分数阶单输入单输出复系数线性动力系统的递归式参数辨识算法, 获得了比递归最小二乘法更高的精度. 文献[58]针对复系统的能控能观性、稳定性、特征值配置、镇定、线性二次型调节、状态观测器设计等问题进行分析, 建立了比较完整的分析设计方法, 并对复系统分析设计框架进行了初步的总结. 文献[58]给出一种将一般实线性系统转化为对应复系统的分析设计方法, 对复系统的应用框架进行了进一步的拓展. 文献[59]研究了与复系数线性系统极点配置相关的几种线性矩阵方程的性质和求解算法, 并使用航天器交会系统对该方法进行了仿真验证. 文献[60]针对离散时间复系统的二次最优控制问题的求解进行了系统性研究, 并将所设计的方法应用于时滞复系统的镇定中. 文献[61-62]研究了复系统的有限时间滑模控制问题.

除了系统稳定性分析与控制外, 复数域下的动态系统在其他领域也得到了较为广泛的研究: 文献[63]为复数神经网络开发了自适应控制律; 文献[64]开发了一种复数域下的带通sigma增量调制器, 并通过使用实传递函数对同阶的调制器进行性能改进; 文献[65]介绍了复多项式在移动通信中的应用; 文献[66]则对无线系统中使用复信号处理方法做了相关介绍.

3.3 各向同性线性系统的频域研究现状

如前所述, 针对各向同性线性系统的研究大多结合具体的应用实例. 对于滚转导弹控制系统, 文献[38]将PD控制器应用于采用永磁直流电动机的伺服

机构的设计,对不同参数选择下系统运行的安全区域进行了分析与界定;文献[39-41]将天线罩寄生回路引入雷达制导滚转导弹的制导系统,使用更贴实际的模型对系统进行稳定性分析与控制器设计;文献[67]考虑了导弹捷联导引头的延迟效应.这些文献均是通过建立复系数微分方程,基于复Routh-Hurwitz稳定性准则^[68]给出了不同情形下此类导弹锥形运动动态稳定的充要条件.

对于电力系统,文献[1,42]介绍了各向同性线性系统在状态空间和频域上的一般性质,扩展了文献[16]针对复系数下根轨迹法的研究成果,并在此基础上对双馈感应电机控制器和三相LCL逆变器进行了稳定性分析与控制器设计.文献[69]介绍了用复传递函数和传递矩阵对交流电机、电阻-电感-电容元件、电力电子转换器等三相动态系统进行建模和分析的方法,并总结了在频域框架下系统坐标变换、频率响应以及系统闭环稳定性等问题的研究成果.文献[43]使用复Hurwitz判据给出了双馈感应电机保证定子电流控制器稳定性的参数条件,文献[70]则进一步扩展了这一成果,提出了3种设计双馈感应发电机动态控制器的算法,通过使用复数域处理方法对定子电压定向控制律的分析和设计过程进行进一步简化.文献[15]将复Hurwitz判据用于解决由零平衡状态的不稳定性造成的感应发电机中的自发激问题,并给出了最小负载时的电阻值和电容值范围以及出现自发激的速度范围.类似地,文献[44]将复Hurwitz判据用于自激感应发电机系统的稳定性分析.文献[71]全面地将三相交流系统中的复矢量表示扩展到控制系统,针对传递函数、Nyquist稳定性判据以及Bode图分析等频域领域的常见问题进行了总结与讨论.文献[72]对一般复系统的PID控制器设计问题进行了分析和讨论.

对于旋转机械控制系统,文献[34]使用有限维子系统的模态控制方法对旋转圆盘系统进行分析,导出了确定闭环系统极点的多项式方程,并建立了闭环系统稳定性的充分条件.文献[23,35]分别将定向频率响应函数方法用于旋转轴承各向同性和各向异性部分的测试以及旋转圆盘前向和后向模态运动的识别和分离中.文献[30]基于扩展影响系数法,提出了一种有效且易于使用的原位跳动识别方案,实现了对主动磁轴承系统的高精度控制.文献[21]通过对转子-轴承运动控制系统进行线性化,将系统的平移和旋转运动模式进行解耦,并使用Routh-Hurwitz稳定性判据给了解耦后各子系统渐近稳定的充分条

件.文献[6]提出了一种基于复系数频率特性法的旋转模态稳定性判据,并将其用于具有陀螺效应和弯曲模态的高速磁悬浮飞轮转子前后向旋转模态的稳定性分析.文献[8,28]改变了传统的集中式PID控制方法,在复数域下提出了解耦平移和锥形模态的基于传递函数的特征值分配算法,获得了闭合形式的独特PID控制器,从而保持轴承的各向同性特性不变.通过对飞轮储能系统的仿真可以看出,文献[8,28]所提出算法相对于传统控制方法而言对相位滞后所引起的轻度阻尼和不稳定锥形模态能够保持更充足的稳定裕度.

3.4 各向同性线性系统的时域研究现状

在旋转机械最优控制方面,文献[3]将复数域下的两种基于代数Riccati方程的区域极点配置方法用于各向同性转子-轴承系统、磁轴承系统和旋转圆盘的振动控制,并建立了复数域下特征值虚部符号与相应模态相对于旋转方向前向或后向的旋转特征间的相互关系.文献[20,24-25,48]在复数域下对各向同性转子-轴承系统的各向同性最优控制器进行设计,所设计控制器在使用更少能量的情况下保持了系统的各向同性以及较小的主旋转半径,在抑制不平衡旋转方面相较传统最优控制方法具有更好的效果.文献[2,37]在复数域下提出了旋转圆盘的最优振动控制方法,特别地,文献[37]还将一种选择加权矩阵的方法用于最优控制器的设计中.文献[29]采用复数域下的PD控制器,实现了对主动磁轴承中转子的最优振动控制.

在旋转机械模态分析处理方面,文献[1,73-74]针对旋转机械的模态和伴随模态参数识别问题提出了复模态测试方法,该方法保留模态的关键方向性信息,实现了对前后向模态的清晰物理洞察,并且能够在频域中对模态进行分离,做到了传统方法无法实现的有效模态参数的识别.此外,文献[75]采用模态分析方法研究了无阻尼分布参数旋转轴的强迫响应;文献[76]将模态分析应用于具有各种边界条件的连续转子系统;文献[77]在对转子-轴承系统进行模态分析的基础上,提出了一种对此类系统进行振动控制的方法;文献[78]则综述了旋转机械模态测试和分析方法的部分研究,在总结上述研究成果的基础上对模态分析方法的优点进行了进一步的归纳与介绍;文献[5,79]通过坐标变换,将周期时变线性微分方程转换为等效的时不变线性微分方程,并在此基础上建立了周期时变参数转子系统的模态分析算法.

除上述研究成果外,文献[22]将平衡模型降阶技

术应用于转子轴承系统中,为此类系统的动态分析和控制提供了一个有效的模型.文献[36]通过构建相关实验过程对圆盘振动主动控制的实现进行了介绍.文献[31-32]使用冗余轴承坐标系对磁轴承系统进行建模,简化了运动方程,并提供了解耦PD控制器的设计方案.

4 总结与展望

本文系统地归纳总结了各向同性线性系统的性质,特别是各向同性线性系统及其对应的复系统之间的关系.对各向同性反馈的必要性进行了一定程度的探讨,同时以航天器姿态控制系统为例介绍了具体的各向同性系统模型.考虑到现有文献对各向同性线性系统的研究大多结合具体工程实例,本文结合几类常见工程系统对各向同性系统的研究现状进行了简单归纳和介绍.

由于旋转特性在自然界以及实际工程中的广泛存在,研究描述旋转特性的各向同性线性系统具有十分重要的理论意义与工程价值.针对各向同性系统共性问题的研究,有助于从理论层面推动各向同性系统的发展,并为相关工程问题提供理论基础和技术支持.下面简单介绍现有针对各向同性系统的研究成果的不足之处与未来的发展趋势:

1) 各向同性线性系统的有限时间控制.注意到目前已有部分文献针对复系统的滑模有限时间控制问题展开研究,但是与实线性系统相比,复线性系统以及其所对应的各向同性线性系统的有限时间控制研究尚有较大的发展空间,而有限时间控制无疑会提升如旋转导弹等诸多实际系统的控制性能,因此针对各向同性线性系统的有限时间控制研究是十分必要的.

2) 各向同性线性系统的抗扰与鲁棒控制.扰动与不确定性广泛存在于实际控制系统中,各向同性线性系统也不例外,比如电机系统中元器件的老化、导弹飞行中大气参数的变化以及地球摄动等,这些内外外部干扰都会或多或少地影响系统的控制效果,因此设计合适的抗扰与鲁棒控制器对这些系统进行控制从而进一步提升其控制效果是十分必要的.

3) 各向同性线性系统的自适应与优化控制.除抗扰控制外,自适应控制也是消除控制系统中不确定参数影响的有效方法,针对如感应电机、电网等运行时间较长的系统,如何设计自适应优化控制方法以降低工作工程中因环境变化所产生的慢变参数对系统控制的影响,对提升该类系统的控制性能有着重要的意义.

4) 各向同性线性系统与一般线性系统间的转化.由于各向同性线性系统可以转化为系数为复数的一般线性系统,现有的设计理论多基于复系统进行设计,但是各向同性线性系统仍具备其独有的研究问题.例如,对于一般情形下的非各向同性线性系统,是否可以通过状态变换和/或反馈使得其成为各向同性系统,如何在运行过程中保证线性系统的各向同性不变等,这些问题都值得深入探讨.

参考文献(References)

- [1] Dòria-Cerezo A, Bodson M. Design of controllers for electrical power systems using a complex root locus method[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(6): 3706-3716.
- [2] Byun S W, Lee C W. Pole assignment in rotating disk vibration control using complex modal state feedback[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1988, 2(3): 225-241.
- [3] Kim J S, Lee C W. Optimal pole assignment into specified regions and its applications to rotating mechanical systems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1990, 11(3): 197-210.
- [4] Dalton P M, Gosbell V J. A study of induction motor current control using the complex number representation[C]. *Conference Record of the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*. San Diego, 2002: 355-361.
- [5] Lee C W, Han D J, Suh J H, et al. Modal analysis of periodically time-varying linear rotor systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 303(3/4/5): 553-574.
- [6] Ren Y, Su D, Fang J C. Whirling modes stability criterion for a magnetically suspended flywheel rotor with significant gyroscopic effects and bending modes[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2013, 28(12): 5890-5901.
- [7] Lee C W. Whirl of simple rotors[C]. *Vibration Analysis of Rotors*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993: 1-55.
- [8] Jeon H W, Lee C W. Proportional-integral-derivative control of rigid rotor-active magnetic bearing system via eigenvalue assignment for decoupled translational and conical modes[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(12): 2372-2393.
- [9] Zhou B. On stability and stabilization of the linearized spacecraft attitude control system with bounded inputs[J]. *Automatica*, 2019, 105: 448-452.
- [10] Li J Q, Post M, Wright T, et al. Design of attitude control systems for CubeSat-class nanosatellite[J]. *Journal of Control Science and Engineering*, 2013, 2013: 1-15.
- [11] Lange T. Optimal magnetic bearing control for high-speed momentum wheels[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1985, 8(6): 737-742.
- [12] Heimbold G. Magnetic bearing momentum wheels — Impact of bearing design on nutational

- stability of satellites[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1984(7): 279-285.
- [13] 任玉武. 各向同性线性系统的极点与最优极点配置[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019.
(Ren Y W. Pole and optimal pole assignment of isotropic linear systems[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019.)
- [14] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. New York: Cambridge University Press, 2012: 260-279.
- [15] Bodson M, Kiselychynk O. The complex hurwitz test for the analysis of spontaneous self-excitation in induction generators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 449-454.
- [16] Dòria-Cerezo A, Bodson M. Root locus rules for polynomials with complex coefficients[C]. *The 21st Mediterranean Conference on Control and Automation. Platania*, 2013: 663-670.
- [17] 周克敏. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002: 374-383.
(Zhou K M. Robust and optimal control[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002: 374-383.)
- [18] 邱金波, 丁汉. 旋转圆盘振动主动控制理论及实验研究的发展[J]. *机电工程技术*, 2003, 32(2): 18-20.
(Qiu J B, Ding H. The development of theory and experiment on active control of rotating disk vibration[J]. *Machine Development*, 2003, 32(2): 18-20.)
- [19] 陈尔康, 廖欣, 高长生, 等. 考虑刚体运动与弹体变形耦合效应的滚转导弹动力学建模[J]. *兵工学报*, 2018, 39(11): 2159-2171.
(Chen E K, Liao X, Gao C S, et al. Dynamics modeling of spinning missiles considering the rigid-elastic coupling effect[J]. *Acta Armamentarii*, 2018, 39(11): 2159-2171.)
- [20] Kim C S, Lee C W. Isotropic optimal control of active magnetic bearing system[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1996, 118(4): 721-726.
- [21] El-Marhomy A A, Abdel-Sattar N E. Stability analysis of rotor-bearing systems via Routh-Hurwitz criterion[J]. *Applied Energy*, 2004, 77(3): 287-308.
- [22] Mohiuddin M A, Bettayeb M, Khulief Y A. Dynamic analysis and reduced order modelling of flexible rotor-bearing systems[J]. *Computers & Structures*, 1998, 69(3): 349-359.
- [23] Joh C Y, Lee C W. Use of dFRFs for diagnosis of asymmetric/anisotropic properties in rotor-bearing system[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, 118(1): 64-69.
- [24] Fan G W, Nelson H D, Mignolet M P. Optimal output feedback control of asymmetric systems using complex modes[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1993, 115(2): 307-313.
- [25] El-Madany M M. Isotropic optimal controller for rotor bearing systems[C]. *Proceedings of the 4th Mansoura International Engineering Conference*. Piscataway: IEEE, 2004: 127-132.
- [26] Liu X K, Zhao H, Wang L B, et al. A novel approach of micro-spacecraft angular rate sensing using a gyrowheel[C]. *The 6th International Conference on Instrumentation & Measurement, Computer, Communication and Control*. Harbin, 2016: 177-182.
- [27] Sadeghi-Emamgholi A, Azizi A, Nourisola H. Modeling and design of appropriate compensation for DTG (dynamically tuned gyroscope) and improving sensor response using a Kalman filter[C]. *The 4th International Conference on Robotics and Mechatronics*. Tehran, 2017: 202-209.
- [28] Jeon H W, Lee C W. Eigenvalue assignment for stabilizing unstable conical modes of rigid rotor-active magnetic bearing system over high rotational speed range[C]. *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Cham: Springer, 2015: 1453-1464.
- [29] Jeon H, Choi W Y, Lee T W, et al. Optimal complex modal-space control of rotor vibrations using active magnetic bearings[C]. *Proceedings of the 1st Global Power and Propulsion Forum*. Piscataway: IEEE, 2017: 1-8.
- [30] Kim C S, Lee C W. In situ runout identification in active magnetic bearing system by extended influence coefficient method[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1997, 2(1): 51-57.
- [31] Park S H, Lee C W. Decoupled control of a disk-type rotor equipped with a three-pole hybrid magnetic bearing[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2010, 15(5): 793-804.
- [32] Park S H, Lee C W. Design and control of hybrid-type three-pole active magnetic bearings using redundant coordinates[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2010, 16(4): 601-614.
- [33] 邱金波, 黄协清, 王大庆. 旋转圆盘振动的自传感电磁控制[J]. *机械科学与技术*, 2000, 19(S1): 31-32.
(Qiu J B, Huang X Q, Wang D Q. Self-sensing electromagnetic control of rotating disk vibration[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2000, 19(S1): 31-32.)
- [34] Kim C S, Lee C W. Travelling wave control of rotating discs and analysis of its spillover effect[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers — Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1988, 202(2): 119-127.
- [35] Kim M E, Lee C W. Use of dFRFs for identification of travelling wave modes in rotating disks[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, 120(3): 719-726.
- [36] Qiu J B, Huang X Q, Wang D Q, et al. Experiments on the active control of circular disk vibration[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2001, 20(4): 229-237.
- [37] Lee C W, Byun S W. Optimal complex modal-space control of rotating disc vibrations[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2007, 9(4): 357-370.
- [38] Koohmaskan Y, Arvan M R, Vali A R, et al. Dynamic stability conditions for a rolling flight vehicle

- applying continuous actuator[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42: 451-458.
- [39] Zheng D, Lin D F, Xu X H, et al. Dynamic stability of rolling missile with proportional navigation & PI autopilot considering parasitic radome loop[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 67: 41-48.
- [40] Zheng D, Lin D F, Wang J, et al. Dynamic stability of rolling missiles employing a two-loop autopilot with consideration for the radome aberration parasitic feedback loop[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 61: 1-10.
- [41] Tian S, Lin D F, Wang J, et al. Dynamic stability of rolling missiles with angle-of-attack feedback three-loop autopilot considering parasitic effect[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 71: 592-602.
- [42] Bodson M. Design of controllers in the complex domain[C]. *The 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, 2015: 4077-4082.
- [43] Dòria-Cerezo A, Bodson M, Batlle C, et al. Study of the stability of a direct stator current controller for a doubly fed induction machine using the complex hurwitz test[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(6): 2323-2331.
- [44] 李嘉, 吴新振, 王海峰. 基于Hurwitz判据的自激感应发电机带载建压分析[J]. *中国电机工程学报*, 2018, 38(10): 3094-3101.
(Li J, Wu X Z, Wang H F. Voltage build-up analysis of loaded self-excited induction generators based on hurwitz stability criterion[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2018, 38(10): 3094-3101.)
- [45] Dòria-Cerezo A, Serra F M, Bodson M. Complex-based controller for a three-phase inverter with an LCL filter connected to unbalanced grids[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2019, 34(4): 3899-3909.
- [46] Al Chaer T, Rambault L, Gaubert J P, et al. H_∞ control design methodology for a three-phase active power filter[C]. *American Control Conference*. New York, 2007: 6031-6036.
- [47] Li J L, Liu G, Cui P L, et al. Suppression of harmonic vibration in AMB-rotor systems using double-input adaptive frequency estimator[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(3): 2986-2995.
- [48] Kim C S, Lee C W. Isotropic control of rotor bearing system[C]. *The 14th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*. Albuquerque, 1993: 325-330.
- [49] Bodson M. Speed control for doubly fed induction motors with and without current feedback[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(3): 898-907.
- [50] Schreier P J, Scharf L L. *Statistical signal processing of complex-valued data: The theory of improper and noncircular signals*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
- [51] Bose N, Shi Y. A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1987, 34(10): 1233-1237.
- [52] Bistritz Y. Stability criterion for continuous-time system polynomials with uncertain complex coefficients[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, 35(4): 442-448.
- [53] Kogan J. Robust hurwitz lp stability of polynomials with complex coefficients[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(8): 1304-1308.
- [54] Ghorbani M. Robust stabilization criteria of a general form of fractional-order controllers for interval fractional-order plants with complex uncertain parameters[J]. *ISA Transactions*, 2022, 129: 140-151.
- [55] Koga M, Furuta K. A complex system approach to root-clustering in separate regions[C]. *The 29th IEEE Conference on Decision and Control*. Honolulu, 2002: 2912-2917.
- [56] Henrion D, Jeek J, ebek M. Efficient algorithms for discrete-time symmetric polynomial equations with complex coefficients[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 1999, 32(2): 1732-1737.
- [57] Ivanov D V, Nikishchenkov S A, Zharkova A A, et al. Recursive identification of complex-valued weights linear dynamical systems of fractional order with errors-in-variables[C]. *2018 IEEE East-West Design & Test Symposium*. Kazan, 2018: 1-6.
- [58] Zhou B. Analysis and design of complex-valued linear systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2018, 49(15): 3063-3081.
- [59] Zhou B. Solutions to linear bimatrix equations with applications to pole assignment of complex-valued linear systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(15): 7246-7280.
- [60] Zhou B. On linear quadratic optimal control of discrete-time complex-valued linear systems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2020, 41(2): 499-520.
- [61] Dòria-Cerezo A, Olm J M, Repecho V, et al. Complex-valued sliding mode control of an induction motor[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, 53(2): 5473-5478.
- [62] Dòria-Cerezo A, Olm J M, Biel D, et al. Sliding modes in a class of complex-valued nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(7): 3355-3362.
- [63] Hu J, Wang J. Global stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(6): 853-865.
- [64] Aziz P M, Sorensen H V, van der Spiegel J. Performance of complex noise transfer functions in bandpass and multi band sigma delta systems[C]. *International Symposium on Circuits and Systems*. Seattle, 1995: 641-644.
- [65] Hromcik M, Sebek M, Jezek J. Complex polynomials in communications: Motivation, algorithms, software[C]. *Proceedings of IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*. Glasgow, 2002:

- 291-296.
- [66] Martin K W. Complex signal processing is not complex[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2004, 51(9): 1823-1836.
- [67] Hu X, Yang S X. Coning motion instability of spinning missiles induced by the delay of strap-down seeker[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(12): 3360-3368.
- [68] Gilewicz J, Leopold E. Zeros of polynomials and recurrence relations with periodic coefficients[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 107(2): 241-255.
- [69] Harnefors L. Modeling of three-phase dynamic systems using complex transfer functions and transfer matrices[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2007, 54(4): 2239-2248.
- [70] Baesmat H J, Bodson M. Pole placement control for doubly-fed induction generators using compact representations in complex variables[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2019, 34(2): 750-760.
- [71] Gataric S, Garrigan N R. Modeling and design of three-phase systems using complex transfer functions[C]. The 30th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference. Charleston, 2002: 691-697.
- [72] Sathishkumar P, Selvaganesan N. Tuning of complex coefficient PI/PD/PID controllers for a universal plant structure[J]. International Journal of Control, 2021, 94(11): 3190-3212.
- [73] Lee C W. A complex modal testing theory for rotating machinery[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1991, 5(2): 119-137.
- [74] Lee C W, Joh Y D. Theory of excitation methods and estimation of frequency response functions in complex modal testing of rotating machinery[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1993, 7(1): 57-74.
- [75] Lee C W, Katz R, Ulsoy A G, et al. Modal analysis of a distributed parameter rotating shaft[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 122(1): 119-130.
- [76] Lee C W, Jei Y G. Modal analysis of continuous rotor-bearing systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(2): 345-361.
- [77] Jei Y G, Lee C W. Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 152(2): 245-262.
- [78] Bucher I, Ewins D J. Modal analysis and testing of rotating structures[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2001, 359(1778): 61-96.
- [79] Suh J H, Hong S W, Lee C W. Modal analysis of asymmetric rotor system with isotropic stator using modulated coordinates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 284(3/4/5): 651-671.

作者简介

周彬(1981—),男,教授,博士生导师,从事线性和非线性控制理论及应用等研究, E-mail: binzhou@hit.edu.cn;

任玉武(1995—),男,工程师,硕士,从事伺服控制系统应用的研究, E-mail: 1373648008@qq.com;

姜怀远(1994—),男,讲师,博士,从事线性系统以及优化控制理论及应用的研究, E-mail: huaiyuanjiang@hit.edu.cn.

科研团队简介

段广仁院士团队立足于哈尔滨工业大学航天学院,是由段广仁院士负责的“高阶全驱系统理论与航天器控制技术”国家自然科学基金基础科学中心、“鲁棒控制理论及其在航天控制中的应用”教育部长江学者创新团队和“航天飞行器的鲁棒控制与应用”国家自然科学基金创新群体的核心基地.团队承担过包括国家自然科学基金基础科学中心项目在内的国家级项目数十项,共获各种奖励10余项,其中国家自然科学二等奖2项.

团队核心成员周彬教授是国家杰出青年科学基金获得者;全国百篇优秀博士学位论文奖获得者;中国青少年科技创新奖获得者;国家自然科学基金优秀青年基金获得者;国家自然科学基金二等奖获得者(第4完成人);教育部新世纪优秀人才支持计划入选者;2020~2022年Elsevier“中国高被引学者”.哈尔滨工业大学航天学院教授、博士生导师,控制理论与制导技术研究中心主任,目前担任Automatica等国际杂志的编委,是中国自动化学会控制理论专业委员会委员,IFAC线性控制系统技术委员会委员,IFAC非线性控制系统技术委员会委员,IFAC航空航天技术委员会委员.周彬教授及其课题组成员长期专注于时变系统、时滞系统、非线性系统的稳定性分析与控制问题及其在航天器控制中的应用研究.