

控制与决策

Control and Decision

基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法

张伟, 刘建昌, 谭树彬, 刘圆超

引用本文:

张伟, 刘建昌, 谭树彬, 刘圆超. 基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(10): 2805–2814.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.1811>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于向量角分解的高维多目标进化算法](#)

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

[一种求解约束多目标问题的协作进化算法](#)

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

控制与决策. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

[基于R2指标和目标空间分解的高维多目标粒子群优化算法](#)

R2 indicator and objective space partition based many-objective particle swarm optimizer

控制与决策. 2021, 36(9): 2085–2094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0113>

[基于弱关联的自适应高维多目标进化算法](#)

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

[基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法](#)

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

控制与决策. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法

张伟, 刘建昌[†], 谭树彬, 刘圆超

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

摘要: 尽管许多高维多目标进化算法已被提出, 但平衡种群收敛性与多样性的困难仍然存在. 对此, 提出一种基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法(indicator selection and density estimation deletion-based many-objective evolutionary algorithm, MaOEA/IS-DED). 该算法在环境选择过程中采用基于 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制协作逐一剔除种群中收敛性和多样性差的个体, 进而使种群个体从多样性好的搜索方向上收敛于真实 Pareto 前沿, 完成平衡收敛性与多样性. 具体地, 前者选择 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 指标值最小的一对个体, 其在空间中表现为搜索方向最相似的个体; 后者利用自身兼顾种群收敛性和多样性的特性, 比较被选的这对个体且删除这对个体中收敛性和多样性较差的个体. 实验结果表明, MaOEA/IS-DED 算法在处理高维多目标优化问题时能获得较强的竞争性能.

关键词: 高维多目标进化算法; 指标选择策略; 密度评估删除机制; 收敛性; 多样性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1811

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 张伟, 刘建昌, 谭树彬, 等. 基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2023, 38(10): 2805-2814.

Indicator selection and density estimation deletion-based many-objective evolutionary algorithm

ZHANG Wei, LIU Jian-chang[†], TAN Shu-bin, LIU Yuan-chao

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: Although a variety of many-objective evolutionary algorithms have been proposed, the difficulty in balancing the convergence and diversity of the population still remains. To address this issue, we proposes an indicator selection and density estimation deletion-based many-objective evolutionary algorithm (MaOEA/IS-DED). In this algorithm, the selection strategy based on the $I_{\varepsilon+}(x, y)$ indicator and the deletion mechanism based on shifted-based density estimation cooperate for deleting these individuals with poor convergence and diversity one by one, so that the proposed algorithm can make the population converge to the true Pareto front from search directions with good diversity and further achieve balance the converge and diversity. More specifically, the former is designed to find a pair of individuals with the minimum $I_{\varepsilon+}(x, y)$ indicator values, which denotes these selected individuals have the most similar search directions in space. The latter utilizes own characteristic, taking the convergence and diversity of the population into account, to compare these selected individuals and delete the worse one. Experimental results demonstrate that the MaOEA/IS-DED can gain the highly competitive performance when solving many-objective optimization problems.

Keywords: many-objective evolutionary algorithm; indicator-based selection strategy; density estimation-based deletion mechanism; convergence; diversity

0 引言

在现实生活中, 很多优化问题同时拥有多个相互冲突的目标函数, 这类优化问题称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs)^[1],

且当 MOPs 的目标个数超过 3 时, 称其为高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs)^[2-3]. 另外, MaOPs 已被广泛地应用于水资源分配系统设计^[4]、污水处理^[5]等. 因此, 研究 MaOPs 具

收稿日期: 2021-10-21; 录用日期: 2022-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773106).

责任编委: 巩敦卫.

[†]通讯作者. E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

有较高的理论价值和实际应用价值.

多目标进化算法 (multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs) 通过模拟自然界生物进化过程求解上述优化问题^[6]. 研究表明, 在求解 MOPs 时, MOEAs (如 NSGA-II^[7]、R2-WVEA^[8]) 能获得较好的性能. 然而, 在求解 MaOPs 时, MOEAs 的性能急剧恶化^[9]. 主要原因在于: 随着目标数的增加, 种群中的非支配个体数呈指数增长, 致使算法的选择压力缺失^[4], 同时在高维空间中, 维持种群多样性也变得困难^[10], 即难以平衡种群的收敛性与多样性. 为了解决上述问题, 人们相继提出了很多优秀的高维多目标进化算法 (many-objective evolutionary algorithms, MaOEAs), 大致可分为以下 4 类.

1) 基于松弛支配的 MaOEAs: 通过提出新的支配理论或修改支配关系来扩大解的支配区域, 从而增强算法的选择压力. 典型的松弛支配关系有: 网格支配^[11]、RP 支配^[12]、SDR^[13]、角度支配^[14]等. 相比于传统的 Pareto 支配, 在处理 MaOPs 时, 它们展现了良好的性能, 如网格支配能扩大支配区域且松弛程度能随着种群的迭代而自适应调整. 然而, 这些支配关系需要额外的参数来控制支配区域.

2) 基于提高多样性管理的 MaOEAs: 通过引入先进的多样性管理策略来间接地弥补选择压力的缺失. 如 Li 等^[15]提出的基于移动的密度评估机制, 该机制通过坐标变换将收敛性差的个体移动到拥挤区域, 使其密度增大, 以便在进化过程中优先淘汰这些个体. 为了提高 NSGA-II 处理 MaOPs 的能力, Deb 等^[16]将参考向量引入 NSGA-II 中, 以增强算法的多样性.

3) 基于分解的 MaOEAs: 通过均匀分布的参考向量将一个 MOP 分解为多个单目标优化问题或者更简单的 MOPs, 随后以协同进化的方式优化它们. 典型算法有: MOEA/D^[17]、RVEA^[18]、SdEA^[19]等. 研究表明, 由于参考向量提前设定, 这些算法在规则 Pareto 前沿问题上表现良好, 但无法在不规则 Pareto 前沿问题上也表现良好^[20]. 为了克服这一缺陷, 研究人员提出了很多基于参考向量自适应策略的算法, 如 g-DBEA^[20]等. 然而, 这些算法的性能在规则 Pareto 前沿 (Pareto front, PF) 问题上反而变差^[21].

4) 基于指标的 MaOEAs: 将性能指标作为环境选择过程的选择标准, 进一步引导进化过程. 到目前为止, 广泛用于环境选择过程的性能指标主要包括: 超体积 (hypervolume, HV) 指标^[22]、R2 指标^[23]、反世代距离 (inverted generational distance, IGD) 指标^[24]和 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标^[25-26]. 这些指标易嵌入 MaOEAs 中且

在不同的 PF 问题上能获得良好的性能. 然而, HV 指标的计算复杂度随着目标数的增强呈指数增加且 R2 指标和 IGD 指标需要考虑参考点的设置. 不同于上述 3 种指标, $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标不仅计算复杂度较低, 而且不需要利用 PF 的先验知识来构建所需的参考点^[27].

除以上 4 类外, 一些基于混合方法的 MaOEAs 也展现出不错的性能, 如基于指标和支配的两档案算法 Two-Arch2^[26]、基于参考向量的加强帕累托算法 SPEA/R^[28]等.

尽管上述 4 类 MaOEAs 在求解 MaOPs 方面表现出良好的性能, 但相关研究表明, 这些算法在平衡种群收敛性与多样性时仍存在局限性^[14,28]. 对此, 本文提出一种基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法 (MaOEA/IS-DED). 该算法与上述 4 类算法的本质区别体现在选择 N 个接近 PF 且分布良好的个体的选择过程. 所提出算法通过基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制协作完成上述选择过程. 该算法的主要创新如下:

1) $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标和基于移动的密度评估已较多地用于设计 MaOEAs. 然而, 为了更充分地利用已有知识, 本文利用它们的互补特性实现其首次融合, 用于求解 MaOPs. 此外, 在所提出算法中, 设计了一种选择删除协作机制来平衡收敛性与多样性, 其核心内容是循环执行以下过程: 选择 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标值最小的一对个体, 并利用基于移动的密度评估删除机制删除这对个体中收敛性和多样性差的个体.

2) 现存的基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的算法主要利用全部种群个体信息来评估种群个体的优劣, 使基于该指标的算法展现出良好的收敛性, 但多样性较差. 相反, 本文充分利用 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的物理意义: 一个个体支配另一个个体所需的最短距离, 更加强调种群个体的局部信息, 使得该指标能够反映种群个体的多样性.

3) 所提出算法具有结构简单、无额外参数和无复杂操作的特点.

1 背景知识

1.1 高维多目标优化问题的基本定义

高维多目标优化问题的数学描述如下:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)); \\ \text{s.t. } x &\in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\Omega \in R^n$ 是决策空间, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是决策空间中的决策变量; $F: \Omega \rightarrow R^m$ 是 m 维相互冲突的目标函数且 $m > 3$, R^m 是目标空间.

1.2 $I_{\varepsilon+}$ 指标

$I_{\varepsilon+}$ 指标的数学描述为

$$I_{\varepsilon+}(x, y) = \min_{\varepsilon} (f_i(x) - \varepsilon \leq f_i(y)),$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (2)$$

其中: x, y 为两个决策变量, m 为目标数. 该指标的物理意义是个体 x 支配个体 y 所需的最短距离. 在此基础上, 文献[23]提出了一个基于该指标的适应度函数 $F(x)$ 用来评估种群个体的收敛性, 其数学描述为

$$F(x) = \sum_{y \in P \setminus \{x\}} -e^{-I_{\varepsilon+}(\{y\}, \{x\})/0.05}, \quad (3)$$

其中 P 为一个包括个体 x 和 y 的种群. 种群个体具有较小的 $F(x)$, 说明个体的收敛性能好.

1.3 基于移动的密度评估

相比于其他密度评估, 该密度评估能够同时兼顾种群的收敛性和多样性^[15], 其核心思想是: 在评估个体的密度时, 通过收敛性比较, 将收敛性好的个体移动到收敛性差的个体周围, 使收敛性差的个体密度增大, 以便在进化过程中优先淘汰这些个体. 即, 为了计算个体 p 的密度, 个体 q 将被移动到新的位置 q' , 有

$$q'(j) = \begin{cases} p(j), & q(j) < p(j); \\ q(j), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

其中: $p(j), q(j)$ 和 $q'(j)$ 分别表示个体 p, q 和 q' 的目标函数值; $j \in (1, 2, \dots, m), m$ 为目标个数. 式(4)的含义是: 如果个体 q 在一目标上优于个体 p , 则个体 q 将被移动到与个体 p 相同的位置; 否则, 个体 q 的位置保持不变. 经上述移动, 个体 q 的密度可被计算为

$$D(p) = \frac{1}{\sum_{j=1}^k d(p, \Omega_i) + 2}. \quad (5)$$

其中: $D(p)$ 表示个体 p 的密度评估值, $d(p, \Omega_i)$ 表示个体 p 与个体 Ω_i 的欧氏距离, Ω_i 表示个体 p 的第 i 个临近个体, k 设置为 \sqrt{N} .

2 MaOEA/IS-DED 算法

本节主要介绍所提出的算法, 包括算法的总体框架、匹配选择、环境选择和时间复杂度分析.

2.1 MaOEA/IS-DED 算法的总体框架

MaOEA/IS-DED 的整体框架如算法1所示, 其主要包括以下步骤: 首先, MaOEA/IS-DED 在决策空间随机产生数量为 N 的初始化种群 P_0 ; 然后, 算法进入主循环过程. 在该过程中: 1) 通过匹配选择策略构建交配池 P_t ; 2) 经模拟二进制交叉(SBX)^[29]和多项式变异(PM)^[30]产生子代 Q_t 且将其与父代 P_t 合并形成

规模为 $2N$ 的合并种群; 3) 通过环境选择策略从合并种群 P_t 中选择 N 个收敛性和多样性良好的精英个体进入下一代. 重复上述过程, 直到满足终止条件.

算法1 MaOEA/IS-DED 算法的总体框架.

输入: N (种群规模), t_{\max} (最大进化代数);

输出: P_{t+1} (最终种群).

- 1) $P_0 = \text{Initialization population } (N)$
- 2) **while** $t < t_{\max}$ **do**
- 3) $\text{Pool} = \text{MatingSelection}(P_t)$
- 4) $Q_t = \text{Reproduction}(\text{Pool})$
- 5) $P_t = P_t \cup Q_t$
- 6) $P_{t+1} = \text{Environmental selection } (P_t, F_t, R, N)$
- 7) $t = t + 1$
- 8) **end while**
- 9) **return** P_{t+1}

2.2 匹配选择

匹配选择旨在为遗传操作(SBX和PM)选择优秀的父代, 以产生高质量的子代, 进而提升算法的搜索效率. 然而, 在高维空间下, 基于传统的Pareto支配准则和多样性维持机制很难有效地区分具有较好收敛性和多样性的个体. 因此, 本文采用基于 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 指标的适应度函数 $F(x)$ 和基于移动的密度评估函数 $D(x)$ 来辅助算法选择优秀的父代.

匹配选择的详细过程如算法2所示, 其核心是利用二元锦标赛选择策略来选择优秀的父代. 具体地: 首先, 采用NSGA-III^[16]中的归一化策略对种群 P_t 的目标值进行归一化, 并计算每个个体的适应度函数值 $F(x)$ 以及密度评估函数值 $D(x)$; 其次, 从种群 P_t 中随机选取两个个体, 通过基于 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 指标的适应度函数 $F(x)$ 选择适应度值较小的个体进入交配池; 然后, 在无法判断适应度值关系的情况下, 通过基于移动的密度评估函数 $D(x)$ 选择评估函数值较小的个体进入交配池; 最后, 若评估函数值也相近, 则随机选取一个个体加入交配池中.

算法2 匹配选择.

输入: P_t (种群), N (交配池大小);

输出: Pool (交配池).

- 1) 归一化种群 P_t 的目标值;
- 2) 通过式(6)计算种群 P_t 中所有个体的适应度值 $F(x)$;
- 3) 通过式(9)计算种群 P_t 中所有个体的适应度值 $D(x)$;
- 4) **while** $|\text{Pool}| < N$ **do**
- 5) 从种群 P_t 中随机选择两个种群个体 x 和 y ;

```

6) if  $D(x) < D(y)$  then
7) Pool = Pool  $\cup$  { $x$ }
8) else if  $D(x) > D(y)$  then
9) Pool = Pool  $\cup$  { $y$ }
10) else
11) 随机选择  $x$  或者  $y$  加入 Pool;
12) end if
13) end while
14) return  $P_{t+1}$ 

```

2.3 环境选择

环境选择旨在为下一代从规模为 $2N$ 的合并种群中选择 N 个接近 PF 且分布良好的精英个体. 所提出算法的环境选择过程如算法 3 所示, 其核心在于: 基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制. 具体地: 首先, 采用 NSGA-III^[16] 中的归一化策略对合并种群的目标值进行归一化处理; 其次, 计算合并种群 P_t 中任意两个种群个体之间的 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标值; 然后, 选择 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标值最小的一对个体; 最后, 通过基于移动的密度评估删除机制移除评估函数值较大的被选个体. 重复上述过程, 直到下一代的种群规模达到 N 为止. 下面将详细解释所提出算法结合基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制的重要性.

算法3 环境选择.

输入: P_t (合并种群);

输出: P_{t+1} (下一代种群).

```

1) 归一化混合种群  $P_t$  的目标值;
2) 计算合并种群  $P_t$  中任意两个个体的  $I_{\epsilon+}$  值;
3) 计算合并种群  $P_t$  中所有个体的密度评估值  $D(x)$ ;
4) while  $|P_{t+1}| < N$  do
5) 在合并种群  $P_t$  中找到  $I_{\epsilon+}$  指标值最小的两个种群个体  $x$  和  $y$ ;
6) if  $D(x) < D(y)$  then
7)  $P_t \leftarrow P_t / y$ 
8) else
9)  $P_t \leftarrow P_t / x$ 
10) end if
11) end while
12)  $P_{t+1} \leftarrow P_t$ 

```

由 2.1 节内容可知, $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的物理意义是个体 x 支配个体 y 需要的最短距离, 而本文利用该指标选择其值最小的两个种群个体 x 和 y , 从侧面反映出被选个体在搜索方向上具有最大的相似程度. 为

了提高搜索方向的多样性, x 和 y 中的一个应该被移除. 如果重复移除剩余种群中一对具有最大相似程度个体中的一个, 则最终种群搜索方向的多样性能够得到很好地维持. 该过程体现了基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标选择的核心思想: 使种群个体从多样性较好的搜索方向上收敛于 PF.

尽管基于 $I_{\epsilon+}$ 指标的选择策略有能力找到一对搜索方向最为相似的个体, 但并不能区分它们. 此外, 在高维多目标优化中, 当区分种群个体时, 应同时兼顾它们的收敛性和多样性. 基于移动的密度评估机制可以提供有效的方法来评估种群个体的质量且可以兼顾种群个体的收敛性和多样性. 因此, 本文采用基于移动的密度评估机制来区分 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标所选出的两个个体的优劣.

总之, 所提出算法的环境选择巧妙地融合了基于 $I_{\epsilon+}(x, y)$ 指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制. 前者选择搜索方向最为相似的两个种群个体; 后者利用同时兼顾种群收敛性和多样性的特性, 移除质量较差的个体. 因此, 通过循环执行上述选择策略和删除机制, 将种群中收敛性和多样性差的个体逐一淘汰, 使得最终种群能够收敛且均匀分布于 PF.

2.4 时间复杂度分析

时间复杂度是评价算法性能的一个重要指标. MaOEA/IS-DED 算法的时间复杂度主要取决于它的匹配选择过程和环境选择过程. 在最坏情况下, 匹配选择过程需要 $O(mN^2)$ 的计算开销, m 为目标数, N 为种群规模. 在环境选择过程中, 计算开销包括以下几方面: 1) 将规模为 $2N$ 的种群个体归一化, 需要 $O(mN)$ 的计算开销; 2) 计算合并种群 P_t 中任意两个个体的指标值, 需要 $O(mN^2)$ 的计算开销; 3) 排序计算出的任意两个个体的指标值, 需要 $O(N^2 \log_2 N)$ 的计算开销; 4) 执行基于移动的密度评估删除机制, 需要 $O(mN^2)$ 的计算开销. 综上所述, 所提出算法的时间复杂度为 $\max\{O(mN^2), O(N^2 \log_2 N)\}$.

3 仿真实验及结果分析

为了测试所提出算法求解高维多目标优化问题的综合性能, 本节进行仿真实验. 首先, 给出 DTLZ^[31]、WFG^[32] 和 MaF^[33] 测试问题的参数设置、评价算法的性能指标和实验设置; 然后, 进入实验环节. 实验包括以下两部分内容:

1) 在 DTLZ、WFG、MaF 测试问题上, 将所提出算法与具有代表性的高维多目标进化算法 (VaEA^[34]、SPEA2-SDE^[15]、NSGA-III^[16]、SPEA/R^[28]、MaOEA-IGD^[24]、UIMaOTO^[35]、TS-NSGA-II^[36]) 进行对比;

2) 为验证 MaOEA/IS-DED 采取两个策略的有效性, 设计两个相应变体算法与所提出算法进行对比.

3.1 测试问题

为了验证所提出算法的性能, 选用 DTLZ 测试集中的 DTLZ1 ~ DTLZ4、WFG 测试问题集中的 WFG1 ~ WFG9 以及 MaF 测试问题集中的 MaF1 ~ MaF10 进行实验研究. 在本文的实验中, 设置目标数为 3 ~ 15, 即 $m \in \{3, 5, 8, 10, 15\}$. 在 DTLZ 中, 决策变量数由 $D = m + k - 1$ 决定, 其中 DTLZ1 和 DTLZ2 ~ DTLZ4 的 k 分别设置为 5 和 10^[31]. 在 WFG 中, 决策变量数目为 $D = k + l$, 其中 $k = 2^*(m - 1)$ 表示位置相关变量, $l = 20$ 表示距离相关变量^[32]. 在 MaF 中, MaF1 ~ MaF7 和 MaF10 的决策变量数目由 $D = m + k - 1$ 决定, 其中 MaF1 ~ MaF7 和 MaF10 的 k 分别设置为 10 和 20, MaF8 和 MaF9 的决策变量数目设置为 $D = 2$ ^[33].

3.2 性能指标

为了评估算法的综合性能, 本文选用能够同时评估算法收敛性和多样性的超体积指标 (HV)^[22] 来评价算法的性能, 其计算公式为

$$HV(S) = VOL\left(\bigcup_{x \in S} [f_1(x), z_1^*] \times \dots \times [f_m(x), z_m^*]\right). \quad (6)$$

其中: $VOL(\cdot)$ 表示 Lebesgue 评估, $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ 是提前指定的参考点, S 是算法运行得到的近似解集. 在本文中, 当 $m < 5$ 时, 选用的参考点为 $z = [1.1, 1.1, \dots, 1.1]$. 随着目标数的增加, 计算 HV 指标值的成本呈指数增加. 因此, 当 $m > 5$ 时, 采用具有 1 000 000 个采样点的蒙特卡洛方法来近似计算 HV 值. 此外, 对于 MaF1、MaF4、MaF8 和 MaF9 而言, 高维空间下超立方体的采样很难落入非支配解和参考点围成的区域. 因此, 计算这些测试问题的 HV 指标值时, 参考点设置为 $z = [1.5, 1.5, \dots, 1.5]$ ^[37]. 由 HV 定义可知, HV 值越大, 算法的综合性能越好.

3.3 实验设置

1) 种群大小: 对比算法 NSGA-III、SPEA/R 等的种群大小与产生参考向量的参数 H_1 和 H_2 有关^[16]. 为了公平对比, 其他算法的种群大小与上述算法保持一致. 具体的种群大小设置如表 1 所示.

表 1 种群大小设置

m	3	5	8	10	15
(H_1, H_2)	(12, 0)	(6, 0)	(3, 2)	(3, 2)	(2, 1)
N	91	210	156	275	135

2) 交叉变异参数设置: 本文所有算法都采用二进制交叉 (SBX) 和多项式变异 (PM) 产生子代. 交叉概率 (p_c) 和变异概率 (p_m) 分别设置为 1 和 $1/D$, 其中 D 表示决策变量的个数. 交叉分布指数 (η_c) 和变异分布指数 (η_m) 分别设置为 30 和 20.

3) 对比算法参数设置: 对比算法的参数设置与原文保持一致.

4) 统计方法: 所有算法在每个测试问题上均独立运行 20 次, 运行得到的实验结果使用置信度 $\alpha = 0.05$ 的 Wilcoxon 秩和检验方法进行统计. 为了使统计结果更加直观, 使用 “+” “ \approx ” “-” 分别表示所提出算法劣于对比算法、与对比算法没有显著差异、优于对比算法.

5) 终止条件: 所有算法运行一次结束的条件是达到最大评估次数, 其值为进化代数与种群大小的乘积. 本文中, 在 3、5、8、10、15 目标上的进化代数分别设置为 800、1 000、1 200、1 500、1 800.

3.4 结果分析

3.4.1 算法在 DTLZ 测试问题上的对比分析

所有算法在 DTLZ1 ~ DTLZ4 测试问题上获得的 HV 指标值的统计结果 (平均值和标准差) 如表 2 所示, 其中粗体表示最好的结果.

DTLZ1 具有线性的 PF, 其主要挑战算法收敛于真实 PF 的能力. 在该问题上, MaOEA/IS-DED 总体性能表现良好. DTLZ2 具有凹的 PF, MaOEA/IS-DED 不仅在 15 目标上获得了最优性能, 而且在其他目标上也表现良好. DTLZ3 具有多模态特性, 其难点在于易使得算法陷入局部最优. MaOEA/IS-DED 在 5、8 和 15 目标上表现最优, 而在其他目标上的表现仅次于 SPEA2-SDE, 说明所提出算法不仅能够跳出局部最优, 而且在处理不同维度的该问题时普适性也较好. DTLZ4 具有凹的 PF, 其主要挑战算法在高度偏向的情况下维持种群多样性的能力. 在该问题上, MaOEA/IS-DED 在 10 和 15 目标上获得了最优性能, 说明所提出算法在高维空间下能够较好地维持种群多样性.

为了形象地展示各算法获得的最终种群, 各算法在 15 目标 DTLZ1 上获得的最终种群分布情况如图 1 所示. 由图 1 可知, MaOEA/IS-DED 的收敛性和多样性都达到了理想状态; VaEA、SPEA/R、UIMaOTO 和 TS-NSGA-II 的收敛能力较差, 无法使种群收敛于 PF 的范围 $[0, 0.5]$; SPEA2-SDE、NSGA-III 和 MaOEA-IGD 使一些种群个体的目标值小于真实 PF, 说明它们对位于 PF 中心区域的个体有较强的偏好, 从而使得种群的多样性变差.

表2 对比算法以及MaOEA/IS-DED在DTLZ1~DTLZ4上获得HV值的统计结果

problem m	VaEA	SPEA2-SDE	NSGA-III	SPEA/R	MaOEA-IGD	UIMaOTO	TS-NSGA-II	MaOEA/IS-DED
DTLZ1	3 9.331 5e-1 (5.35e-1)+	9.501 3e-1 (5.27e-1)+	9.603 3e-1 (5.31e-1)+	7.944 1e-1 (1.01e-1)≈	7.239 4e-2 (1.21e-1)-	8.101 8e-1 (7.75e-3)-	6.512 3e-1 (2.41e-1)-	8.378 9e-1 (6.87e-4)
5	9.033 9e-1 (4.92e-2)-	9.695 0e-1 (2.08e-3)-	9.796 0e-1 (2.48e-4)+	9.645 2e-1 (1.46e-2)-	7.842 0e-1 (2.94e-1)-	9.475 5e-1 (6.14e-3)-	9.325 6e-1 (1.12e-1)-	9.789 4e-1 (2.32e-4)
8	8.157 9e-1 (2.76e-1)-	9.859 0e-1 (3.37e-3)-	9.549 8e-1 (1.54e-1)≈	8.163 8e-1 (2.91e-1)-	9.713 8e-1 (9.30e-2)-	9.678 8e-1 (4.29e-3)-	9.646 2e-3 (2.33e-2)-	9.973 9e-1 (1.20e-4)
10	5.910 8e-1 (3.69e-1)-	9.957 2e-1 (8.31e-4)-	9.493 0e-1 (1.64e-1)-	3.101 6e-1 (2.91e-1)-	8.782 0e-1 (2.91e-1)-	9.864 7e-1 (1.88e-3)-	9.652 7e-1 (1.95e-1)-	9.996 9e-1 (1.86e-5)
15	8.148 0e-1 (3.03e-1)-	9.918 3e-1 (2.08e-3)-	9.976 8e-1 (7.65e-3)≈	2.850 1e-1 (2.48e-1)-	2.998 4e-1 (3.93e-1)-	9.771 6e-1 (3.34e-3)-	9.670 3e-1 (2.50e-2)-	9.997 2e-1 (2.83e-4)
DTLZ2	3 5.545 7e-1 (1.55e-3)-	5.582 1e-1 (1.50e-3)≈	5.596 1e-1 (3.73e-6)+	5.572 6e-1 (1.49e-3)≈	5.431 5e-1 (1.34e-4)-	5.531 5e-1 (1.26e-3)-	5.558 8e-1 (7.09e-4)≈	5.575 2e-1 (1.37e-3)
5	7.920 5e-1 (2.69e-3)-	8.104 9e-1 (2.09e-3)≈	8.123 2e-1 (4.26e-4)+	8.095 2e-1 (1.49e-3)-	8.127 4e-1 (4.26e-4)+	7.906 5e-1 (4.00e-3)-	7.880 8e-1 (1.31e-3)-	8.115 0e-1 (1.27e-3)
8	9.094 7e-1 (4.60e-3)-	9.288 7e-1 (1.32e-3)+	9.302 2e-1 (2.93e-2)+	9.334 7e-1 (8.72e-3)+	9.394 4e-1 (1.17e-2)+	8.741 4e-1 (7.62e-3)-	9.183 8e-1 (3.07e-3)-	9.266 5e-1 (2.06e-3)
10	9.312 0e-1 (5.90e-3)-	9.719 1e-1 (9.23e-4)+	9.669 4e-1 (5.28e-4)-	9.583 7e-1 (1.47e-3)-	9.686 8e-1 (1.54e-3)-	9.240 9e-1 (7.64e-3)-	9.462 1e-1 (4.36e-2)-	9.705 7e-1 (6.62e-4)
15	9.413 3e-1 (9.55e-3)-	9.834 7e-1 (1.98e-3)-	9.765 4e-1 (9.65e-3)-	9.866 8e-1 (1.07e-3)≈	6.963 2e-1 (1.56e-1)-	8.983 1e-1 (1.02e-2)-	9.201 5e-1 (3.90e-2)-	9.869 6e-1 (8.42e-4)
DTLZ3	3 5.536 3e-1 (2.87e-3)-	5.570 3e-1 (1.67e-3)+	5.553 3e-1 (3.41e-3)≈	4.167 2e-1 (5.61e-2)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	4.800 2e-1 (1.59e-1)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	5.561 4e-1 (1.63e-3)
5	6.399 7e-1 (6.13e-2)-	8.096 1e-1 (2.45e-3)≈	7.526 9e-1 (1.77e-1)-	1.782 3e-1 (2.03e-1)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	1.282 2e-2 (5.01e-2)-	8.102 5e-1 (3.22e-3)
8	3.812 0e-2 (1.70e-1)-	9.208 3e-1 (7.04e-3)≈	2.974 0e-1 (3.63e-1)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	4.940 0e-1 (3.78e-1)-	3.618 2e-3 (1.98e-2)-	9.240 6e-1 (4.35e-3)
10	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	9.674 3e-1 (3.44e-3)≈	1.890 5e-1 (3.09e-1)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	3.667 5e-3 (1.64e-2)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	3.875 9e-1 (2.07e-1)-	9.644 6e-1 (7.91e-3)
15	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	9.735 5e-1 (5.71e-3)≈	2.564 4e-1 (3.68e-1)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	1.916 5e-3 (8.57e-3)-	8.558 4e-1 (1.48e-2)-	3.928 2e-1 (4.28e-1)-	9.766 6e-1 (7.84e-3)
DTLZ4	3 5.539 0e-1 (1.65e-3)≈	4.932 1e-1 (1.28e-1)≈	4.810 3e-1 (1.33e-1)≈	5.554 9e-1 (1.83e-3)≈	4.424 9e-1 (1.03e-1)-	5.567 9e-1 (1.18e-3)≈	5.503 9e-1 (2.49e-2)+	4.713 2e-1 (1.33e-1)
5	7.888 1e-1 (2.28e-3)-	8.027 9e-1 (2.81e-2)≈	8.057 8e-1 (2.80e-2)≈	8.080 5e-1 (1.10e-3)+	7.996 8e-1 (5.90e-2)≈	8.049 1e-1 (1.98e-3)-	7.834 8e-1 (2.03e-2)	8.032 8e-1 (2.29e-2)
8	9.008 4e-1 (4.89e-3)-	9.247 6e-1 (1.66e-2)-	9.313 3e-1 (3.00e-2)+	9.275 2e-1 (7.02e-3)+	9.393 4e-1 (1.30e-2)+	9.115 8e-1 (3.37e-3)-	9.251 5e-2 (1.25e-2)-	9.262 3e-1 (5.77e-3)
10	9.225 1e-1 (5.18e-3)-	9.705 7e-1 (6.07e-4)-	9.643 5e-1 (1.63e-2)-	9.556 7e-1 (2.56e-3)-	9.691 8e-1 (4.15e-3)≈	9.607 3e-1 (1.84e-3)-	9.452 8e-2 (5.61e-2)-	9.717 6e-1 (6.84e-4)
15	9.562 1e-1 (4.27e-3)-	9.863 1e-1 (2.50e-3)≈	9.797 3e-1 (8.47e-3)-	9.848 7e-1 (1.74e-3)-	9.859 2e-1 (4.91e-3)≈	9.768 9e-1 (2.35e-3)-	9.870 6e-2 (4.91e-3)≈	9.875 5e-1 (9.48e-4)

+ / - / ≈ 1/18/1 4/7/9 6/9/5 3/13/4 3/14/3 0/19/1 1/17/2

“+”表示此算法优于所提出算法，“-”表示此算法劣于所提出算法，“≈”表示与所提出算法性能相近。

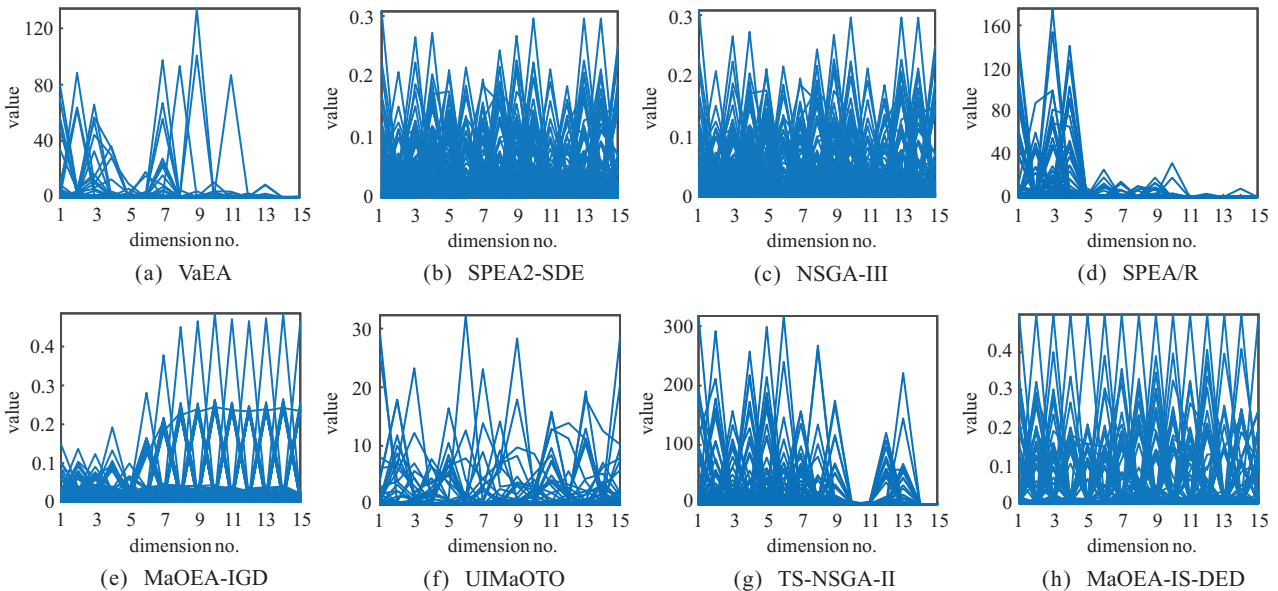


图1 各算法在15目标DTLZ1上获得的最终种群分布

此外,为了展示各算法的稳定性,每个算法在15目标DTLZ1~DTLZ4上运行20次,得到了HV指标值的盒子图(限于篇幅,图略).由该图可知,所提出算法在15目标DTLZ1~DTLZ4上的长方形最小,表明所提出算法具有最好的稳定性.此外,所提出算法在15目标DTLZ1~DTLZ4上的红线位置始终高于其他所对比算法的红线位置,表明所提出算法获得的

HV指标值的均值也最好,说明该算法能使种群个体稳定地收敛于真实PF.

3.4.2 算法在WFG测试问题上的对比分析

MaOEA/IS-DED与其他算法在WFG测试集上获得的HV指标值的统计结果(平均值和标准差)如表3所示,其中粗体表示最好的结果.

表3 对比算法以及MaOEA/IS-DED在WFG1~WFG9上获得HV值的统计结果

problem	m	VaEA	SPEA2-SDE	NSGA-III	SPEA/R	MaOEA-IGD	UIMaOTO	TS-NSGA-II	MaOEA/IS-DED
WFG1	3	8.790 0e-1 (9.63e-3)−	9.344 0e-1 (4.10e-3)−	9.188 8e-1 (9.44e-3)−	9.291 7e-1 (3.92e-3)−	1.511 8e-1 (2.62e-2)−	6.421 6e-1 (1.84e-2)−	4.918 5e-1 (6.12e-2)−	9.437 2e-1 (3.75e-3)
	5	4.582 4e-1 (2.12e-2)−	8.730 8e-1 (2.33e-2)−	5.878 7e-1 (2.10e-2)−	7.139 9e-1 (3.02e-2)−	1.087 9e-1 (6.54e-2)−	4.222 3e-1 (1.74e-2)−	5.678 4e-1 (6.06e-2)−	8.993 4e-1 (2.20e-2)
	8	3.437 4e-1 (1.48e-2)−	7.867 1e-1 (3.32e-2)−	5.313 4e-1 (2.09e-2)−	7.206 0e-1 (2.80e-2)−	1.157 8e-1 (5.98e-2)−	3.672 8e-1 (2.47e-2)−	6.292 5e-1 (5.08e-2)−	8.857 4e-1 (1.90e-2)
	10	2.462 1e-1 (8.81e-3)−	5.752 7e-1 (2.46e-2)−	3.352 4e-1 (1.59e-2)−	5.452 1e-1 (2.72e-2)−	2.157 9e-1 (8.16e-2)−	2.947 2e-1 (1.25e-2)−	6.287 9e-1 (2.42e-2)−	6.967 9e-1 (2.95e-2)
	15	2.369 1e-1 (8.39e-3)−	5.473 2e-1 (3.61e-2)−	5.360 6e-1 (5.55e-2)−	7.247 2e-1 (4.46e-2)−	2.337 0e-1 (9.22e-2)−	3.386 6e-1 (3.80e-2)−	8.058 6e-1 (9.41e-2)−	8.274 0e-1 (3.29e-2)
WFG2	3	9.233 6e-1 (1.13e-3)−	9.249 7e-1 (4.44e-3)−	9.291 9e-1 (1.07e-3)−	9.280 6e-1 (1.03e-3)−	4.849 3e-1 (9.47e-2)−	8.777 9e-1 (9.44e-3)−	5.260 2e-1 (5.08e-2)−	9.328 3e-1 (1.58e-3)
	5	9.744 4e-1 (2.08e-3)−	9.775 2e-1 (2.86e-3)−	9.810 0e-1 (2.96e-3)−	9.840 1e-1 (2.58e-3)−	8.374 5e-1 (8.85e-2)−	9.390 8e-1 (5.98e-3)−	9.390 1e-1 (2.16e-2)−	9.914 2e-1 (1.17e-3)
	8	9.692 8e-1 (7.33e-3)−	9.728 0e-1 (3.87e-3)−	9.772 8e-1 (1.07e-2)−	9.744 0e-1 (5.91e-3)−	8.798 4e-1 (9.95e-2)−	9.492 4e-1 (5.87e-3)−	9.457 7e-1 (3.11e-2)−	9.907 9e-1 (1.90e-3)
	10	9.538 7e-1 (4.98e-3)−	9.751 6e-1 (4.25e-3)−	9.790 3e-1 (1.22e-2)−	9.518 6e-1 (7.47e-3)−	9.308 0e-1 (4.05e-2)−	9.526 6e-1 (6.64e-3)−	9.527e-1 (2.48e-2)−	9.885 1e-1 (2.01e-3)
	15	9.443 5e-1 (2.43e-2)−	9.697 5e-1 (4.05e-3)−	9.704 3e-1 (8.91e-3)≈	9.624 5e-1 (1.09e-2)−	8.703 5e-1 (6.50e-2)−	9.566 9e-1 (8.20e-3)−	9.873 2e-1 (4.47e-3)+	9.741 3e-1 (5.54e-3)
WFG3	3	3.639 8e-1 (7.02e-3)−	3.980 4e-1 (3.81e-3)+	3.905 8e-1 (5.98e-3)≈	3.743 0e-1 (5.33e-3)−	7.881 0e-2 (4.24e-3)−	1.945 6e-1 (2.31e-2)−	3.912 4e-2 (1.72e-2)−	3.866 4e-1 (8.47e-3)
	5	5.671 2e-2 (1.48e-2)−	6.953 4e-2 (3.86e-2)−	1.070 9e-1 (1.13e-2)−	1.531 3e-1 (1.78e-2)≈	4.699 9e-2 (6.15e-3)−	0.000 0e+0 (0.00e+0)−	6.176 8e-6 (1.99e-5)−	1.464 8e-1 (1.37e-2)
	8	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
	10	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
	15	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
WFG4	3	5.457 1e-1 (2.64e-3)−	5.504 0e-1 (1.61e-3)−	5.560 4e-1 (6.71e-4)+	5.550 3e-1 (6.42e-4)+	1.138 0e-1 (4.50e-2)−	4.695 5e-1 (1.10e-2)−	5.350 3e-2 (3.04e-3)−	5.523 4e-1 (1.60e-3)
	5	7.403 7e-1 (4.12e-3)−	7.658 1e-1 (4.99e-3)−	7.771 2e-1 (1.77e-3)−	7.865 2e-1 (2.00e-3)−	1.246 7e-1 (4.60e-2)−	5.704 0e-1 (2.02e-2)−	7.656 0e-1 (4.13e-3)−	7.920 0e-1 (3.06e-3)
	8	8.419 0e-1 (5.64e-3)−	8.312 8e-1 (9.31e-3)−	8.742 1e-1 (8.95e-3)−	8.897 8e-1 (4.06e-3)−	1.027 2e-1 (2.94e-2)−	5.089 0e-1 (3.42e-2)−	8.919 7e-1 (5.40e-2)−	9.045 2e-1 (3.55e-3)
	10	8.392 7e-1 (4.68e-3)−	8.580 9e-1 (7.33e-3)−	8.734 9e-1 (1.06e-2)−	8.921 5e-1 (6.12e-3)−	1.051 0e-1 (3.06e-2)−	5.606 3e-1 (2.17e-2)−	9.142 1e-1 (5.73e-2)−	9.212 1e-1 (5.74e-3)
	15	8.702 5e-1 (7.49e-3)−	8.967 2e-1 (1.49e-2)−	9.324 3e-1 (1.08e-2)−	9.553 7e-1 (5.25e-3)≈	1.377 3e-1 (6.04e-2)−	4.083 5e-1 (2.90e-2)−	9.284 4e-1 (7.56e-3)−	9.582 2e-1 (5.60e-3)
WFG5	3	5.148 7e-1 (7.58e-4)−	5.1441 e-1 (1.75e-3)−	5.184 0e-1 (3.37e-5)+	5.165 4e-1 (1.14e-3)≈	9.349 3e-2 (4.13e-2)−	4.613 9e-1 (1.33e-2)−	5.087 5e-2 (4.33e-3)−	5.167 6e-1 (1.08e-3)
	5	7.254 6e-1 (3.53e-3)−	7.331 1e-1 (2.98e-3)−	7.553 5e-1 (8.13e-4)−	7.575 6e-1 (8.13e-4)≈	1.259 9e-1 (5.88e-2)−	5.970 1e-1 (1.99e-2)−	7.301 1e-1 (2.67e-3)−	7.584 7e-1 (1.87e-3)
	8	8.239 4e-1 (4.98e-3)−	8.090 2e-1 (4.36e-3)−	8.545 4e-1 (1.12e-3)−	8.580 4e-1 (1.39e-3)−	1.025 6e-1 (3.94e-2)−	5.680 3e-1 (3.11e-2)−	8.470 0e-1 (3.01e-3)−	8.623 2e-1 (1.80e-3)
	10	8.202 9e-1 (5.99e-3)−	8.299 3e-1 (6.82e-3)−	8.666 7e-1 (3.48e-3)−	8.818 8e-1 (2.11e-3)−	1.040 1e-1 (3.46e-2)−	5.943 6e-1 (1.96e-2)−	8.375 4e-1 (1.08e-2)−	8.931 9e-1 (2.62e-3)
	15	8.437 1e-1 (5.53e-3)−	7.892 6e-1 (1.82e-2)−	9.056 0e-1 (1.64e-3)−	9.122 0e-1 (8.46e-4)+	1.276 6e-1 (5.73e-2)−	4.836 8e-1 (3.05e-2)−	8.263 2e-1 (2.08e-2)−	9.113 6e-1 (1.10e-3)
WFG6	3	5.190 7e-1 (3.15e-3)−	5.219 7e-1 (3.70e-3)−	5.262 9e-1 (3.91e-3)≈	5.239 6e-1 (5.19e-3)≈	1.417 1e-1 (8.45e-2)−	4.463 5e-1 (1.91e-2)−	4.784 1e-1 (1.43e-2)−	5.245 1e-1 (4.26e-3)
	5	7.143 0e-1 (5.71e-3)−	7.438 1e-1 (6.93e-3)−	7.490 0e-1 (5.81e-3)−	7.590 1e-1 (4.62e-3)−	1.516 6e-1 (5.34e-2)−	5.159 0e-1 (2.73e-2)−	7.001 7e-1 (1.64e-2)−	7.666 8e-1 (5.43e-3)
	8	8.353 8e-1 (7.41e-3)−	8.242 8e-1 (8.51e-3)−	8.579 3e-1 (6.44e-3)−	8.667 0e-1 (4.85e-3)−	1.292 3e-1 (4.77e-2)−	4.086 5e-1 (2.70e-2)−	8.270 8e-1 (1.99e-2)−	8.844 1e-1 (4.52e-3)
	10	8.095 2e-1 (1.02e-2)−	8.435 3e-1 (1.12e-2)−	8.648 6e-1 (7.14e-3)−	8.884 9e-1 (5.78e-3)−	1.566 1e-1 (6.15e-2)−	4.385 7e-1 (2.78e-2)−	8.584 6e-1 (2.46e-2)−	9.080 1e-1 (4.86e-3)
	15	8.657 9e-1 (9.68e-3)−	8.702 7e-1 (1.58e-2)−	9.288 9e-1 (8.52e-3)−	9.361 1e-1 (6.13e-3)≈	1.435 2e-1 (4.72e-2)−	2.664 2e-1 (3.12e-2)−	8.472 4e-1 (2.62e-2)−	9.383 6e-1 (5.28e-3)
WFG7	3	5.484 2e-1 (2.06e-3)−	5.536 3e-1 (3.30e-3)≈	5.571 2e-1 (4.18e-4)+	5.551 3e-1 (7.10e-4)+	1.345 1e-1 (5.46e-2)−	4.739 4e-1 (2.79e-2)−	5.390 1e-3 (2.17e-3)−	5.535 2e-1 (1.34e-3)
	5	7.652 7e-1 (2.96e-3)−	7.841 2e-1 (3.48e-3)−	7.918 4e-1 (2.27e-3)−	7.965 5e-1 (1.20e-3)−	2.084 2e-1 (6.29e-2)−	5.719 9e-1 (2.92e-2)−	7.721 7e-1 (2.46e-3)−	8.057 3e-1 (1.59e-3)
	8	8.866 6e-1 (6.21e-3)−	8.678 0e-1 (4.90e-3)−	8.988 7e-1 (4.80e-3)−	9.053 5e-1 (2.72e-3)−	1.855 0e-1 (6.75e-2)−	4.443 6e-1 (2.99e-2)−	9.006 7e-1 (5.87e-3)−	9.255 0e-1 (1.69e-3)
	10	8.925 3e-1 (6.69e-3)−	9.081 0e-1 (3.61e-3)−	9.102 8e-1 (5.77e-3)−	9.205 0e-1 (7.02e-3)−	2.329 4e-1 (5.67e-2)−	4.977 7e-1 (2.15e-2)−	9.453 7e-1 (3.46e-2)−	9.610 1e-1 (1.42e-3)
	15	9.352 2e-1 (5.11e-3)−	9.015 2e-1 (2.16e-2)−	9.721 5e-1 (3.15e-3)−	9.785 0e-1 (2.15e-3)−	1.756 6e-1 (5.53e-2)−	2.720 2e-1 (4.67e-2)−	9.273 0e-1 (1.19e-2)−	9.819 3e-1 (1.84e-3)
WFG8	3	4.964 1e-1 (3.68e-3)−	5.073 5e-1 (1.87e-3)+	5.142 0e-1 (1.21e-3)+	5.140 4e-1 (1.78e-3)+	6.143 5e-2 (1.89e-2)−	4.210 7e-1 (8.99e-3)−	9.408 5e-2 (4.78e-2)−	5.038 0e-1 (2.17e-3)
	5	6.884 2e-1 (5.41e-3)−	7.165 6e-1 (4.20e-3)−	7.308 2e-1 (2.43e-3)−	7.401 6e-1 (2.36e-3)+	7.170 7e-2 (4.36e-2)−	4.598 1e-1 (2.18e-2)−	6.476 6e-1 (3.85e-3)−	7.337 9e-1 (2.90e-3)
	8	7.621 8e-1 (9.72e-3)−	8.003 0e-1 (5.81e-3)−	8.191 2e-1 (8.82e-3)−	8.229 2e-1 (4.99e-3)−	2.669 6e-1 (2.11e-1)−	2.862 2e-1 (2.64e-2)−	7.657 7e-1 (5.13e-3)−	8.336 3e-1 (3.78e-3)
	10	7.413 9e-1 (1.18e-2)−	8.335 9e-1 (8.31e-3)−	8.393 1e-1 (1.22e-2)−	8.448 0e-1 (7.45e-3)−	4.160 6e-1 (2.25e-1)−	3.144 9e-1 (2.49e-2)−	2.983 0e-1 (4.65e-2)−	8.625 1e-1 (5.27e-3)
	15	7.927 3e-1 (1.54e-2)−	8.850 1e-1 (8.54e-3)−	9.107 7e-1 (1.15e-2)≈	8.996 5e-1 (1.22e-2)≈	1.973 5e-1 (3.70e-2)−	2.472 0e-1 (1.34e-1)−	8.720 2e-1 (7.15e-3)−	9.042 4e-1 (1.67e-2)
WFG9	3	5.123 0e-1 (2.24e-2)−	5.284 0e-1 (2.47e-2)≈	5.074 1e-1 (2.52e-2)−	5.016 1e-1 (2.32e-2)−	1.846 1e-1 (5.19e-2)−	4.784 3e-1 (8.32e-3)−	4.242 1e-1 (1.00e-1)−	5.239 8e-1 (2.69e-2)
	5	6.741 6e-1 (1.97e-2)−	7.370 1e-1 (1.19e-2)−	7.056 2e-1 (1.75e-2)−	7.076 4e-1 (1.84e-2)−	2.389 8e-1 (3.33e-2)−	6.097 8e-1 (9.12e-3)−	6.849 8e-1 (3.76e-2)−	7.583 6e-1 (3.24e-3)
	8	7.441 7e-1 (2.52e-2)−	7.786 5e-1 (1.54e-2)−	7.820 9e-1 (1.84e-2)−	7.780 3e-1 (1.96e-2)−	2.484 1e-1 (1.00e-1)−	5.919 9e-1 (2.25e-2)−	7.728 1e-1 (4.53e-2)−	8.327 7e-1 (1.04e-2)
	10	7.475 9e-1 (1.41e-2)−	8.089 0e-1 (1.60e-2)−	7.817 2e-1 (1.63e-2)−	7.807 3e-1 (1.81e-2)−	5.798 1e-1 (1.38e-1)−	6.435 7e-1 (1.79e-2)−	8.461 3e-1 (1.14e-2)−	8.633 8e-1 (7.19e-3)
	15	7.259 3e-1 (5.65e-2)−	7.712 4e-1 (2.36e-2)−	8.171 7e-1 (5.81e-2)≈	7.977 3e-1 (3.13e-2)−	1.708 8e-1 (3.31e-2)−	5.531 0e-1 (2.23e-2)−	7.997 0e-1 (3.33e-2)−	8.361 8e-1 (2.65e-2)
+ / − / ≈		0/42/3	2/38/5	4/33/8	5/30/10	0/42/3	0/42/3	1/41/3	

“+”表示此算法优于所提算法, “−”表示此算法劣于所提算法, “≈”表示与所提算法性能相近。

WFG1和WFG2分别具有平坦偏差、混合结构和凸状、断开的PF.在这两问题上,除15目标的WFG2外,MaOEA/IS-DED在所有剩余目标上均优于其他对比算法. WFG3具有线性和退化的PF,所有算法在处理该退化问题时性能一般. WFG4~WFG9具有相同的凹状PF. MaOEA/IS-DED在这些问题上表现最优,其原因是基于 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 的选择策略和基于移动密度评估的删除机制相互协作,使得种群从多样性好的搜索方向上收敛于真实PF. 为了更直观地对比各

个算法,各算法在15目标WFG9上获得的最终种群的分布情况如图2所示. 由图2可知,所有算法都能使种群个体收敛于PF,但它们的多样性存在着差异. 具体地: VaEA和MaOEA/IS-DED的多样性相似且能使种群个体相对均匀地分布于PF; NSGA-III、SPEA/R、UIMaOTO和TS-NSGA-II使种群个体主要分布于PF的边界或者中间; SPEA2-SDE、MaOEA-IGD无法使种群均匀分布于全部目标的PF.

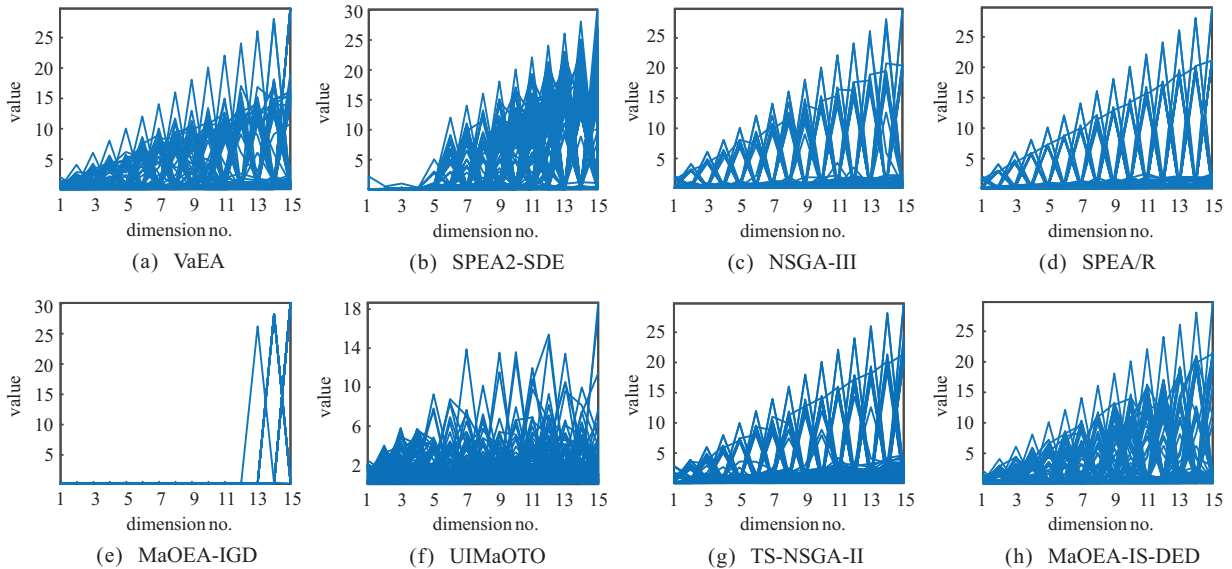


图2 各算法在15目标WFG9上获得的最终种群分布

3.4.3 算法在MaF测试问题上的对比分析

所有算法在更接近实际问题的测试问题MaF1~MaF10上得到了HV指标均值和标准差,限于篇幅,具体数值省略. MaF1和MaF4是通过分别反转DTLZ1和DTLZ3得到的,在这类问题上, MaOEA/IS-DED明显优于其他算法. 这是由于所提出算法采用的策略能够正确引导种群个体,能很好地适应前沿形状. MaF2具有凹的PF, MaOEA/IS-DED整体表现良好,仅次于最优算法SPEA2-SDE. MaF3和MaF5具有凸的PF, MaOEA/IS-DED在这两问题上表现出较大的优势. MaF6和MaF7的PF分别具有凹的、退化的和混合、退化的特性,在这两问题上, MaOEA/IS-DED整体表现良好. MaF8和MaF9具有线性和退化特性的PF, MaOEA/IS-DED在大部分测试问题上取得了最优性能. 对于PF为混合型的MaF10而言, MaOEA/IS-DED优于所有对比算法.

综上所述,无论是处理较为广泛使用的测试集DTLZ和WFG,还是处理更能反映生活实际问题的测试集MaF, MaOEA/IS-DED都表现出较强的竞争性,说明所提出算法可以有效平衡种群的收敛性与多样

性,进一步使种群收敛且均匀分布于PF.

3.5 验证所提出算法采取的两个策略的有效性

在本节中,通过比较MaOEA/IS-DED与它的两种变体算法来验证基于指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制的有效性. 两种变体为: 1) 变体1 (MaOEA/IS-DED-v1): 该变体去除了基于指标的选择策略,且直接从 $2N$ 个种群个体中选择 N 个移动密度评估值较小的个体进入下一代; 2) 变体2 (MaOEA/IS-DED-v2): 该变体保留了基于指标的选择策略,且用种群个体到原点的欧氏距离代替基于移动的密度评估删除机制来移除质量较差的个体.

所提出算法与它的两种变体算法在较为困难的测试问题上运行20次获得HV值的统计结果如表4所示. 由统计结果可知,所提出算法在所有被选测试问题上都获得了最优性能. 对于变体1而言,它劣于所提出算法,主要原因是,去除 $I_{\varepsilon+}$ 指标选择搜索方向最为相似的两个个体后,使算法不能从多样性较好的搜索方向上收敛于PF; 对于变体2而言,它劣于所提出算法的原因是,所采取的基于距离的删除机制偏重于收敛性,使算法难以平衡种群的收敛性和多样性.

表 4 MaOEA/IS-DED 和其变体在较困难的测试问题上获得 HV 值的统计结果

problem	<i>m</i>	MaOEA/IS-DED-v1	MaOEA/IS-DED-v2	MaOEA/IS-DED
DTLZ1	10	5.487 3e-1 (3.39e-1)–	6.885 3e-1 (3.48e-1)–	9.997 0e-1 (3.30e-5)
	15	6.856 2e-1 (2.77e-1)–	3.672 1e-1 (3.29e-1)–	9.998 1e-1 (1.28e-4)
DTLZ3	10	2.402 3e-1 (2.81e-1)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	9.687 0e-1 (2.70e-3)
	15	4.3722e-1 (7.82e-3)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	9.780 5e-1 (5.67e-3)
WFG1	10	5.390 1e-1 (3.29e-3)–	4.470 6e-1 (4.81e-2)–	7.063 8e-1 (2.58e-2)
	15	5.126 0e-1 (2.32e-2)–	3.261 1e-1 (3.42e-2)–	8.324 5e-1 (3.83e-2)
WFG9	10	2.473 2e-1 (6.47e-2)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	8.669 7e-1 (7.22e-3)
	15	4.73 2e-1 (3.23e-2)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	8.316 7e-1 (2.04e-2)
MaF3	10	4.957 3e-1 (2.41e-1)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	1.000 0e+0 (5.86e-6)
	15	2.294 3e-1 (3.72e-1)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	9.990 6e-1 (7.06e-4)
MaF10	10	3.235 7e-1 (1.48e-2)–	1.037 5e-1 (2.53e-2)–	8.604 4e-1 (3.40e-2)
	15	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	0.000 0e+0 (0.00e+0)–	9.982 3e-1 (7.29e-4)
+/-/≈		0/12/0	0/12/0	

“+”表示此算法优于所提算法，“-”表示此算法劣于所提算法，“≈”表示与所提算法性能相近。

综上所述,基于指标的选择策略和基于移动的密度评估删除机制对于 MaOEA/IS-DED 求解高维多目标优化问题是至关重要的,它们的创新结合不仅可以增强算法求解高维多目标优化问题的能力,而且可以有效地权衡种群收敛性和多样性。

4 结 论

针对多数高维多目标进化算法仍无法有效平衡种群收敛性与多样性的问题,本文提出了一种基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法 (MaOEA/IS-DED)。通过构建融合了基于 $I_{\epsilon+}$ 指标选择策略和基于移动的密度评估删除机制的环境选择,保留种群中收敛性和多样性较好的个体,进而解决了 MaOEAs 求解 MaOPs 时仍无法平衡种群收敛性与多样性的难题。同时,通过利用基于 $I_{\epsilon+}$ 的适应度函数 $F(x)$ 以及基于移动的密度评估函数 $D(x)$,设计了二元锦标赛匹配选择策略,用于辅助算法挑选精英父代,以产生高质量子代,进一步提升算法的搜索效率。

实验结果表明:相比于其他算法,无论是处理最为广泛使用的 DTLZ 和 WFG 测试集,还是处理较为接近实际问题的 MaF 测试集,所提出算法都表现出较强的竞争力,说明基于指标的选择策略和基于密度评估的删除机制能有效地平衡种群的收敛性与多样性,进一步使种群收敛且均匀分布于 PF。

参考文献 (References)

[1] Zhou A M, Qu B Y, Li H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(1): 32-49.

[2] Sun J, Gong D W. Recent advances in evolutionary many-objective optimization[J]. Control Theory &

Applications, 2018, 35(7): 928-938.

[3] Liu J C, Li F, Wang H H, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 879-887.

[4] Cinalli D, Martí L, Sanchez-Pi N, et al. Collective intelligence approaches in interactive evolutionary multi-objective optimization[J]. Logic Journal of the IGPL, 2020, 28(1): 95-108.

[5] Qiao J F, Han G T, Zhou H B. Knowledge-based intelligent optimal control for wastewater biochemical treatment process[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(6): 1038-1046.

[6] Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms[M]. England: John Wiley and Sons, 2001, 13-49.

[7] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.

[8] Liu Y C, Liu J C, Li T J, et al. An R2 indicator and weight vector-based evolutionary algorithm for multi-objective optimization[J]. Soft Computing, 2020, 24(7): 5079-5100.

[9] Santos T, Takahashi R H C. On the performance degradation of dominance-based evolutionary algorithms in many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 19-31.

[10] Chen Z X, Yan X H, Wu K N, et al. Many-objective optimization integrating open angle based congestion control strategy[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(6): 1145-1158.

[11] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.

[12] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A new decomposition-based NSGA-II for many-objective

- optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(7): 1191-1210.
- [13] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 331-345.
- [14] Liu Y, Zhu N B, Li K L, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. Information Sciences, 2020, 509: 376-399.
- [15] Li M Q, Yang S X, Liu X H. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(3): 348-365.
- [16] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577-601.
- [17] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [18] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [19] Pan L Q, Li L H, He C, et al. A subregion division-based evolutionary algorithm with effective mating selection for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(8): 3477-3490.
- [20] Asafuddoula M, Singh H K, Ray T. An enhanced decomposition-based evolutionary algorithm with adaptive reference vectors[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(8): 2321-2334.
- [21] Ishibuchi H, Setoguchi Y, Masuda H, et al. Performance of decomposition-based many-objective algorithms strongly depends on Pareto front shapes[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(2): 169-190.
- [22] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [23] Liu J C, Zhao Y J, Li F, et al. Expensive multi-objective optimization algorithm based on R2 indicator[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 823-832.
- [24] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 173-187.
- [25] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multi-objective search[C]. Proceedings of the International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Berlin: Springer, 2004: 832-842.
- [26] Wang H D, Jiao L C, Yao X. Two_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(4): 524-541.
- [27] Zhou J J, Yao X F, Gao L, et al. An indicator and adaptive region division based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Applied Soft Computing, 2021, 99: 106872.
- [28] Jiang S Y, Yang S X. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(3): 329-346.
- [29] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. Complex Systems, 1995, 9(2):115-148.
- [30] Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search(GeneAS) for engineering design[J]. Computer Science and Informatics, 1996, 26(4): 30-45.
- [31] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable multi-objective optimization test problems[C]. Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. Honolulu, 2002: 825-830.
- [32] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(5): 477-506.
- [33] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. Complex & Intelligent Systems, 2017, 3(1): 67-81.
- [34] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(1): 131-152.
- [35] Cai X J, Geng S J, Wu D, et al. Unified integration of many-objective optimization algorithm based on temporary offspring for software defects prediction[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2021, 63: 100871.
- [36] Ming F, Gong W Y, Wang L. A two-stage evolutionary algorithm with balanced convergence and diversity for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022: 3657 (99): 1-13.
- [37] Liang Z P, Luo T T, Hu K F, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4553-4566.

作者简介

张伟(1997—), 男, 硕士生, 从事多目标优化的研究, E-mail: 15940202607@163.com;

刘建昌(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多目标优化、故障诊断等研究, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

谭树彬(1980—), 男, 副教授, 博士, 从事工业人工智能研究及应用、智能制造与智能运维等研究, E-mail: tanshubin@ise.neu.edu.cn;

刘圆超(1996—), 男, 博士生, 从事多目标优化的研究, E-mail: Yuanchaoliu@126.com.