

# 控制与决策

Control and Decision

## 脉冲推力作用下半被动双足机器人的行走动力学分析

周观凤, 江波, 蒋贵荣

引用本文:

周观凤, 江波, 蒋贵荣. 脉冲推力作用下半被动双足机器人的行走动力学分析[J]. *控制与决策*, 2023, 38(11): 3184–3191.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0684>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### [空间机器人双臂捕获卫星操作的事件采样输出反馈神经网络避撞柔顺控制](#)

Collision avoidance and compliance control based on event sampling output feedback neural network for space robot dual arm capture satellite operation

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2113–2122 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1754>

#### [空间机器人捕获航天器操作的避撞柔顺复合自抗扰控制](#)

Collision avoidance and compliant composite active disturbance rejection control of space robot capture spacecraft

*控制与决策*. 2021, 36(2): 355–362 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0507>

#### [基于生物启发神经网络和DMPC的多机器人协同搜索算法](#)

Multi-robot cooperative search algorithm based on bio-inspired neural network and DMPC

*控制与决策*. 2021, 36(11): 2699–2706 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0959>

#### [基于未知系统动态估计的机器人预设性能控制](#)

Unknown system dynamics estimator for prescribed performance control of robotic systems

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1040–1048 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1219>

#### [基于免疫优化的平面Acrobot线性自抗扰鲁棒镇定](#)

Robust stabilization of planar Acrobot using linear active disturbance rejection control with immune optimization

*控制与决策*. 2020, 35(12): 3053–3058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0289>

# 脉冲推力作用下半被动双足机器人的行走动力学分析

周观凤<sup>1</sup>, 江波<sup>2</sup>, 蒋贵荣<sup>2†</sup>

(1. 桂林电子科技大学 电子工程与自动化学院, 广西 桂林 541004;

2. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 为了提高半被动双足机器人在水平地面上行走的稳定性, 研究一种脉冲推力作用下半被动双足机器人的行走动力学行为. 以最简单的特殊行走模型为动力学模型, 采用支撑腿脚后跟脉冲推力作为双足机器人行走动力源. 鉴于系统模型的高度非线性, 将连续阶段的非线性微分方程线性化; 利用角动量守恒和脉冲推力构造一个二维离散映射; 采用离散映射的不动点及其特征值分析系统周期步态的存在性和稳定性; 接着讨论系统的倍周期分岔. 在理论分析的基础上, 通过 Matlab 软件对半被动双足机器人的行走动力学进行仿真实验. 仿真结果表明, 在水平地面上行走的半被动双足机器人具有稳定的周期-1 步态和周期-2 步态.

**关键词:** 半被动双足机器人; 脉冲推力; 周期步态; 分岔

中图分类号: TP24 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0684

引用格式: 周观凤, 江波, 蒋贵荣. 脉冲推力作用下半被动双足机器人的行走动力学分析 [J]. 控制与决策, 2023, 38(11): 3184-3191.

## Walking dynamic analysis of semi-passive biped robot under impulse thrust

ZHOU Guan-feng<sup>1</sup>, JIANG Bo<sup>2</sup>, JIANG Gui-rong<sup>2†</sup>

(1. School of Electronic Engineering and Automation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 2. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** In order to improve the walking stability of a semi-passive biped robot on horizontal ground, the walking dynamic behavior of the semi-passive biped robot under impulse thrust is studied. Taking the simplest special walking model as the dynamic model, the impulse thrust of the heel of the stance leg is used as the walking power source of the biped robot. In view of the highly nonlinear of the system model, the nonlinear differential equation in continuous phase is linearized. A two-dimensional discrete map is constructed by using the conservation of angular momentum and impulse thrust. The existence and stability of the periodic gait of the system are analyzed by using the fixed points and their eigenvalues of the discrete map. The period-doubling bifurcation of the system is discussed. On the basis of theoretical analysis, the walking dynamics of the semi-passive biped robot is simulated by Matlab software. The simulation experiment shows that the semi-passive biped robot walking on the horizontal ground has stable period-1 gait and period-2 gait.

**Keywords:** semi-passive biped robot; impulse thrust; period gait; bifurcation

## 0 引言

双足机器人具有与人类相似的步行能力, 能适应人类的生活方式, 如能适应街道、楼梯、废墟等复杂的地形环境, 也可以代替人类从事救援、医疗、勘测、服务等行业. 双足机器人以低能耗、步态与人类相似和易于揭示人类行走内部原理的特点而引起人类的

广泛关注<sup>[1]</sup>.

20 世纪 90 年代, 文献 [2] 提出“被动动态行走”概念, 讨论机器人不需要依靠外力, 在重力作用下沿斜面向下稳定的行走. 被动动态行走概念的提出引起了科学人员的广泛关注. 文献 [3] 研究发现, 斜坡参数发生变化时系统出现周期 1-步态 (指半被动双足

收稿日期: 2022-04-23; 录用日期: 2022-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11662001, 11771105); 广西省自然科学基金项目 (2018GXNSFAA138177); 广西省科技计划项目 (AD20297006); 广西省中年教师能力提升项目 (2019KY0228).

责任编辑: 易建强.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: grjiang9@163.com.

机器人每走一步的初始状态是一样的,会维持机器人稳定地行走,是指周期步态)、周期-2步态(指半被动双足机器人每走两步状态相同,会维持机器人稳定地行走,是周期步态;由周期-1步态进入周期-2步态,表明机器人的周期-1步态失去稳定性,周期-2步态是稳定的)及混沌步态.文献[4]研究最简单的被动双足机器人模型,利用文献[5]的小参数法,得到了周期-1步态的存在性和稳定性.文献[6]使用4阶贝塞尔函数设计被动动态的轨迹,控制被动动态获得周期-1步态.文献[7]分析了两种可行运动切换模式的双足机器人的行走,通过庞加莱映射雅可比矩阵的特征值,验证了运动模式的稳定性,确定了这些稳定模式之间的切换,研究了各种模型参数对系统动力学行为的影响.结果表明,在一定的参数范围内,该模型是混沌的.

文献[8]发现斜坡角度的不断增大会导致倍周期步态的出现,并呈现出混沌状态.双足机器人行走的每一步中摆动腿与地面的冲击都存在能量损失,这使得被动行走双足机器人在水平面上不能长时间行走.于是,学者们开始研究半被动双足机器人.文献[9]利用Lyapunov定理证明了双足机器人的稳定性.文献[10]研究了4阶段模型,结合线性反馈和基于有限时间的滑动模式控制方法,得到了双足机器人行走渐近稳定性.文献[11]利用一阶泰勒级数和平衡点,将非线性方程线性化,研究了非线性方程转化成线性方程的误差.文献[12]在髋关节设计了一种弹性制动器,研究了倍周期分岔、N-S分岔、N-S-2分岔并利用OGY方法对分岔进行控制.

对于半被动双足机器人,模型的建立是一个非常重要的环节.为了实现在水平地面上持续行走,往往考虑脉冲推力.文献[13]在半被动双足机器人支撑腿脚后跟施加脉冲推力,利用庞加莱映射分析了半被动双足机器人的稳定性问题.文献[14]通过在双足机器人支撑腿脚后跟施加脉冲推力来研究人类行走的能量学和行走速度与步长之间的关系.文献[15]分析了一个简单的驱动倒立摆模型,研究了具有能量的步态,在模型中同时加入了关节力矩和推力冲量,讨论了不同关节力矩配置、不同行走速度和步长组合下的步行步态.文献[16]利用庞加莱映射线性化和人工神经网络的混沌控制算法来控制被动动态双足机器人.文献[17]利用混沌原理来控制混沌步态模式的被动两足步行模型,研究了髋关节驱动系统改变导致了混沌吸引子中任何稳定模式的快速转变.

在水平地面上行走的双足机器人很多时候只考虑在髋关节处施加控制力矩,同时考虑在连续动力

学阶段施加力矩和在离散阶段施加脉冲推力的动力学有待进一步研究.复杂脉冲推力在现实中确实存在,但在建立数学模型时通常被简化.在上述脉冲推力的文章中,施加在支撑腿脚后跟的脉冲推力是常值和线性形式的,这是对脉冲推力简单和理想化的处理.事实上,机器人行走的推力是很复杂的.考虑到这些因素,本文研究一种具有非线性脉冲推力(二次多项式形式)的半被动双足机器人行走模型,得到了系统周期步态的存在性和稳定性的条件,并在理论上严格分析了倍周期分岔.

## 1 双足机器人的动力学模型

双足机器人行走模型如图1所示.质量集中在髋关节和足部,髋关节的质量为 $m_H$ ,足部质量为 $m$ , $l$ 为双足机器人腿的长度, $g$ 为重力加速度.假设足部质量远远小于髋关节质量( $m/m_H \ll 1$ ).定义系统位置的广义坐标为 $q = [\theta, \gamma]^T$ .其中: $\theta$ 为支撑腿与地面法线的夹角, $\gamma$ 为摆动腿与地面法线的夹角, $\alpha$ 为双足机器人两腿间的夹角, $u$ 是施加在髋关节上的力矩.机器人步行过程如图2所示.

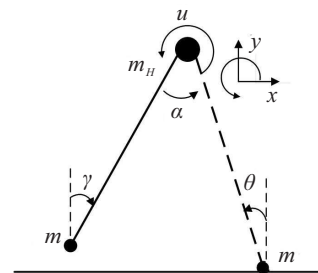


图1 半被动双足机器人模型

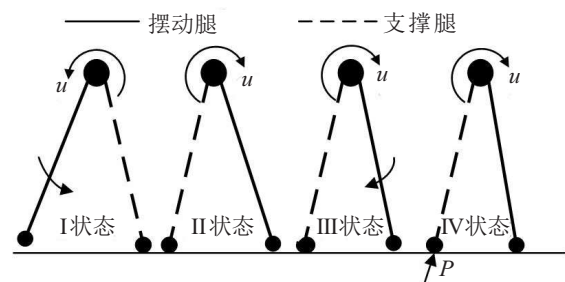


图2 半被动双足机器人行走过程

机器人的数学模型受到很多因素的影响,为了方便分析,在这里对模型做如下理想化假设:

- 1) 机器人的两条腿是完全一样的刚性直腿并且没有弹性形变;
- 2) 髋关节处没有阻尼摩擦,摆动过程中摆动腿末端与地面的“摩擦”现象忽略不计.

如图2所示,双足机器人的每一步行走分为4个状态(I, II, III, IV). I状态至III状态为双足机器人的连续动力学阶段,此时双足机器人的支撑腿做倒立单摆

运动,摆动腿离开地面围绕髋关节做单摆运动. III 状态表示双足机器人摆动腿运动到最高处时,摆动腿从高处往下落,发生回摆现象. 由拉格朗日法推导摆动阶段动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) - \sin \theta(t) = 0, \\ \dot{\gamma}(t) - \cos(\theta(t) - \gamma(t))\dot{\theta}(t) + \\ \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t) - \gamma(t)) + \sin \gamma(t) = u, \end{cases} \quad (1)$$

其中时间  $t$  是标准化时间  $\sqrt{l/g}^{181}$ .

半被动双足机器人行走过程中的IV 状态(图2)是机器人的摆动腿与地面发生碰撞. 为了建立机器人摆动腿与地面瞬间碰撞模型,做如下假设:

- 1) 半被动双足机器人的摆动腿与地面的碰撞是完全弹性碰撞,并且满足角动量守恒定理;
- 2) 摆动腿与地面发生碰撞是瞬间完成的,机器人的角度在碰撞前后不发生变化,角速度发生突变;
- 3) 半被动双足机器人与地面接触的支撑腿不会与地面发生相对滑动.

当摆动腿运动到支撑腿前且状态面满足  $\Phi = \{(\theta, \dot{\theta}, \gamma, \dot{\gamma}) | 2\theta + \beta = 0\}$  时,半被动双足机器人的摆动腿与地面发生碰撞(图2中的IV 状态),同时支撑腿在脉冲推力的作用下离地,两腿发生互换.

碰撞模型如图3所示.  $v^+$  表示摆动腿与地面发生碰撞后髋关节质点  $m_H$  的运动速度,  $v^-$  表示脉冲推力作用前髋关节质点  $m_H$  的运动速度,  $P$  是施加在支撑腿脚后跟的脉冲推力,  $\beta$  是大于0的常数为碰撞时的角度. 由图3可得,机器人的摆动腿与地面发生碰撞前后机器人的角度应满足下列关系:

$$\theta^+ = \gamma^-, \quad \gamma^+ = \theta^-. \quad (2)$$

其中:  $\theta^+$  表示摆动腿与地面碰撞后新的支撑腿与地面法线的夹角,  $\theta^-$  表示脉冲推力作用前原来的支撑腿与地面法线的夹角,  $\gamma^+$  表示摆动腿与地面碰撞后新的摆动腿与地面法线的夹角,  $\gamma^-$  表示脉冲推力作用前原来的摆动腿与地面法线的夹角.

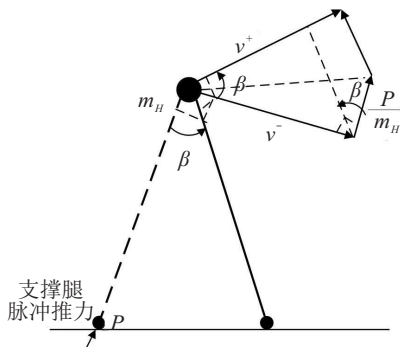


图3 半被动双足机器人的瞬间碰撞模型

鉴于  $v^+ = l\dot{\theta}^+$ ,  $v^- = l\dot{\theta}^-$ , 由图3可得

$$\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^- \cos \beta + \frac{p}{lm_H} \sin \beta. \quad (3)$$

其中:  $\dot{\theta}^+$  表示摆动腿与地面碰撞后新的支撑腿的角速度,  $\dot{\theta}^-$  为脉冲推力作用前支撑腿的角速度,  $p = P/\sqrt{l/g}$ .

由摆动腿关于髋关节的角动量守恒可得

$$\dot{\gamma}^+ = \dot{\theta}^+ \cos \beta, \quad (4)$$

其中  $\dot{\gamma}^+$  表示摆动腿与地面碰撞后新的摆动腿的角速度. 由式(2)~(4)可得

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}^+ = h_1 \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}^- + h_2. \quad (5)$$

其中

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \sin \beta \end{bmatrix} \frac{p}{lm_H}.$$

由于脉冲推力是施加在支撑腿脚后跟的,在一定程度上与支撑腿的角速度有关,而文献[13-17]已经考虑了常值和线性脉冲推力,常值和线性脉冲推力是最简单的脉冲推力. 事实上,脉冲推力可能是非线性形式的,因此考虑脉冲推力为下列形式:

$$p = a(\dot{\theta}^-)^2 + c, \quad (6)$$

其中  $a$  和  $c$  是脉冲推力调节参数,  $a > 0$ ,  $c < 0$ .

## 2 周期步态的存在性和稳定性

非线性微分方程(1)不允许直接在理论上求解解析解,因此在  $\theta = 0$ ,  $\gamma = 0$  以及  $\dot{\theta} = 0$  处,按照泰勒级数<sup>[11]</sup>展开得

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \theta = 0, \\ \dot{\gamma} - \dot{\theta} + \gamma = u. \end{cases} \quad (7)$$

令

$$\theta(t) = x_1(t), \quad \dot{\theta}(t) = x_2(t), \quad \gamma(t) = x_3(t),$$

$$\dot{\gamma}(t) = x_4(t), \quad x = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T.$$

其中:  $x_1$  为支撑腿与地面法线的夹角 ( $\theta(t)$ ),  $x_2$  为支撑腿的角速度 ( $\dot{\theta}(t)$ ),  $x_3$  为摆动腿与地面法线的夹角 ( $\gamma(t)$ ),  $x_4$  表示摆动腿的角速度 ( $\dot{\gamma}(t)$ ), 则有

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \quad x \notin \Phi, \\ x^+ = h_1(\beta)x^-(\beta) + h_2(\beta), \quad x \in \Phi. \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$f(x) = (x_2(t), x_1(t), x_4(t), x_1(t) - x_3(t) + u)^T.$$

如图4所示,实线表示摆动腿( $x_3, x_4$ )行走的相图,虚线表示支撑腿( $x_1, x_2$ )行走的相图,点划线表示在脉冲推力作用下两条腿互换产生的跳跃. 机器人运动轨迹如图5所示.

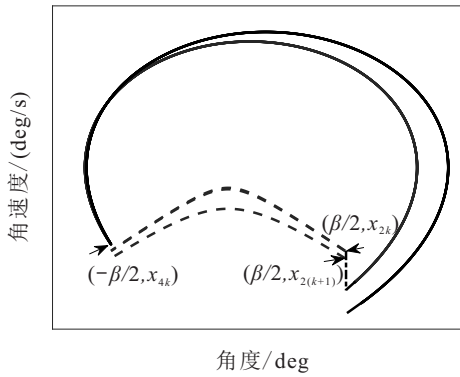


图4 机器人行走的相图

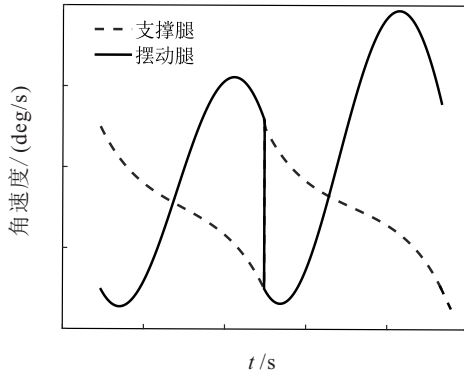


图5 机器人运动轨迹

系统(8)的轨迹从初始点  $A_k(\beta/2, x_{2k}, -\beta/2, x_{4k})$  在时间  $t = \tau$  到达  $\bar{A}_k(-\beta/2, \bar{x}_{2k}, \beta/2, \bar{x}_{4k})$ , 由于脉冲推力的作用跳到点  $A_{k+1}(\beta/2, x_{2(k+1)}, -\beta/2, x_{4(k+1)})$ , 其中

$$\begin{cases} x_{2(k+1)} = \cos \beta \bar{x}_{2k} + \frac{p \sin \beta}{lm_H}, \\ x_{4(k+1)} = \cos^2 \beta \bar{x}_{2k} + \frac{p \sin \beta \cos \beta}{lm_H}. \end{cases} \quad (9)$$

由式(6)可得  $p = a(\bar{x}_{2k})^2 + c$ , 系统(8)的特解是

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + x_{2k} \right) e^t + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - x_{2k} \right) e^{-t}, \\ x_2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + x_{2k} \right) e^t - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - x_{2k} \right) e^{-t}, \\ x_3(t) = - \left( \frac{3\beta}{4} + u \right) \cos t + \left( x_{4k} - \frac{x_{2k}}{2} \right) \sin t + \frac{x_1(t)}{2} + u, \\ x_4(t) = \left( \frac{3\beta}{4} + u \right) \sin t + \left( x_{4k} - \frac{x_{2k}}{2} \right) \cos t + \frac{x_2(t)}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

根据  $-\beta/2 = x_1(\tau)$  和  $\beta/2 = x_3(\tau)$  有

$$\tau = \ln \frac{2x_{2k} - \beta}{2x_{2k} + \beta} := \tau_{2k}, \quad (11)$$

$$u = \frac{\frac{3\beta}{4}(\cos \tau + 1) - \left( x_{4k} - \frac{x_{2k}}{2} \right) \sin \tau}{1 - \cos \tau} := u_{12k}. \quad (12)$$

根据式(9)和  $p = a(\bar{x}_{2k})^2 + c$ , 假设  $x_{2(k+1)} = x_{k+1}$ ,  $x_{4(k+1)} = y_{k+1}$ , 有

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \cos \beta + \frac{\sin \beta (ax_k^2 + c)}{lm_H} := f_1(x_k, a), \\ y_{k+1} = \cos \gamma \left( x_k \cos \beta + \frac{\sin \beta (ax_k^2 + c)}{lm_H} \right) := f_2(x_k, a). \end{cases} \quad (13)$$

映射(13)的不动点是

$$\begin{cases} x_{01} = \frac{1 - \cos \beta - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{lm_H} \right)^2}}{2a \frac{\sin \beta}{lm_H}}, \\ y_{01} = \frac{1 - \cos \beta - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{lm_H} \right)^2}}{2a \frac{\sin \beta}{lm_H}} \cos \beta. \end{cases} \quad (14)$$

映射(13)的不动点对应系统(8)周期-1步态

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + x_{01} \right) e^{t-k\tau_{01}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - x_{01} \right) e^{-(t-k\tau_{01})}, \\ x_2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + x_{01} \right) e^{t-k\tau_{01}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - x_{01} \right) e^{-(t-k\tau_{01})}, \\ x_3(t) = - \left( \frac{3\beta}{4} + u_{101} \right) \cos(t - k\tau_{01}) + \left( \cos \beta x_{01} - \frac{x_{2k}}{2} \right) \sin(t - k\tau_{01}) + \frac{x_1(t)}{2} + u_{101}, \\ x_4(t) = \left( \frac{3\beta}{4} + u_{101} \right) \sin(t - k\tau_{01}) + \left( \cos \beta x_{01} - \frac{x_{01}}{2} \right) \cos(t - k\tau_{01}) + \frac{x_2(t)}{2}, \end{cases} \quad (15)$$

其中  $t \in (k\tau_{01}, (k+1)\tau_{01})$ .

由于  $x_{01} < 0$ , 有  $2x_{01} - \beta < 0$ . 注意到

$$\frac{2x_{01} - \beta}{2x_{01} + \beta} > 1,$$

则有

$$\frac{1 - \cos \beta - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{lm_H} \right)^2}}{a \frac{\sin \beta}{lm_H}} + \beta < 0. \quad (16)$$

由式(14)可知,半被动双足机器人行走形成周期步态. 由于摆动腿发生回摆现象,由图4可知机器人在  $t = \tau_{01}$  时到达  $\bar{A}_k$ . 在  $t = \tau_{01}$  时摆动腿的速度小于支撑腿的速度,则有

$$-\frac{3\beta \sin \tau_{01}}{2(\cos \tau_{01} - 1)} - y_{01} + x_{01} < \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + x_{01} \right) e^{\tau_{01}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - x_{01} \right) e^{-\tau_{01}}. \quad (17)$$

在式(16)和(17)下,机器人的摆动腿发生回摆现象,系统(8)有周期-1步态如式(15)所示.

下面讨论周期-1步态的稳定性. 通过式(13)和(14),不动点  $x_{01}$  的特征值是

$$\lambda_{01} = f'_1(x_{01}) = 1 - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{lm_H} \right)^2}.$$

当  $|\lambda_{01}| < 1$  时系统(8)的周期-1步态是稳定的,即

$$-1 < 1 - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{lm_H} \right)^2} < 1, \\ a < \frac{4 - (\cos \beta - 1)^2}{-4c \sin^2 \beta} l^2 m_H^2 := a_1. \quad (18)$$

当  $a < a_1$  时,系统(8)有一个唯一稳定的周期-1步态.

**定理1** 在式(16)和(17)下,半被动双足机器人的摆动腿发生回摆,系统(8)有周期-1步态. 当  $a < a_1$  时,这个周期步态是稳定的.

在半被动双足机器人的行走过程中,在平衡点处展开的基础上得到机器人周期步态的存在性和稳定性. 因此,线性模型(8)对于机器人两腿间夹角  $\beta$  很小的情况是有效的. 也就是说,半被动双足机器人在行走过程中能被视为一直在平衡点附近.

接下来,利用映射(13)和下列引理<sup>[19]</sup>来分析系统(8)的倍周期分岔.

**引理1** 令  $f_\mu$  是一个单参数映射,且  $f_{\mu_0}$  是特征值为  $-1$  的不动点,同时在  $(x_0, \mu_0)$  处满足下列两个条件:

$$(C1) \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \neq 0;$$

$$(C2) \quad \bar{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \neq 0.$$

则  $f_{\mu_0}$  在点  $(x_0, \mu_0)$  处发生倍周期分岔.

如果  $\bar{a} > 0$ ,周期-2轨道是稳定的,如果  $\bar{a} < 0$ ,周期-2轨道是不稳定的.

### 3 倍周期分岔

**定理2** 系统(8)在  $a = a_1$  处发生倍周期分岔,且对于某个  $\varepsilon > 0$ ,当  $a \in (a_1, a_1 + \varepsilon)$  时,系统(8)有稳定的周期-2步态.

**证明** 当  $\lambda_{01} = -1$  时,有

$$-1 = 1 - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left( \frac{\sin \beta}{m_H} \right)^2},$$

计算可得

$$a = \frac{4 - (\cos \beta - 1)^2}{-4c \sin^2 \beta} l^2 m_H^2 := a_1, \quad (19)$$

则有

$$x_{01}(a_1) = \frac{-2c \sin \beta (\cos \beta + 1)}{lm_H [(\cos \beta - 1)^2 - 4]}.$$

映射(13)在点  $(x_{01}(a_1), a_1)$  处有

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial a} =$$

$$\frac{2c \sin^2 \beta (\cos \beta + 1)^2 (-4 \cos \beta - 3)}{((\cos \beta + 1)^2 - 4) l^2 m_H^2} \neq 0,$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial f_1^3}{\partial x^3} \right) =$$

$$\frac{\sin^2 \beta ((\cos \beta - 1)^2 - 4)^2}{8c^2 m_H^2} > 0.$$

由引理1可知,系统(8)在式(19)时发生倍周期分岔. 在  $a = a_1$  时,一个周期-2步态从周期-1步态分岔出来. 由于  $\bar{a} > 0$ ,周期-2步态是稳定的,对某个参数  $\varepsilon > 0$ ,当  $a \in (a_1, a_1 + \varepsilon)$  时系统(8)有稳定的周期-2步态.  $\square$

为了研究周期-2步态,考虑下列映射:

$$x_{k+1} = f_1^2(x_k, a) = \\ G_1^3(a)x_k^4 + 2G_2^2(a) \cos \beta x_k^3 + G_3(a)x_k^2 + \\ G_4(a)x_k + G_5(a). \quad (20)$$

其中

$$G_1 = a \frac{\sin \beta}{lm_H},$$

$$G_2 = c \frac{\sin \beta}{lm_H},$$

$$G_3 = 2G_1^2 G_2 + \cos^2 \beta G_1 + G_1 \cos \beta,$$

$$G_4 = 2G_1 G_2 \cos \beta + \cos^2 \beta,$$

$$G_5 = G_1 G_2^2 + G_2 \cos \beta + G_2.$$

映射(13)的两个不动点也是映射(20)的两个不动点,则有

$$G_1^3(a)x_0^4 + 2G_2^2(a) \cos \beta x_0^3 + G_3(a)x_0^2 + \\ (G_4(a) - 1)x_0 + G_5(a) = \\ (x_0 - x_{01})(x_0 - x_{02})[G_1^2(a)x_0^2 + \\ (\cos \beta + 1)G_1(a)x_0 + G_1(a)G_2 + 1 + \cos \beta].$$

由  $x_{k+1} - f_1^2(x_k, a) = 0$  可得

$$G_1^2(a)x_0^2 + (\cos \beta + 1)G_1(a)x_0 + \\ G_1(a)G_2 + 1 + \cos \beta = 0. \quad (21)$$

计算得到方程(21)的解为

$$\begin{cases} x_{03} = \frac{-(\cos \beta + 1)}{2G_1(a)} + \frac{\sqrt{(\cos \beta + 1)^2 - 4(G_1(a)G_2 + 1 + \cos \beta)}}{2G_1(a)}, \\ x_{04} = \frac{-(\cos \beta + 1)}{2G_1(a)} - \frac{\sqrt{(\cos \beta + 1)^2 - 4(G_1(a)G_2 + 1 + \cos \beta)}}{2G_1(a)}. \end{cases} \quad (22)$$

因为映射  $x_{03} = f_1(x_{03}), x_{04} = f_1(x_{04})$ , 所以不动点  $x_{03}$  和  $x_{04}$  是迭代映射 (20) 的不动点, 同时对应系统 (8) 的周期-2 步态. 类似周期-1 步态的推导, 可以得到

$$\begin{cases} \tau_{03} = \ln \frac{2x_{03} - \beta}{2x_{03} + \beta}, \\ \tau_{04} = \ln \frac{2x_{04} - \beta}{2x_{04} + \beta}; \\ u_{103} = \frac{-\frac{3\beta}{4} \cos \tau_{03} + \left(x_{03} \cos \beta - \frac{x_{03}}{2}\right) \sin \tau_{03} - \frac{3\beta}{4}}{\cos \tau_{03} - 1}, \\ u_{104} = \frac{-\frac{3\beta}{4} \cos \tau_{04} + \left(x_{04} \cos \beta - \frac{x_{04}}{2}\right) \sin \tau_{04} - \frac{3\beta}{4}}{\cos \tau_{04} - 1}. \end{cases} \quad (23)$$

系统 (8) 的周期-2 步态如下所示:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + x_{04}\right) e^{t-k\tau_{04}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} - x_{04}\right) e^{-(t-k\tau_{04})}, \\ x_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + x_{04}\right) e^{t-k\tau_{04}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} - x_{04}\right) e^{-(t-k\tau_{04})}, \\ x_3(t) = -\left(\frac{3\beta}{4} + u_{104}\right) \cos(t - k\tau_{04}) + \left(\cos \beta x_{04} - \frac{x_{2k}}{2}\right) \sin(t - k\tau_{04}) + \frac{x_1(t)}{2} + u_{104}, \\ x_4(t) = \left(\frac{3\beta}{4} + u_{104}\right) \sin(t - k\tau_{04}) + \left(\cos \beta x_{04} - \frac{x_{04}}{2}\right) \cos(t - k\tau_{04}) + \frac{x_2(t)}{2}, \end{cases} \quad (24)$$

其中  $t \in ((k+1)\tau_{03}, (k+1)\tau_{03} + \tau_{04}]$ .

**定理 3** 当  $a \in (a_1, a_1 + \varepsilon)$  时, 系统 (8) 有稳定的周期-2 步态.

### 4 仿真实验

类似于文献 [13], 取  $m_H = 10 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg}, l = 1 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . 在 Matlab 环境下, 取  $\beta = 0.4 \text{ deg}, a = 117, c = -5.5$ . 通过计算, 得到

$$\begin{aligned} (x_{01}, y_{01}) &= (-0.2083, 0.1919), \\ \tau_{01} &= 3.8940, a_1 = 119.7092, \\ -\frac{3\beta \sin \tau_{01}}{2(\cos \tau_{01} - 1)} - y_{01} + x_{01} &= -0.2526 < \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + x_{01}\right) e^{\tau_{01}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} - x_{01}\right) e^{-\tau_{01}} &= -0.2083, \\ 1 - \cos \beta - \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 - 4ac \left(\frac{\sin \beta}{lm_H}\right)^2} &= \\ &= \frac{a \frac{\sin \beta}{lm_H}}{a \frac{\sin \beta}{lm_H}} + \beta = \\ &= -0.0133 < 0. \end{aligned}$$

图 6 表示支撑腿和摆动腿在二维平面的相图, 其中实线为摆动腿行走的相图, 虚线为支撑腿行走的相图, 点划线表示摆动腿与地面发生碰撞.

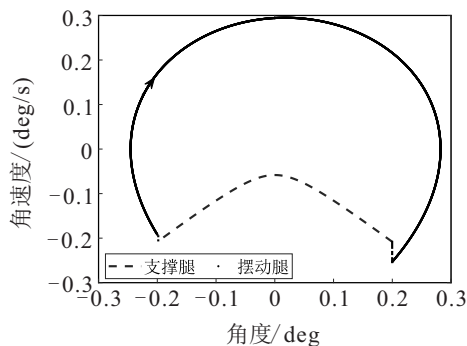


图 6 周期-1 步态

图 7 表示半被动双足机器人角度和角速度随时间变化的曲线图, 可以看出摆动腿的角度变化曲线和正弦函数曲线大致相似, 支撑腿的速度始终小于 0.

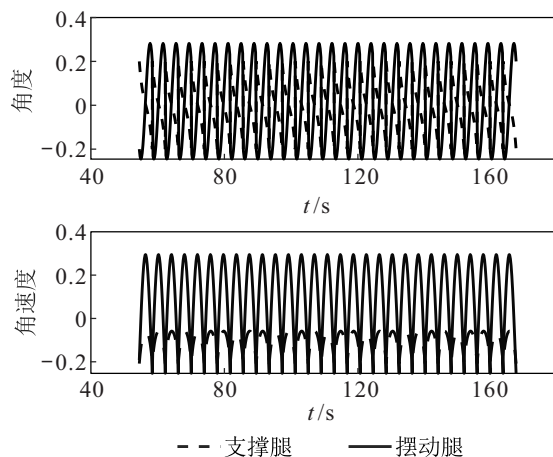


图 7 周期-1 步态的时间序列

由定理 2 可知, 在  $a_1 = 119.7092$  时系统 (8) 发生倍周期分岔; 对于  $a \in (0, 119.7092)$ , 系统 (8) 有一个稳定的周期-1 步态; 在  $a = a_1 = 119.7092$  时, 一个周期-2 步态从周期-1 步态分岔出来. 分岔图如图 8 所示, 可以看出随着参数  $a$  的增大, 系统出现倍周期分岔, 而倍周期分岔是产生混沌的一条道路.

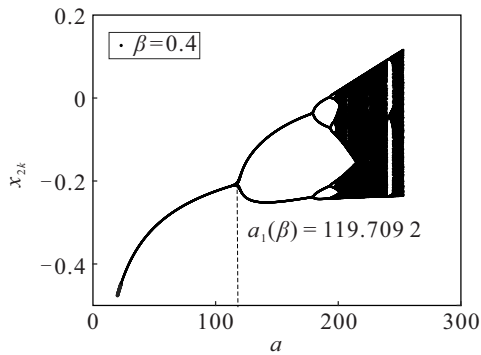


图8 系统(8)在  $c = -5.5$  时的分岔图,  $a \in (0, 300)$

取  $a_1 = 120, c = -5.5$ . 图9表示半被动双足机器人行走的周期-2步态. 可以看出, 当双足机器人的摆动腿摆动到最大角度时角速度等于0, 摆动腿从高处往下落时, 摆动腿的角度逐渐减小, 最终趋向于0.2; 图10表示半被动双足机器人周期-2步态的角度和角速度的时间序列图.

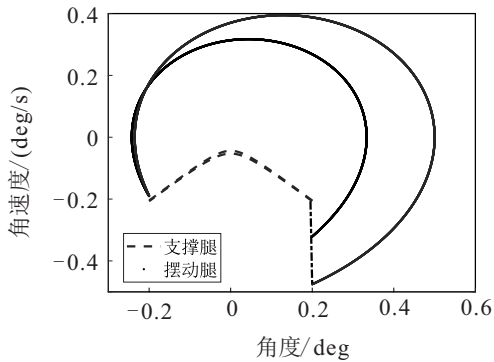


图9 周期-2步态

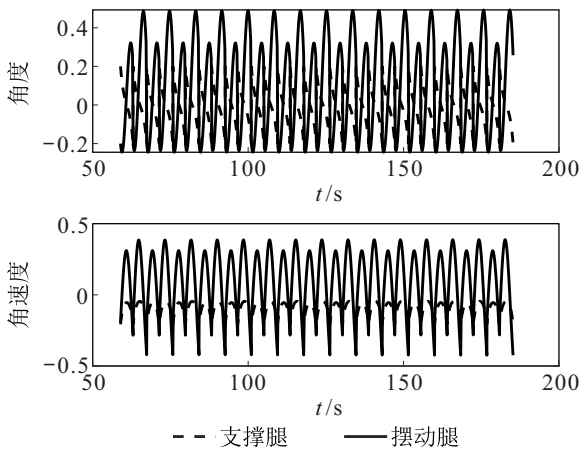


图10 周期-2步态的时间序列

由于半被动双足机器人摆动阶段的连续动力学模型(1)是非线性的, 在分析周期-1步态的存在性和稳定性时使用了线性化. 为了准确预测双足机器人的周期步态, 接下来使用文献[5, 20]的摄动理论来分析一阶非线性方程. 令

$$\theta_s(t) = \varepsilon\Theta(t), \theta_{ns}(t) = \varepsilon\Psi(t).$$

其中:  $\varepsilon$  是小参数,  $\Theta(t)$  和  $\Psi(t)$  是放缩变量. 使用二阶

泰勒级数, 则一阶非线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} - \Theta + \frac{1}{6}\Theta^3 = 0, \\ \ddot{\Psi} - \ddot{\Theta} + \Psi + \frac{1}{2}(\Theta - \Psi)^2\ddot{\Theta} - \frac{1}{6}\Psi^3 = u. \end{cases} \quad (25)$$

方程(25)是非线性方程(1)的一阶非线性方程. 同样, 转换冲击条件  $2\Theta + \beta = 0$ , 对于转化方程有

$$\begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \\ \Psi \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \\ \Psi \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}^- + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \sin \beta \end{bmatrix} \frac{p}{m_H}. \quad (26)$$

方程(25)和(26)组成了一阶非线性方程, 接下来利用数值模拟一阶非线性方程. 取  $m_H = 10 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg}, l = 1 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, \beta = 0.4 \text{ deg}, a = 117, c = -5.5$ . 图11和图12展示了半被动双足机器人在相空间中形成一个稳定的极限环. 可以看出, 对于一阶非线性方程, 系统(25)有一个稳定的周期-1步态. 此外, 线性系统(8)有一个稳定的周期-1步态(如图6所示). 由图6, 图11和图12可以看出, 系统(8)的周期步态可以准确预测系统(1)的行走模式<sup>[11]</sup>.

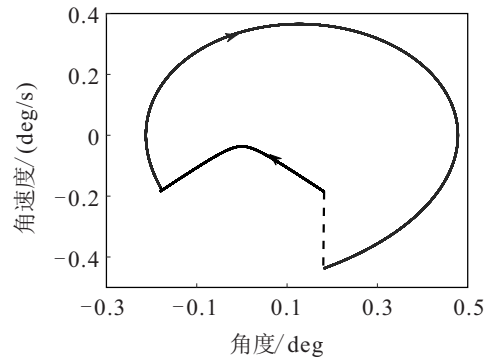


图11 一阶非线性系统的相图

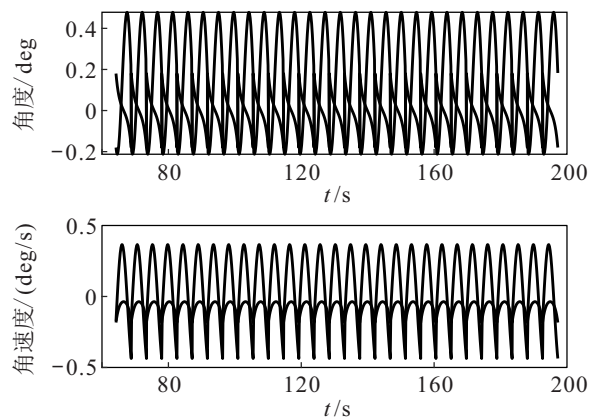


图12 一阶非线性系统的时间序列

### 5 结论

本文提出了一种具有非线性脉冲推力的半被动双足机器人动力学模型. 在机器人的行走过程中, 为

了减少能量损耗,在支撑腿脚后跟沿支撑腿的方向施加脉冲推力. 由于非线性形式的脉冲推力比常值和线性形式的脉冲推力的半被动双足机器人模型的动力学性质更复杂,可利用非线性脉冲推力来建立数学模型. 考虑到半被动双足机器人模型是高阶的复杂非线性系统,将连续阶段的非线性微分方程线性化,运用庞加莱映射和 Floquet 理论,给出了系统周期-1 步态的存在性和稳定性条件;使用分岔理论,验证了系统周期步态的倍周期分岔现象. 仿真实验表明,非线性脉冲推力可以实现半被动双足机器人在水平地面上稳定地行走.

### 参考文献(References)

- [1] 刘丽梅, 田彦涛, 李建飞, 等. 被动行走机器人变路况切换控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1203-1208.  
(Liu L M, Tian Y T, Li J F, et al. Switch control between different slopes for passive dynamic walker[J]. Control and Decision, 2011, 26(8): 1203-1208.)
- [2] McGeer T. Passive dynamic walking[J]. International Journal of Robotics Research, 1990, 9(2): 62-82.
- [3] Znegui W, Gritli H, Belghith S. Design of an explicit expression of the Poincaré map for the passive dynamic walking of the compass-gait biped model[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 130: 109436.
- [4] Makarenkov O. Existence and stability of limit cycles in the model of a planar passive biped walking down a slope[J]. Proceedings Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, 2020, 476(2233): 20190450.
- [5] Garcia M, Chatterjee A, Ruina A, et al. The simplest walking model: Stability, complexity, and scaling[J]. Journal of Biomechanical Engineering, 1998, 120(2): 281-288.
- [6] Added E, Gritli H, Belghith S. Trajectory tracking-based control of the chaotic behavior in the passive bipedal compass-type robot[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2022, 231(5): 1071-1084.
- [7] Fathizadeh M, Mohammadi H, Taghvai S. A modified passive walking biped model with two feasible switching patterns of motion to resemble multi-pattern human walking[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 127: 83-95.
- [8] Znegui W, Gritli H, Belghith S. Stabilization of the passive walking dynamics of the compass-gait biped robot by developing the analytical expression of the controlled Poincaré map[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(2): 1061-1091.
- [9] Azimi V, Shu T, Zhao H H, et al. Model-based adaptive control of transfemoral prostheses: Theory, simulation, and experiments[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(2): 1174-1191.
- [10] Beigzadeh B, Razavi S A. Dynamic walking analysis of an underactuated biped robot with asymmetric structure[J]. International Journal of Humanoid Robotics, 2021, 18(4): 1-16.
- [11] Asano F. Stability analysis of underactuated compass gait based on linearization of motion[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 33(1): 93-111.
- [12] Deng K, Zhao M, Xu W. Level-ground walking for a bipedal robot with a torso via hip series elastic actuators and its gait bifurcation control[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2016, 79: 58-71.
- [13] 周亚丽, 张奇志. 基于脉冲推力的半被动双足机器人无模型神经网络控制[J]. 计算机应用研究, 2018, 35(1): 56-61.  
(Zhou Y L, Zhang Q Z. Model-free neural network control for quasi-passive biped robots based on impulsive push[J]. Application Research of Computers, 2018, 35(1): 56-61.)
- [14] Kuo D. Energetics of actively powered locomotion using the simplest walking model[J]. Journal of Biomechanical Engineering, 2002, 124(1): 113-120.
- [15] An K, Liu Y Y, Li Y R, et al. Energetic walking gaits studied by a simple actuated inverted pendulum model[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(5): 2273-2281.
- [16] Taghvai S, Vatankeh R. Detection of unstable periodic orbits and chaos control in a passive biped model[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 2016, 40(4): 303-313.
- [17] Kurz M J, Stergiou N. An artificial neural network that utilizes hip joint actuations to control bifurcations and chaos in a passive dynamic bipedal walking model[J]. Biological Cybernetics, 2005, 93(3): 213-221.
- [18] Moghadam S M, Talarposhti M S, Niaty A, et al. The simple chaotic model of passive dynamic walking[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 93(3): 1183-1199.
- [19] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields[M]. New York: Springer-verlag, 1983: 178-180.
- [20] Safa A T, Alasty A, Naraghi M. A different switching surface stabilizing an existing unstable periodic gait: An analysis based on perturbation theory[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(4): 2127-2140.

### 作者简介

周观凤(1993—), 女, 博士生, 从事双足步行机器人动力学的研究, E-mail: 1836163763@qq.com;

江波(1998—), 男, 硕士生, 从事双足步行机器人步态控制的研究, E-mail: 981496778@qq.com;

蒋贵荣(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非光滑动力系统的研究, E-mail: grjiang9@163.com.