

控制与决策

Control and Decision

冗余机械臂逆运动学求解方法研究进展

贾龙飞, 乔尚岭, 陶云飞, 郑继贵, 郭亚星, 陈靛, 黄玉平

引用本文:

贾龙飞, 乔尚岭, 陶云飞, 郑继贵, 郭亚星, 陈靛, 黄玉平. 冗余机械臂逆运动学求解方法研究进展[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3297–3316.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1190>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

求解非线性方程组的智能优化算法综述

Overview of intelligent optimization algorithms for solving nonlinear equation systems

控制与决策. 2021, 36(4): 769–778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0379>

移动机器人运动规划中的深度强化学习方法

Deep reinforcement learning for motion planning of mobile robots

控制与决策. 2021, 36(6): 1281–1292 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0470>

基于时间延时估计和自适应模糊滑模控制器的双机械臂协同阻抗控制

Coordinated impedance control for dual-arm robots based on time delay estimation and adaptive fuzzy sliding mode controller

控制与决策. 2021, 36(6): 1311–1323 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1701>

复合类别航站楼分配问题的改进和声搜索算法

Solving composite airport gate allocation problem with improved harmony search

控制与决策. 2020, 35(11): 2743–2751 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0242>

融合长短时记忆机制的机械臂多场景快速运动规划

Multi-scene rapid motion planning combining with long and short time memory mechanisms for manipulators

控制与决策. 2020, 35(12): 2968–2976 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1387>

冗余机械臂逆运动学求解方法研究进展

贾龙飞^{1,2}, 乔尚岭^{1,2}, 陶云飞^{1,2}, 郑继贵¹, 郭亚星¹, 陈 靓^{1,2}, 黄玉平^{1,2†}

(1. 北京精密机电控制设备研究所, 北京 100076; 2. 航天伺服驱动与传动技术实验室, 北京 100076)

摘 要: 随着科学技术的发展, 冗余机械臂凭借其多自由度的特性获得学者的广泛关注. 其中包括执行指定任务时, 需要将任务路径转换为关节空间轨迹, 进行逆运动学求解, 求取非线性函数的连续逆映射. 该求解过程尤为重要且非常复杂, 国内外学者对此开展了大量研究. 这里将冗余机械臂逆运动学求解方法进行分类, 归纳整理出各类求解方法, 分别概述解析法、数值解法、智能算法以及对应子方法的基本原理、对比及研究现状. 最后, 指出逆运动学求解方法面临的核心问题以及发展趋势.

关键词: 冗余机械臂; 逆运动学; 解析法; 数值解法; 智能算法

中图分类号: TP24 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1190

引用格式: 贾龙飞, 乔尚岭, 陶云飞, 等. 冗余机械臂逆运动学求解方法研究进展 [J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3297-3316.

Research progress on inverse kinematics solution methods of redundant manipulators

JIA Long-fei^{1,2}, QIAO Shang-ling^{1,2}, TAO Yun-fei^{1,2}, ZHENG Ji-gui¹, GUO Ya-xing¹, CHEN Jing^{1,2}, HUANG Yu-ping^{1,2†}

(1. Beijing Institute of Precision Mechatronics and Controls, Beijing 100076, China; 2. Laboratory of Aerospace Servo Actuation and Transmission, Beijing 100076, China)

Abstract: With the development of science and technology, redundant manipulators have attracted extensive attention from scholars. When the redundant manipulator completes the specified task, it is required to transform the task path into the trajectory of joints, in which continuous inverse mapping of nonlinear functions is required to solve to develop the inverse kinematics solution. The solving process is particularly important and complex, and related researchers have conducted a lot of research on it. In this paper, the methods of solving inverse kinematics of the redundant manipulator are classified, and various methods with different characteristics are summarized. Besides, the basic principles and research status of the analytical method, numerical method, intelligent algorithm, and corresponding sub-method are described respectively. Finally, the development trend and existing challenges of inverse kinematics are pointed out.

Keywords: redundant manipulator; inverse kinematics; analytical method; numerical method; intelligent algorithm

0 引 言

当冗余机械臂的自由度 n 大于任务空间维数 m ($n > m$) 时, 该类机械臂存在多种运动模式与多目标优化能力, 具备极好的环境适应性与极高的避障能力. 逆运动学求解是冗余机械臂的核心问题, 即根据机械臂末端位姿求解各关节的位置变量, 得到对应的机械臂构形. 冗余机械臂的逆运动学模型是一个多输入、多输出的系统, 可将模型求解转变为多目标优化求解或非线性方程组求解. 但多自由度系统尤为

复杂, 如何求解且从无限解中选择一个最优解, 受到学术界的广泛关注^[1].

本文首先叙述冗余机械臂逆运动学求解方法的分类. 然后, 概述解析法、数值解法、智能算法的基本原理与研究现状. 解析法包括末端跟随法、脊线法、分段法与位姿分离法、等效法、参数化法; 数值解法包括伪逆法、阻尼最小二乘法、梯度投影法、增广雅可比矩阵法、加权最小范数法; 智能算法包括神经网络算法、粒子群算法、遗传算法及其他智能算法. 最后,

收稿日期: 2022-07-05; 录用日期: 2022-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52005124).

责任编辑: 誉斌.

†通讯作者. E-mail: yuping.huang@lasat.com.

指出逆运动学求解方法面临的核心问题与发展趋势.

1 逆运动学问题概述

1.1 建系方法

在冗余机械臂逆运动学求解中,首先需要建立运动学模型,以指定规则设立各关节/连杆的坐标系,分析各坐标系之间的转换关系,构建机械臂关节空间与操作空间位置级/速度级的映射关系.目前存在多种建系方法^[2]: T矩阵法、DH(denavit hartenberg)法、MDH(modified DH)法、CPC(complete and parametrically continuous)法、MCPC(modified CPC)法、旋量法、四元数法^[3]等.

1.2 原始逆运动学求解存在的问题

建立运动学模型后,可整理出逆运动学方程.该方程为非线性超越方程,求解尤为复杂.原始求解方

法存在下列问题:1)解不唯一,指定末端位姿存在多组解;2)无解,无法抵达末端执行器的特殊位姿,或者超过关节限位,无法求得对应关节角度;3)解无效,求解过程中未考虑环境约束,求解出的机械臂构形不符合要求,例如出现奇异问题、碰到障碍物、连杆位于危险地带、干涉其他机械臂运动等,即得到的解不可行.针对这些问题,涌现出诸多改进求解方法.

1.3 逆运动学求解方法的分类

针对冗余机械臂逆运动学求解的复杂性及存在的问题,学者们提出了多种求解方法,方法的分类也多种多样.

1.3.1 第1种分类——位置级、速度级、加速度级

从位置、速度、加速度层面^[4]对冗余机械臂逆运动学求解方法进行分类,如图1所示.

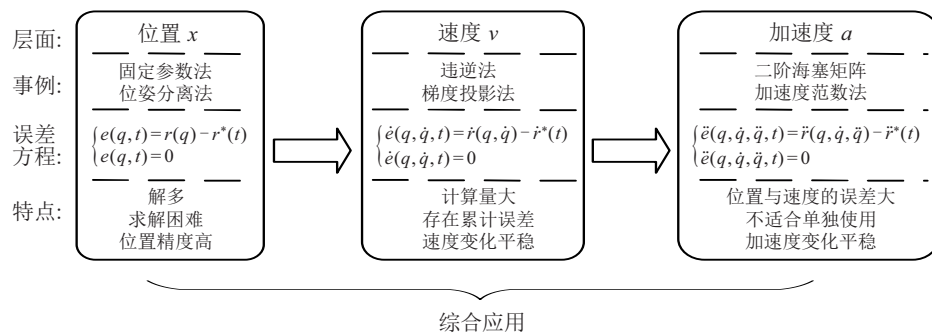


图1 位置、速度、加速度层面的方法分类

1) 位置级. 位置级的逆运动学将机械臂末端位姿转化为各关节旋转角度或平移距离. 位置级通常为非线性方程组求解, 拥有诸多求解方法, 例如位姿分离法、降低自由度法、臂角法、固定角度法等. 由于冗余机械臂逆运动学解的个数可能无穷个, 从位置级求逆解存在一定难度.

2) 速度级. 速度级的逆运动学根据机械臂末端速度求解对应的关节角速度或平移速度. 利用该方法求得关节速度后, 通过积分可获得关节位置, 即速度级上的运动学逆解只是一种速度解, 位置精度难以保证. 速度级通常为线性方程组求解, 代表方法包括雅可比伪逆法、加权最小范数法、梯度投影法等, 需要计算冗余机械臂的雅可比矩阵及其伪逆矩阵, 存在计算量大、误差累计等问题, 方法中的控制周期还会影响位置精度. 从速度级进行逆运动学求解, 还存在雅可比逆矩阵奇异等不足.

3) 加速度级. 从位置级和速度级求解逆运动学, 难以应用于由加速度控制的冗余机械臂, 可借助二阶海塞矩阵(Hessian)从加速度级分析逆运动学求解. 其中的最小化加速度范数法将关节加速度平方

和作最小化处理, 使得该方法不仅应用于由加速度控制的冗余机械臂, 还可通过解析得到速度, 进而用于由速度控制的冗余机械臂.

1.3.2 第2种分类——去冗余法、最优化法、任务扩充法

在冗余机械臂逆运动学求解方法中, 有些方法通过减少变量求得唯一解, 有些方法寻找最优值, 还有一些方法通过增加约束求得唯一解.

1) 去冗余法. 消去部分冗余参数, 进而简化运算, 完成逆运动学的封闭求解.

常用的去冗余法是将关节角参数化, 在确定7自由度机械臂一个关节的位置后, 将冗余逆运动学问题转变为非冗余逆运动学问题. Yahya等^[5]采用等角度优化, 将相邻连杆夹角设为相同. 还可以利用冗余机械臂的部分自由度进行逆运动学求解, 例如: ①仅改变机械臂前端自由度, 后端自由度数值为定值; ②仅改变后端自由度, 前端自由度数值为定值; ③仅改变中间自由度.

通过去冗余法降低了逆运动学求解的复杂程度, 可以得到相应解. 但该方法将冗余机械臂转换为非

冗余机械臂,无法体现冗余机械臂的易避障、避奇异、灵活性好等特点.

2) 最优化法. 设定目标函数,从所有解中找到一个最优解,实现目标优化,或者求得最小范数解.

该方法的基本思想是建立表征机械臂逆运动学问题的目标函数,将逆运动学问题转变为非线性最优化问题,然后借助合适的优化算法寻找最优解. 最优化模型中的目标函数即为逆运动学优化指标,可设定为最短时间、避关节运动极限、运动避障、最小动能、运动灵活等. 模型中的约束条件是末端执行器位姿、障碍物位置、奇异点等因素.

最优化法根据设定条件选择一个解,但一些冗余机械臂对应的非线性模型过于复杂,无法通过6个(少量)约束条件求解20个(甚至更多)自由度.

3) 任务扩充法. 针对多任务或自由度冗余的情况,人们提出了任务扩充法,该方法又称为扩充任务法、任务分层法、多目标优先排序法、任务加权法、排序逆运动学法等. 任务扩充法在满足主要任务(如:末端执行器在任务空间中的位置和方向、避极限、避障)的前提下,尽可能地满足次要任务(如:避奇异、力矩优化、能量优化、笛卡尔轨迹跟踪和抖动抑制). 如果无法同时满足,则在满足主要任务的前提下,使次要任务所对应的误差最小化.

冗余机械臂末端任务的维数小于自由度个数,即雅可比矩阵为长方矩阵. 若增加末端任务的维数,使其等于自由度个数,则雅可比矩阵可整理为方阵形式

的增广雅可比矩阵,使逆运动学存在确定解.

Baillieul^[6]提出了任务扩充法,将避障、避奇异作为次要任务,使得逆运动学存在确定解. Nakamura等^[7]提出一种零空间内的任务扩充法,基于速度/加速度实现多级任务优化,但求解过程为瞬时优化,无法预测未来状态,并且次要任务影响主要任务的实现. Chembuly等^[8]提出一种全局搜索和多启动框架来确定给定任务位置下的多种运动学构型,选择关节距离最小化和避碰等二级准则实现冗余分解. Sekiguchi等^[9]提出一种求解多目标优化逆运动学的新方法,基于虚拟弹簧模型和基于节点的阻尼控制来调整虚拟弹簧的效果,对目标进行优化排序,该方法易于实现、收敛速度快、鲁棒性好. Žlajpah等^[10]提出一种用于冗余度分解的任务空间分解(task space decomposition, TSD)方法,利用任务空间中的冗余自由度执行次要任务,根据目标函数梯度保证适当的自运动,并收敛至指定构型.

任务扩充法要求增加的次要任务与机械臂的末端位姿约束线性无关,即次要任务无法影响主要任务. 增加的次要任务无法用单个普遍的解析表达式表示,并且增广雅可比矩阵也会造成算法奇异.

1.3.3 第3种分类——解析法、数值解法、智能算法

冗余机械臂逆运动学求解方法还可分为解析法、数值解法、智能算法,具体分类如图2所示. 下面概述3种方法的概念及特点,在第2~第4节分别介绍对应子方法的原理与研究现状.

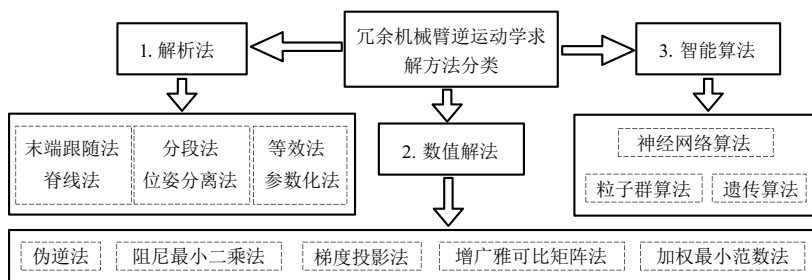


图2 冗余机械臂逆运动学求解方法的分类框图

1) 解析法. 又称为解析解法、封闭法、封闭解等. 解析法通过几何关系或代数变换求解逆运动学,该方法通过封闭公式确定末端姿态与各个关节角度之间的关系.

在解析法中,通过机械臂结构得到求解方程式,无需提供初始值,将数据代入方程即可求得许多解,通过设定条件选择唯一解. 在解析法中还可采用变换解法,如:欧拉变换解法、RPY (roll-pitch-yaw)变换解法、球面变换解法等. 通过解析法可求得许多解,不

存在奇异值问题,该方法的计算速度、效率、精度均优于需要迭代求解的数值解法,且计算复杂度低于数值解法,便于实现冗余机械臂的实时控制. 但解析法仅适用于指定构型和几何结构参数的冗余机械臂,通用性和灵活性差,无法处理优先约束问题. 解析法求解过程复杂,在消元、去冗余、约分的过程中易出错,难以获得正确的一元高次方程,需要与其他算法相结合筛选出最优解,使得求解过程更为复杂,也难以满足避障等约束条件. 在机械臂不符合Pieper准则的情况

下,使用解析法进行逆运动学求解困难.

采用解析法求解逆运动学问题的思路较为简单,但复杂的机械臂结构使得解析法求解过程变得尤为困难.因此,机械臂结构中的特殊几何关系可采用几何法简化,有效降低求解计算的复杂程度.对于具有复杂结构或多自由度的冗余机械臂,可采用数值解法代替解析法求解逆运动学.

2) 数值解法. 冗余机械臂逆运动学求解问题通过数值解可转化为优化问题,确定好目标函数后,进行迭代求解.

数值解法借助迭代方法和优化目标函数求得期望解.该方法对冗余机械臂构型和几何参数的依赖性不强,计算过程灵活,具备通用性.

数值解法的求解过程是寻找最优解或近似解的过程,求解速度不仅与求解算法相关,还与求解精度成反比,故数值解法无法兼顾实时性和高精度的要求.初始点的设定也影响数值解法能否收敛,因为存在诸多迭代,在相同精度要求下,数值解法的求解速度比解析法慢.总之,数值解法存在累计误差,既费时又不稳定,难以得到所有解.

数值解法是进行复杂机械臂逆运动学求解的主要方法,但求解时存在雅可比矩阵的奇异性,计算量较大.针对这些问题,国内外学者结合智能算法对解析法和数值解法进行了相应改进.

3) 智能算法. 随着智能化时代的发展,越来越多的智能优化算法被相继提出,可将冗余机械臂的逆运动学求解问题转换为最优化问题,然后采用智能算法求解最优值.虽然采用智能算法可以求出最优解,但需要多次迭代,计算时间长,难以应用于实时求解,有时还会陷入局部最优或不收敛.因此,针对不同最优化模型使用适合的智能算法,可在较短的迭代过程中求解出最优解.

1.3.4 各类求解方法的特点

通过不同分类方式得到诸多类逆运动学求解方法,每种方法的优缺点如表1所示.

在逆运动学求解过程中,针对具体结构的机械臂可选用解析法,对于自由度较多的机械臂可选用数值解法,而任务较多或优化条件苛刻的机械臂可选用智能算法.

2 解析法

解析法是冗余机械臂逆运动学求解方法中最早出现的一种方法,该方法针对具体的机械臂结构进行简化,利用臂杆之间的几何关系建立关节变量与末端执行器位姿的约束方程,根据末端位姿求解关节变

表1 各类求解方法的特点

| 类型 | 优点 | 缺点 |
|-------|----------------------------------|--|
| 位置级 | 位置精度高 | 求解困难,且求解结果对应的速度变化不平稳 |
| 速度级 | 速度平稳变化 | 位置精度低、计算量大、存在累积误差与奇异现象 |
| 加速度级 | 加速度变化小且平稳 | 机械臂末端速度不为零,难以控制位置及速度 |
| 消元法 | 求解过程简单,可得唯一解 | 限制了参数,未充分利用冗余性 |
| 最优化法 | 可满足对应指标,并实现目标优化 | 求解过程复杂,易陷入局部最小值或无解 |
| 任务扩充法 | 尽可能地满足次要任务,鲁棒性好 | 模型复杂,存在算法奇异 |
| 解析法 | 模型简单,求解速度快,可实现实时求解、保证高精度 | 通用性和灵活性差,求解过程复杂,无法处理优先约束问题 |
| 数值解法 | 通用性和灵活性好,可构建通用的求解框架,求解过程简单,可实现避障 | 求解速度慢,无法兼顾实时性和高精度的要求,受初始点的影响,存在累积误差和奇异现象 |
| 智能算法 | 适用于复杂机械臂,可实现多目标优化以及避障 | 模型复杂,求解过程复杂且求解速度慢,实时求解困难,可能陷入局部最小值或无解 |

量. 求解过程分为3步: 1) 确定冗余机械臂构型; 2) 求解各个关键点坐标; 3) 求解各个关节变量值.

解析法通过几何或代数方法,用简单的方程表征冗余机械臂运动学,进而获取非线性函数的逆函数.该方法具备良好的几何直观性、计算成本低等优点.解析法可分为末端跟随法、脊线法、分段法、等效法、参数化法等.

2.1 末端跟随法

末端跟随法又称为重复规划法、蛇形运动等,关节中心点跟随末端执行器做运动,如图3所示,可按照末端到初始端的顺序,依次求解每个关节的位置,所得结果确定且唯一.

1983年,Asano等^[11]首次提出末端跟随法,简化了冗余机械臂逆运动学求解过程. Sreenivasan等^[12]提出一种采用曳物线解冗余的方法,给定连杆末端的运动,通过末端关节在曳物线的运动确定连杆空间位置,使得所有关节在指定路径上的偏差最小.由于末端跟随法未考虑关节约束和方向, Aristidou等^[13]提出一种新方法: 正逆向逼近逆运动学方法,该方法令关节下一时刻的位置在当前位置和前一个关节目标位置的连线上. Palmer等^[14]提出一种序列二次规划方法进行优化,优化目标为末端位置误差最小化,但存在计算量大、位置精度低等缺点.

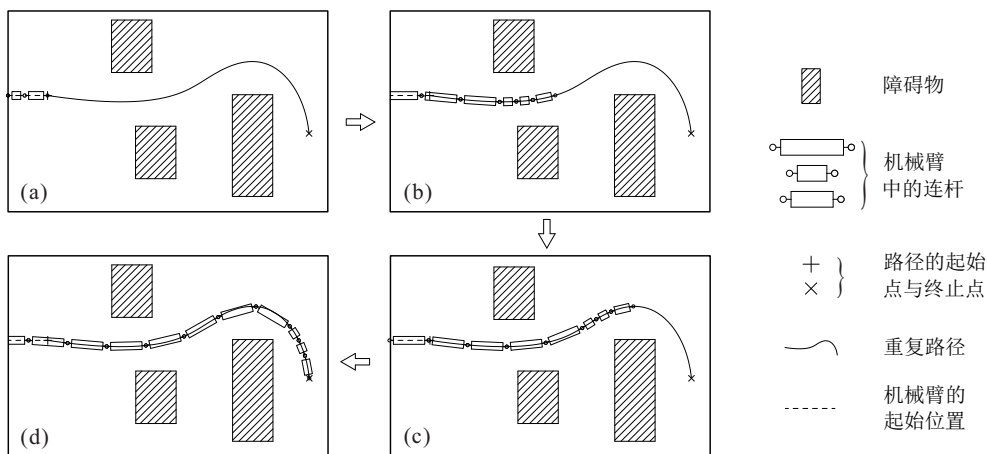


图3 末端跟随法示意

近5年来,国内外学者依旧热衷于末端跟随法的研究. 王俊刚等^[15]在末端跟随法的基础上,使用线性插值优化法及迭代步长顺序查找法,快速且精确地匹配关键点与离散路径曲线. Palmer等^[16]提出一种主动卷取的方法,利用跟随法控制冗余机械臂做盘绕运动. 针对冗余机械臂逆运动学计算复杂、关节偏角超出范围的问题, Jia等^[17]在末端跟随法的基础上,提出一种限制关节偏角的改进方法,不仅降低了逆运动学计算成本,还实现了机械臂避障. 针对冗余机械臂在深腔环境的运动, Xie等^[18]提出一种用于刚性骨干蛇形机械臂的末端跟随法,该方法定位精度高、计算时间少.

末端跟随法适用于蛇形机械臂、绳驱机械臂、连续型机械臂、柔性机械臂的逆运动学求解,但所得解唯一,运动路径曲率不能过大,机械臂运动空间受限,降低了冗余机械臂的灵活性,该方法只能应用于已知环境中.

2.2 脊线法

基于末端跟随法,延伸出一种考虑时变特性的解析法——脊线法. 末端跟随法和脊线法将机械臂末端及关键点拟合至指定路径上,在脊线法中需要借助模态函数使得脊线随时间而变化,在末端跟随法中无需模态函数,且路径与时间无关.

脊线法又称为脊骨曲线(backbone curve)法,是Chirikjian等^[19]提出的一种适用于冗余机械臂逆运动学求解的几何方法,利用模态法(modal approach)构造分段连续的脊骨曲线,描述机械臂的宏观几何构型,将逆运动学求解问题转换为分析时变脊骨曲线问题.

在脊线法中,根据需求选择模态函数,拟合得到脊骨曲线,利用拟合算法求出各关节在脊线的坐标,即求得运动学逆解. 脊线法包括两步: 1) 确定脊骨

曲线,机械臂的重要宏观特性可被脊骨曲线捕捉,采用工程近似法突出机械臂运动的几何特征; 2) 求得关节位姿,使用连续脊骨曲线指定关节位姿,通过拟合过程使机械臂精确地接近脊骨曲线.

在笛卡尔空间坐标系中,脊线可表达为

$$\mathbf{X}(s, t) = \int_0^s \mathbf{l}(\sigma, t) \mathbf{u}(\sigma, t) d\sigma. \quad (1)$$

其中: $s \in [0, 1]$ 为无量纲参数,是 t 时刻沿脊线的距离度量,脊线基底位于 $s = 0$ 处; $\mathbf{X}(s, t)$ 是从脊线基底到 s 点的向量; $\mathbf{l}(\sigma, t)$ 是脊线切线的长度; $\mathbf{u}(\sigma, t)$ 是脊线在 s 点处的切线向量. 图4为脊线法模型, μ_r 、 μ_b 、 μ_f 是脊线上的3个点; s_b 、 s_f 分别为运动波后面、前面的主曲线参数值; F_r 、 F_b 、 F_f 分别为 μ_r 、 μ_b 、 μ_f 处的坐标系. 该模型采用基于振幅变化的参数化脊线法和行波步态分析机械臂的运动学,通过抽象的骨干曲线/脊线评估冗余机械臂的运动.

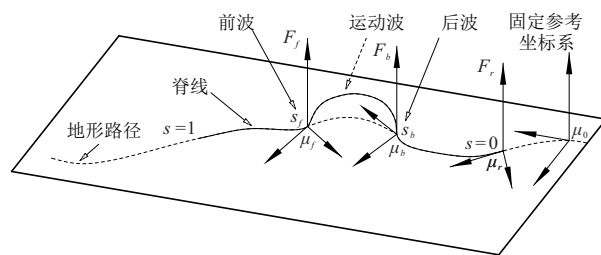


图4 脊线法模型

脊线法作为一种有效的逆运动学求解方法,许多学者开展了大量研究. Fahimi等^[20]研究工作空间对模态函数和脊线起始点斜率的影响,利用分段连续脊线捕捉机械臂的宏观几何特性,借助递归拟合方法确定连杆在脊线上的位置和关节角,通过模态方法将逆运动学问题简化为约束问题,采用脊线概念和模态方法对机械臂进行逆运动学求解. Zhen等^[21]基于脊线法提出一种用于波纹管模型曲率积分的计算简化方法,赋予机械臂在非结构环境中的自适应能

力. Song等^[22]将脊线设定为贝塞尔曲线,通过拟合多个二次贝塞尔曲线制定形状重构算法,从而估计机械臂的实时位置和形状信息.传统脊线法将所有关节均拟合至脊线,降低了机械臂的冗余特性,对此,Xu等^[23]提出一种改进模态函数法,该方法中的偶数关节不再限制在脊线上,从而提高了机械臂的可调节性.Zhang等^[24]基于脊线法设计螺旋曲线的表达式,提出一种形状拟合算法来约束机械臂的宏观形状,采用移相和角度求解算法求得运动过程中各关节的角度值.

脊线法降低了逆运动学求解的难度,但也会降低

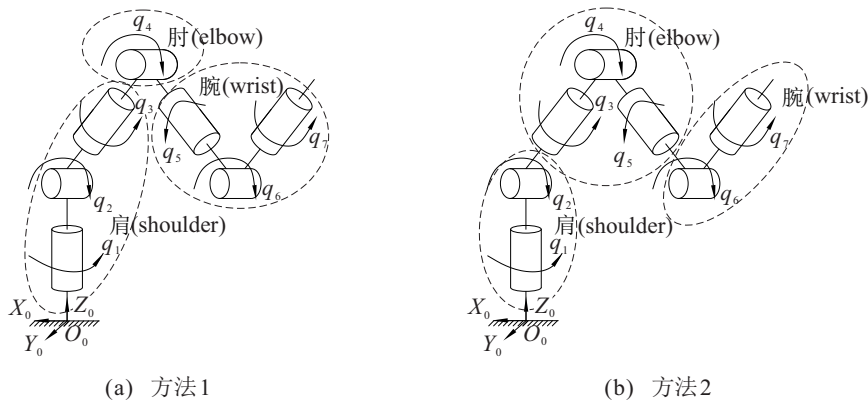


图5 分段法示意

Wang等^[25]将机械臂划分为虚拟段,并将扩散方程生成的工作空间级联,该工作空间生成算法的计算复杂度与机械臂的自由度数无关,该方法适用于冗余机械臂的逆运动学求解.Moradi等^[26]建立了冗余机械臂的封闭解模型,分析了引入的附加参数与关节限位之间的关系,以肘段运动最小化为目标进行逆运动学求解.Mu等^[27]指出分段法的关键在于确定肩段、肘段、腕段的节点,根据这3个关键点获得各个节点的空间位置及角度,对每段进行独立求解,通过分段法使得机械臂尽可能地接近期望位置.Zhou等^[28]针对蛇形机械臂,提出一种基于分段运动学的头部控制策略,对头部、颈部、基础部分进行分段控制,该方法在未知环境中仍可实现机械臂头部的精确控制.

分段法将机械臂分成几段,进行逆运动学求解,降低了求解复杂性,简化了逆运动学计算.然而分成几段,每段包含几个自由度,这些都存在不确定性.

分段法中有一种将机械臂分成两段的位姿分离法,该方法分段控制机械臂的位置与姿态,通过前几个关节控制末端位置,通过后几个关节控制末端姿态.例如潘博等^[29]结合位姿分离法,将冗余自由度视为优化条件,降低了计算量,提高了运动精度.位姿分离法简化了冗余机械臂模型的复杂程度,可规划出期

冗余机械臂的冗余特性及灵活性.脊线法常用于蛇形机械臂、冗余机械臂、连续型机械臂,尤其是自由度大于20的超冗余机械臂.

2.3 分段法

针对冗余机械臂逆运动学求解复杂的问题,国内外学者将机械臂分成几段进行运动学分析,例如在图5中,将7自由度机械臂分成肩-肘-腕3部分.分段法分为几段以及每段几个关节均不确定,例如图5(a)将前3个关节和后3个关节视为肩和腕,中间一个关节当成肘;图5(b)将前2个关节和后2个关节当成肩和腕,中间3个关节视为肘.

望位姿,但该方法的求解结果通常不是最优解,并且无法实现避障功能.

2.4 等效法

等效法又称为转换法,可将冗余机械臂的几个关节等效为一个关节.例如将具备旋转自由度的3个关节等效为一个球(spherical)关节,如图6所示.

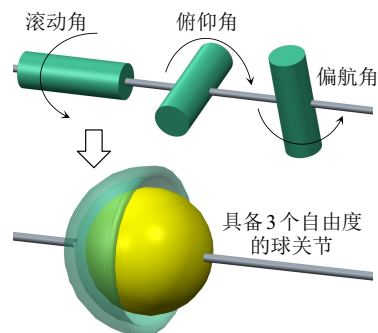


图6 等效法示意

许多学者在逆运动学求解的过程中,通过等效法将实际关节等效为虚拟关节.针对7自由度冗余机械臂,Yu等^[30]提出一种等效法进行逆运动学求解,将具备偏移量的腕部关节等效为具有3个自由度的虚拟球关节,通过机械臂位姿和末端关节角度求解虚拟机械臂的位姿,进而求解虚拟机械臂的逆运动学,最终

得到实际机械臂的逆运动学求解结果. Faria等^[31]在考虑奇异性与关节极限的基础上, 推导关节角与臂角的转换关系, 借助臂平面将关节极限和奇点转换为臂角, 然后基于位置的逆运动学算法计算关节角度, 并采用冗余分解策略来避免奇异和关节限制. Lou等^[32]在相邻万向节之间引入虚拟旋转, 将万向节等效为球关节, 通过机械臂绘制直线路径和圆形路径, 验证了等效法的正确性和有效性.

等效法将多自由度合并, 通过重新规划机械臂的形状与布局, 简化了机械臂模型和逆运动学求解. 但该方法仅适用于指定结构, 通用性差.

2.5 参数化法

参数化法是一种将关节角参数化的方法, 该方法通过引入关节/臂角参数的数值, 或者关节/臂角参数之间的关系, 或者额外的参数约束, 进而得到冗余机械臂的参数化解析解, 最终采用代数法或其他算法完成求解.

参数化法分为等角度法、固定角度法和臂角法等, 该方法使用等效法将多个关节角等效为臂角. 1) 等角度法令机械臂中的每个关节偏角都相等或部分关节偏角相等. 2) 固定角度法通过固定某些关节角度, 将冗余机械臂等效为非冗余机械臂, 通过基础的逆运动学求解出未固定关节的角度. 固定角度法虽然简单且实用, 但无法体现出冗余机械臂的冗余特性. 3) 在臂角法中选择冗余机械臂的某种构型, 通过臂角约束机械臂构型, 进行逆运动学求解.

给定机械臂末端执行器的位姿后, Kreutz-Delgado等^[33]通过一个变量将冗余度进行参数化处

理, 该变量定义了臂平面与参考平面之间的角度, 最终求得逆运动学的唯一解. 针对冗余造成的多解现象, Samer团队^[4,34]采用一种可操作度指标表征机械臂与奇异位形的距离, 将相邻关节角度设为相等, 从逆运动学的解集中选出一组解, 简化求解过程, 避免了关节共线及奇异现象. Shimizu等^[35]基于参数化法推导出封闭式逆运动学解, 通过关节角范围获得可行解, 总结出保证关节角不超出极限范围的方法. Zaplana等^[36]根据工作空间或执行任务定义不同的优化函数, 选择一组冗余关节进行参数化处理, 将冗余机械臂简化为非冗余机械臂, 应用封闭解析方法进行逆运动学求解. Jiokou等^[37]将冗余机械臂关节进行参数化处理, 将生长神经网络用于工作空间聚类, 将邻域函数引入构型空间聚类, 消除每个聚类中过于接近的关节角向量, 求得集合解或随机解. Zhang等^[38]提出一种基于固定关节角参数优化的关节极限最优逆运动学解, 将固定关节逆解的解析法与关节极限优化的数值方法相结合. 这种半解析方法收敛于封闭形式的定解, 并具有对称性, 避免了伪逆解的非保守性. Ma等^[39]还基于臂角参数化, 推导无偏置下的球-滚-球式的冗余机械臂的逆运动学解析解, 证明了臂角参数化方法优于关节角参数化方法.

通过构建各个参数之间的关系, 参数化法计算简单, 可快速确定可行的关节位置解, 但仅适用于特殊构型的机械臂, 降低了机械臂的冗余性能.

2.6 各种解析法的特点

通过分析各种解析法的原理及研究现状, 总结出对应优缺点、应用对象及应用环境, 如表2所示.

表2 各种解析法的特点

| 各种解析法 | 优点 | 缺点 | 应用对象及应用环境 |
|--------------------------|--|--|------------------------|
| 末端跟随法 ^[11-18] | 逆运动学求解简单, 运动协调, 容易控制机械臂的位置, 定位精度高 | 逆解唯一, 机械臂运动空间与灵活性受限, 降低了冗余特性, 且运动环境需已知 | 蛇形机械臂、连续型机械臂, 静态障碍物 |
| 脊线法 ^[19-24] | 逆运动学求解简单, 具备可调节性, 可实时避障 | 逆解唯一, 降低了灵活性与冗余特性 | 蛇形机械臂、超冗余机械臂, 动态障碍物 |
| 分段法 ^[25-28] | 通过分段简化逆运动学可解决奇点问题, 可控制机械臂位置与姿态 | 不好确定如何分段, 求解结果非最优结果, 甚至无解 | DOF ≥ 7的机械臂, 无障碍物 |
| 位姿分离法 ^[29] | 可分别控制位置和姿态, 降低计算量, 提高工作效率 | 求解结果不是最优解, 无法实现避障 | DOF ≥ 7的机械臂, 无障碍物 |
| 等效法 ^[30-32] | 简化了机械臂模型, 可实现关节角与臂角之间的转换, 可避免关节奇异和关节限制 | 求解困难, 通用性差, 等效后的虚拟臂杆长度不确定 | DOF ≥ 7的无球关节的机械臂, 无障碍物 |
| 参数化法 ^[33-39] | 可构建各个参数之间的关系, 减小计算量, 避免奇异现象 | 降低了冗余特性, 求解结果不是最优解 | DOF ≥ 7的特殊构型的机械臂, 无障碍物 |

3 数值解法

数值解法通过分析冗余机械臂末端执行器及各关节的速度,将逆运动学求解问题转换为数学计算问题,针对该数学问题进行数值计算与求解.

首先定义具有 n 个自由度的冗余机械臂的末端执行器的广义位置矢量与速度矢量为 \boldsymbol{x} 和 $\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^m$, 关节空间的位置矢量与速度矢量为 \boldsymbol{q} 和 $\dot{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ 是雅可比矩阵,则机械臂末端速度与关节速度的关系可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}. \quad (2)$$

其中: $\dot{\boldsymbol{x}}$ 表示机械臂末端广义速度矢量,定义为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T \in \boldsymbol{R}^m; \quad (3)$$

$m = 6$; v_x, v_y, v_z 为机械臂末端点的线速度; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为机械臂末端点的角速度.

在已知所有关节速度的情况下,可借助雅可比矩阵求解末端执行器的广义速度的唯一解,如式(2)所示,该过程为正运动学.但在实际应用中,需要进行逆运动学求解,通过末端执行器的广义速度求解关节速度,该求解过程尤为复杂且解不唯一,故国内外学者对其开展了大量研究,并改进了对应的数值求解方法.下面依次介绍5种数值解法:伪逆法、阻尼最小二乘法、梯度投影法、增广雅可比矩阵法、加权最小范数法.

3.1 伪逆法

伪逆法(pseudoinverse)全称为雅可比矩阵伪逆法,又可称为广义逆法(generalized inverse)、最小平方方法(least square)、最小范数法(minimum norm).

冗余机械臂的雅可比矩阵是长方矩阵,只有伪逆,无常规逆,故雅可比矩阵伪逆法是冗余机械臂逆运动学求解中的一种常用方法.基于伪逆的求解方法将求解的数学模型整理成最小范数特解加上齐次解,其思路是让机械臂末端向目标点方向移动.

雅可比矩阵伪逆法由Whitney^[40]提出,当时被称为Moore-Penrose伪逆,该方法对应的逆运动学求解公式如下:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}^T (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T)^{-1} \dot{\boldsymbol{x}}, \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{J}^\dagger \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$ 为雅可比矩阵的伪逆,又可称为右广义逆矩阵.

通过引入零空间项可满足避障、避免关节极限、避免奇异现象、关节力矩最小化等其他条件,加入零空间,可将式(4)改为

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}_s + \dot{\boldsymbol{q}}_h = \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^\dagger \boldsymbol{J})\dot{\boldsymbol{q}}_0. \quad (5)$$

其中: $\dot{\boldsymbol{q}}_s$ 为亚定线性方程组的伪逆解,它落在 \boldsymbol{J} 的行

空间中; $\dot{\boldsymbol{q}}_h$ 为对应的齐次方程组 $\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}_h = 0$ 的通解,它落在 \boldsymbol{J} 的零空间中; $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ 是关节空间的任一速度向量; $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^\dagger \boldsymbol{J})$ 是零空间投影矩阵.

通常在末端跟踪误差最小的前提下,使得关节速度的范数最小,进而构建出下式所示的优化模型:

$$\begin{cases} \min \|\dot{\boldsymbol{q}}\|; \\ \text{s.t.} \min \|\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{x}}\|. \end{cases} \quad (6)$$

对 \boldsymbol{J} 和 \boldsymbol{J}^\dagger 进行奇异值分解,可得

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{J}^\dagger = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^\dagger \boldsymbol{V}^T. \quad (8)$$

其中: $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R}^{m \times m}$ 和 $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 均为正交矩阵; $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ 和 $\boldsymbol{D}^\dagger \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$ 分别是由 \boldsymbol{J} 和 \boldsymbol{J}^\dagger 的奇异值组成的对角矩阵.

若 \boldsymbol{J} 的奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$, 则 \boldsymbol{J}^\dagger 的奇异值可用下式表示:

$$\boldsymbol{D}^\dagger(i, i) = \begin{cases} 1/\sigma_i, & \sigma_i \neq 0; \\ 0, & \sigma_i = 0. \end{cases} \quad (9)$$

通过式(4)、(8)及(9),求得关节速度范数为

$$\|\dot{\boldsymbol{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i/\sigma_i)^2}, \quad (10)$$

其中 γ_i 满足

$$[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m] = \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^T \dot{\boldsymbol{x}}. \quad (11)$$

从式(9)和(10)可以看出,当 \boldsymbol{J} 的最小奇异值 σ_m 接近零时,关节速度范数趋近无穷大.换言之,当冗余机械臂接近奇异构型时,通过伪逆法虽然可以保证末端执行器的跟踪轨迹精度,但所得关节速度过大,无法保证机械臂的稳定性.

机械臂运动过程中,雅可比矩阵随时间变化,因此,Mayorga等^[41]将伪逆法与线性代数系统相结合,提高了伪逆矩阵的鲁棒性.Xiao等^[42]将逆运动学求解等效为二次规划问题,设计出离散时间二次规划求解器,求解关节加速度下的二次规划问题,解决了关节角度、速度及加速度的约束.Guo等^[43]针对冗余机械臂系统存在的干扰问题,基于伪逆法,提出一种基于伪逆式的规划方法,该方法中的笛卡尔误差具有全局和指数收敛性,从而表明该方法具备抑制干扰的能力.Guo等^[44]提出一种基于雅可比矩阵伪逆的新型逆运动学方法,利用典型的数值差分规则对已有方法离散化,新方法以离散时间的形式描述问题,理论证明了该方法具备良好的性能.

伪逆法具有结构简单且易实现的优点,但在雅可比矩阵未知的情况下,伪逆法会错误规划机械臂的运

动. 当机械臂构型接近奇异位置时, 会遇到矩阵奇异等问题, 利用伪逆法求得的关节速度极大, 所求逆解不收敛, 不具备实用性. 伪逆法求解过程为数值求解, 存在累积误差, 影响控制精度.

3.2 阻尼最小二乘法

针对伪逆法在奇异位置不具备实用性的问题, Wampler^[45] 提出了阻尼最小二乘法 (damped least squares), 又称麦夸特法 (Levenberg Marquardt). 阻尼最小二乘法以损失末端精度为代价, 避免在奇异位置附近出现关节速度过大的现象. 阻尼最小二乘法在伪逆法的基础上, 将优化模型改为

$$\begin{cases} \min \|\dot{\mathbf{q}}\|; \\ \text{s.t.} \min \|\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{x}}\| + \lambda^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\lambda \in \mathbf{R}$ 为非零阻尼系数, 通过该参数可实现末端跟踪精度与关节速度的折中.

求解式(12)可得

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (13)$$

其中 $\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{J}^* \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为雅可比矩阵的奇异鲁棒性逆, 可采用奇异值分解 (singular value decomposition, SVD)、QR 分解或 Cholesky 分解对最小二乘法中的矩阵进行分解. 对 \mathbf{J} 进行 SVD 分解, 可得

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T, \quad (14)$$

进而求得关节速度的范数为

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda^2 \gamma_i^2}{(\lambda^2 + \sigma_i^2)}}. \quad (15)$$

通过式(15)可以发现, 阻尼系数 λ 设定为合适的值后, 无论冗余机械臂雅可比矩阵的最小奇异值 σ_m 是否接近于零, 都不会使得关节速度过大.

通过式(13)可求出末端跟踪误差为

$$\|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \sum_{i=1}^r \gamma_i^2 \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \sigma_i^2)} \right]^2 + \sum_{i=r+1}^m \gamma_i^2, \quad (16)$$

其中 r 是雅可比矩阵的秩. 从式(16)可得, 当 λ 不为零时, 会增大末端跟踪误差.

Colomé 等^[46] 将连续任务优先策略与选择性阻尼相结合, 对奇异值进行滤波处理, 该方法在雅可比条件、时间步长、多任务性能等方面取得良好折中, 最终获得了鲁棒性更好的逆解结果, 并生成了平滑轨迹. Wu 等^[47] 使得阻尼因子随着奇异性自适应变化, 解决了奇异位置时的关节速度无限或无法计算的问题. Wang 等^[48] 提出了基于高斯阻尼最小二乘法的逆运动学求解方法, 引入最优的增强步长系数, 使迭代

收敛速度更快、更准确, 并将该方法与机器学习相结合, 通过仿真验证了该方法在收敛性、精度和速度方面具备较好的性能.

相较于伪逆法和转置法, 采用阻尼最小二乘法求解冗余机械臂逆运动学, 在奇异位置时的速度平滑且不会太大, 更具实用性, 但阻尼最小二乘法的收敛速度慢且跟踪精度差. 采用该方法受到阻尼系数的限制, 阻尼系数越大, 机械臂在奇异位置越平稳, 但会影响末端跟踪精度.

3.3 梯度投影法

采用上述方法无法体现冗余性能在指标优化方面的优势, 可设定优化性能指标 $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, 使用梯度投影法 (gradient projection method) 改变关节角度和角速度, 从而实现指标优化.

梯度投影法用于解决关节约束问题, 该方法借助梯度方向, 在主任务的雅可比零空间中最小化二次惩罚函数. 首先令关节空间速度矢量为

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k \nabla \mathbf{H}(\mathbf{q}). \quad (17)$$

其中: k 为优化系数, 决定优化方向与速度; $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{q})$ 为性能指标 $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ 的梯度.

进而推导出逆运动学求解公式为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^* \dot{\mathbf{x}} + k (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \nabla \mathbf{H}(\mathbf{q}). \quad (18)$$

其中: 前一项为特解, 保证末端运动规律; 后一项为齐次解; $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{q})$ 是在零空间的投影. 在不改变末端轨迹的基础上, 实现目标函数的最优化.

机械臂运动过程中, 优化系数过大会产生震荡; 优化系数过小, 将无法体现梯度投影法的效果. 针对上述问题, 文献[49-50]将优化系数设置为变量或将梯度投影法与阻尼最小二乘法结合, 例如下式:

$$k = \frac{\lambda \|\mathbf{J}^* \dot{\mathbf{x}}\|}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \nabla \mathbf{H}(\mathbf{q})\|}, \quad (19)$$

其中 λ 为阻尼因子. 还可将比例因子设置如下:

$$k = \begin{cases} 0, & 0 < \sigma_m < \sigma_0; \\ k_m [\sin(\pi \sigma_m / \sigma_0 + \pi/2) + 1] / 2, & \sigma_0 \leq \sigma_m \leq 2\sigma_0; \\ k_m, & 2\sigma_0 < \sigma_m. \end{cases} \quad (20)$$

其中 k_m 为最大优化系数. 当最小奇异值 σ_m 小于 σ_0 时, 运动学逆解为奇异鲁棒性逆解, 会出现末端误差; 当 σ_m 大于 $2\sigma_0$ 时, 即为传统梯度投影法.

1977年, Liegeois^[51] 基于伪逆法提出梯度投影法, 优化指定的性能指标. 马如奇等^[52] 将目标函数设置为两个机械臂之间的最大距离, 利用封闭逆解改进

梯度投影法,降低了末端累积误差. Ito等^[53]基于梯度投影法,借助新型优化指标最大化关节运动范围,有效避免了关节限位. Wan等^[54]提出加权梯度投影法,制定分级任务规则,借助加权矩阵排列优先级,将完成主要任务设为最高优先级,将避免位置限制的任务设为次要优先级任务,该方法适用于多性能标准要求的机械臂逆运动学求解.

梯度投影法运用伪逆矩阵的最小范数特性优化关节速度,借助齐次解优化运动性能. 在梯度投影法的基础上,通过制定不同优化目标、合理分配特解与齐次解的权重、与其他方法相结合等,可求得期望逆解. 但梯度投影法仍存在以下不足: 1) 求解特解需要伪逆运算,难以满足实时计算; 2) 该方法为速度级的逆运动学求解方法,只有对速度积分才可获得位置数据,存在累积误差; 3) 优化系数 k 的取值难以确定,过大或过小都各有优缺点.

3.4 增广雅可比矩阵法

增广雅可比矩阵(extended Jacobian matrix)法又称为扩展雅可比矩阵法,该方法将考虑的约束、附加任务、限定条件等因素转换为矩阵 $J_a(\mathbf{q})$,进而将雅可比矩阵转换为增广矩阵 $J_e(\mathbf{q})$,从而将冗余机械臂的冗余性转换为指标优化. 若该增广矩阵满秩,则可求得唯一的运动学逆解. 在该方法中,机械臂末端速度与关节速度的关系如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = J_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J(\mathbf{q}) \\ J_a(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (21)$$

2011年, Yahya等^[55]将躲避障碍物与避免奇异位置设为指标并添加至运动学约束中,将雅可比矩阵扩展为一个方阵形式的增广雅可比矩阵,借助该矩阵进行逆运动学求解. Ratajczak^[55]通过分析近似问题来定义近似误差,在一个区域里最小化近似误差,从而得到增广雅可比矩阵,该矩阵与伪逆矩阵较为接近,最后验证了该方法的正确性. Karpińska等^[56]对特征方程进行数值积分,得到了运动学增广函数,使用伪逆扩展矩阵取代伪逆矩阵,进行逆运动学求解,解决了雅可比矩阵不可逆的问题. Cao等^[57]根据关节角速度与末端执行器速度的关系建立雅可比矩阵,使用臂角表征机械臂的冗余特性,借助由臂角建立的增广雅可比矩阵进行逆运动学求解.

增广雅可比矩阵法将雅可比矩阵转变为方阵,实现了逆矩阵的简化计算,可提升计算效率. 该方法不但能优化各种指标,还能解决伪逆法中的关节变量不可积分的问题. 但矩阵随时间变化,故该方法不适用于逆运动学实时求解.

3.5 加权最小范数法

加权最小范数法(weighted least norm)借助权重系数实现目标优化. 关节角速度的加权范数为

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}}, \quad (22)$$

其中 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是加权矩阵,通常为对称正定矩阵. 借助该矩阵,将加权雅可比矩阵 J_W 和加权关节角速度 $\dot{\mathbf{q}}_W$ 定义如下:

$$J_W = J\mathbf{W}^{-1/2}, \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_W = \mathbf{W}^{1/2}\dot{\mathbf{q}}. \quad (24)$$

其中 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 定义为

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix}. \quad (25)$$

w_i 的取值由优化指标决定,通常定义如下:

$$w_i = \begin{cases} 1 + \left| \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right|, & \Delta \left| \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right| \geq 0; \\ 1, & \Delta \left| \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right| < 0. \end{cases} \quad (26)$$

$\Delta \left| \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right|$ 是当前时刻的指标偏导与上一时刻的指标偏导的差值. 优化指标 $H(\mathbf{q})$ 定义如下:

$$H(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{(q_{i\max} - q_{i\min})^2}{4(q_{i\max} - q_i)(q_i - q_{i\min})}. \quad (27)$$

根据式(27)中的 $H(\mathbf{q})$ 可保证关节角度不会超过限制范围,对 $H(\mathbf{q})$ 求导,有

$$\nabla H(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{(q_{i\max} - q_{i\min})^2 (2q_i - q_{i\max} - q_{i\min})}{4(q_{i\max} - q_i)^2 (q_i - q_{i\min})^2}. \quad (28)$$

根据式(28)可求得优化方向. 通过上述加权转换,可将式(2)和(22)转换为

$$\dot{\mathbf{x}} = J_W \dot{\mathbf{q}}_W, \quad (29)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|_W = \sqrt{\dot{\mathbf{q}}_W^T \dot{\mathbf{q}}_W}. \quad (30)$$

进行伪逆求解,可得

$$\dot{\mathbf{q}}_W = J_W^\dagger \dot{\mathbf{x}}, \quad (31)$$

其中 J_W^\dagger 是 J_W 的伪逆. 进而可推得

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} J^T (J\mathbf{W}^{-1} J^T)^{-1} \dot{\mathbf{x}}. \quad (32)$$

上述过程为加权最小范数法的基础推导过程,仍需进行伪逆计算,且计算复杂,因此,国内外学者针对该方法提出了诸多改进方法.

Chan等^[58]借助改进权重矩阵,将次要任务指标添加至加权雅可比矩阵中,采用加权最小范数法进行

逆运动学求解, 保证关节偏角不超过限制范围. Jiang 等^[59] 提出一种改进的广义加权最小范数法, 在虚拟关节空间中对需要满足时间约束的机械臂进行逆运动学求解, 通过仿真与实验验证了采用该方法可以符合时间约束, 并保证关节角度不超出限制范围. Chen 等^[60] 将广义加权最小范数法与最小二范数相结合, 提出一种统一加权最小范数法. Yan 等^[61] 在固定角度法的基础上, 提出一种基于加权最小范数的两阶段计算优化算法, 该算法提高了求解精度, 缩减了计算时间, 可以在奇异位置进行逆运动学求解.

采用加权最小范数法进行逆运动学求解, 既可保证关节运动范围, 又可求得最优解, 运行效率高于梯

度投影法. 但在求解伪逆矩阵时无法求解, 或者计算量大, 并且机械臂接近奇异位置时的关节速度也较大. 加权最小范数法是开环算法, 在计算过程中未考虑误差和精度, 无法保证跟踪误差收敛与高精度, 还会引起振动. 可以将加权最小范数法与其他方法相结合^[59-61] 进行逆运动学求解, 也可改进加权最小范数法, 避免伪逆矩阵的计算.

3.6 各种数值解法的特点

通过分析各种方法的原理及研究现状发现, 各种数值解法都适用于 $DOF \geq 7$ 的冗余机械臂, 总结出每种数值解法具备的优缺点, 以及对应方法如何根据应用环境进行调节, 如表 3 所示.

表 3 各种数值解法的特点

| 各种数值解法 | 优点 | 缺点 | 可调节性 |
|-----------------------------|----------------------------------|---|------------------------|
| 伪逆法 ^[40-44] | 结构简单且易于实现, 可避免关节极限、奇异现象, 关节力矩最小化 | 无法保证稳定性, 所得逆解有可能不收敛, 存在累积误差, 精度低 | 可使得关节速度范数最小、可通过零空间实现避障 |
| 阻尼最小二乘法 ^[45-48] | 在奇异位置的速度平滑且不会过大 | 收敛速度慢且跟踪精度差 | 调节阻尼系数 |
| 梯度投影法 ^[49-54] | 可解决关节约束问题, 优化给定的性能指标 | 难以满足实时计算且存在累积误差 | 调节优化系数 |
| 增广雅可比矩阵法 ^[55-57] | 简化逆矩阵的计算, 提升计算效率, 可优化各种指标 | 降低了冗余特性, 逆解非最优解, 不适用于实时逆运动学求解 | 增加约束、任务 |
| 加权最小范数法 ^[58-61] | 限制了关节角度, 效率高于梯度投影法 | 有时无法求解, 奇异位置处的关节速度较大, 无法保证跟踪误差收敛与高精度, 还可能引起振动 | 调节权重系数或与其他方法相结合 |

4 智能算法

随着智能时代的到来, 国内外学者正在研究如何利用现代智能算法进行冗余机械臂逆运动学求解. 这些算法将逆运动学求解问题转换为极值求解问题, 可快速找到局部最优解, 在传统算法的基础上加以改进, 可快速获得全局最优解. 本节以神经网络算法、粒子群算法、遗传算法及其他智能算法为例, 阐述对应算法的基本原理、发展现状及特点.

4.1 神经网络算法

人工神经网络 (artificial neural network) 是由若干个神经元相互连接形成的网络结构, 是一种模仿人类大脑且具备信息处理能力的系统. 根据样本信息和反馈信息调节神经网络中的权值参数, 构建映射关系, 在输入冗余机械臂位姿后, 通过神经网络自动映射出对应关节的数值, 实现逆运动学求解.

Edwin 等^[62] 采用一种反向误差传播的监督式多层前馈神经网络, 通过采样关节空间轨迹获取训练集, 借助神经网络保证关节坐标误差平方和最小. Zhang 等^[63] 提出一种基于相容凸与非凸约束的二次规划 (compatible convex-nonconvex constrain QP, CCNC-QP) 的双神经网络 (dual neural networks, DNN)

方案, 用于机械臂逆运动学求解, 并证明了该方法不仅具有 DNN 的并行处理、实时控制等优点, 还具有 CCNC-QP 的初始误差归零、考虑凸与非凸约束等优点. Xu 等^[64] 提出一种新型递归神经网络 (recurrent neural network, RNN) 进行逆运动学求解, 设计一种与关节大小和跟踪误差相关的辨识器, 实现了关节运动参数的在线学习, 将冗余求解转换为二次优化问题, 构建 RNN 循环求解最优值, 以关节速度的最小范数为次要任务. Takatani 等^[65] 建立 3 个神经网络模型, 分别对应正运动学、运动学逆解和求值函数, 可实现独立于评价函数结构的计算, 不加考虑地计算出逆运动学的解. 该方法将包括姿态、终端点及评估值的训练数据输入自动计算过程, 获得神经网络模型, 在不考虑评价函数梯度的情况下获得与传统方法相同的姿态. Raja 等^[66] 基于 Kohonen 自组织图建立任务空间与关节空间的映射, 同时解决了系统中存在的冗余, 在解决逆运动学问题时最大程度地提高了机械臂的可操作性. 针对逆运动学求解在学习中的高维问题, Ren 等^[67] 提出一种改进生成对抗网络方法, 该方法通过学习“产生器”和“判别器”产生与训练数据分布一样的逆运动学, 使用看不见的轨迹进行测试,

从而验证了“学习”得到的近似逆运动学。

神经网络采用并行计算方法,具有许多优点,例如:自适应学习、高效、快速、可处理大量非线性关系的数据,借助神经网络泛化逼近冗余机械臂的逆运动学模型,可实现精准的运动规划与控制。但需要构建笛卡尔空间、关节空间、驱动空间之间的映射关系,因为神经网络难以学习一对多的映射关系,所以获取的样本集无法直接用于神经网络的参数学习,且所得样本集无法保证模型的充分优化。样本集大小随着自由度的增多而增大,也会因为学习过程的延长而无法满足实时性。可通过调节计算精度和计算速度,采用不同的目标函数改善逆运动学求解结果。

4.2 粒子群算法

粒子群算法 (particle swarm optimization, PSO) 从随机解出发,迭代寻找最优解,依据适应度评价所得解的优劣。

任子武等^[68]将解析法与数值解法相结合进行逆运动学求解,在机械臂几何解的基础上,将远离极限位置的程度设为目标函数,借助粒子群优化算法探索关节角度的最优组合解,不仅提高了求解速度、无理论误差、远离关节极限位置,还从多解中选出了最优解。在粒子群算法中,增大惯性权重可增强算法的全局搜索性能,减小惯性权重可增强算法的局部搜索性能。Wang等^[69]为了克服奇异现象,在考虑运动方程并满足特定目标和约束的情况下,采用具有自适应惯性权值的约束粒子群算法求解关节最优解。传统粒子群算法虽然朝着目标点迭代,但会陷入局部最优区域,针对该问题,Sancaktar等^[70]提出一种自适应粒子群优化算法,在运行一定步数后,若仍未满足要求,则停止粒子群算法,把当前点设为新起点,进行重复定位,直至满足要求。与此类似,朱经纬等^[71]提出一种自适应弹射粒子群算法进行逆运动学求解,解决陷入局部最小值的问题。Ram等^[72]提出一种双向粒子群优化方法求解冗余机械臂逆运动学,以关节总运动最小为主要任务,避障为次要任务,采用该方法进行双向搜索寻找最优解,证明了该方法搜索到最优解的速度比传统粒子群算法更快。根据机械臂的运动约束,Chen等^[73]采用粒子群算法调整Bezier曲线的控制点,在末端跟随法中,通过离散轨迹跟踪获得可行的避障路径。Dereli等^[74]提出一种量子粒子群算法,并证明该方法的运动学逆解相对于标准粒子群算法、人工蜂群算法、萤火虫算法更有效,该改进算法的优点是计算时间短、迭代次数少、粒子数少。Dereli等^[75]还将粒子群算法中的粒子运动与游戏中的高尔夫球

运动相关联,当粒子接近目标时,粒子速度转换为抛物线下降的结构。这种元启发式技术被称为惯性权重粒子群算法,将该方法应用于7关节机械臂的逆运动学求解,位置误差小于传统算法。

粒子群算法具有结构简单、参数易于调整的特点。但粒子群算法的局部搜索能力差,搜索精度低且依赖参数。在采用粒子群算法对冗余机械臂进行逆运动学求解的过程中,其迭代范围广,可求得最优解,但计算时间长,难以用于实时求解。

4.3 遗传算法

遗传算法 (genetic algorithm) 通过模拟自然简化过程初始化种群,计算个体适应度,进行选择运算、交叉运算、变异运算,判断是否满足终止条件,最终输出最大适应度个体。随着遗传算法的改进,诸多算法广泛应用于冗余机械臂的逆运动学求解。

Parker等^[76]首次将遗传算法应用于冗余机械臂的逆运动学求解,该方法在定位精度方面存在提升空间。Köker^[77]将遗传算法与神经网络相结合,每个网络的浮点部分与随机解的浮点部分一起放置在遗传算法的初始种群中,使得末端执行器误差最小化,将误差减小至微米级。Yesid等^[78]提出一种改进遗传算法进行逆运动学求解,采用遗传算法对肩关节求解,在复合方位要求的前提下减小定位误差,提高求解精度。林阳等^[79]提出一种并行求逆的算法,采用多种群遗传算法进行逆运动学求解,将位姿设为目标函数,提高了机械臂的位姿精度,通过交叉算子解决局部收敛问题,通过变异算子提高收敛速度。

遗传算法作为一种进化算法,具备很好的鲁棒性、收敛性、可扩展性等,但存在参数较多、编程复杂、搜索速度较慢、计算效率较低等问题,无法保证求解时间,依赖初始种群。

4.4 其他智能算法

目前,还有多种其他智能算法应用于冗余机械臂逆运动学求解,例如:支持向量机 (support vector machine, SVM)、模糊映射法 (fuzzy inverse kinematic method, FIKM)、蚁群 (ant colony, ACO) 算法、人工蜂群 (artificial bee colony, ABC) 算法、萤火虫算法 (firefly algorithm, FA)、差分进化 (differential evolution, DE) 算法、基于生物地理学的优化算法 (biogeography-based optimization, BBO)、长短期记忆 (long short-term memory, LSTM)、变异果蝇优化算法 (hybrid mutation fruit fly optimization algorithm, HMFOA) 等。

Morell等^[80]采用SVM为机械臂精确建模,该方法在给定位姿后可快速准确地求解出所有关节角,求

解精度高,满足实时性要求. Lin等^[81]提出FIKM来求解存在奇异性的逆运动学,该方法计算量小,对奇异性具有鲁棒性,存在多目标优化特点,但仍需结合其他方法使用. Zhao等^[82]采用ACO算法优化旋转角度参数,利用几何法检测机械臂与障碍物的碰撞,并通过10自由度冗余机械臂验证了该方法的有效性.

传统ABC无法折中探索与开发,对此,El-Sherbiny等^[83]提出一种基于知识的人工蜂群算法(knowledge-based ABC, K-ABC),该算法能够快速收敛并探索预期搜索空间中最有前途的领域,实验验证了K-ABC算法的平均平方误差比传统ABC算法减少60%. Dereli等^[84]将ABC算法与PSO算法进行对比,通过仿真表明了ABC算法适用于寻找最佳关节角度及逆运动学求解,但该算法中的参数多且搜索时间长. 李娜托等^[85]将目标函数设置为位置误差和姿态误差的标准差,通过改进ABC进行逆运动学求解. Zhang等^[86]提出一种混沌并行人工蜂群算法,利用混沌映射优化初始食物源的种群分布以摆脱局部优化,通过引入两个控制参数调整搜索步骤和优化参数在搜索新食物源时的变化频率,仿真验证了该算法相对于其他智能算法具有更强的全局搜索能力和更快的收敛速度.

Dereli等^[87]还采用FA进行逆运动学求解,该算法在速度和准确性方面优于PSO算法和ABC算法,求解的关节角度位置误差最小. Hernandez-Barragan等^[88]提出一种改进多模态优化FA求解逆运动学问题,提供多个关节配置,无需雅可比矩阵求逆,避免了奇异性.

DE算法作为一种基于群体的并行迭代优化算法,鲁棒性强且简单有效,但存在姿态与位置的收敛精度不相同、搜索易停滞等问题. 对此,谢习华等^[89]在传统DE算法的基础上,借助自适应权值系数平衡

收敛精度,提出了改进自适应变异DE算法,仿真结果表明,改进算法不仅提高了收敛速度与精度,还提高了算法稳定性. Li等^[90]使用改进DE算法研究机械臂逆运动学问题,采用随机变化交叉,避免陷入局部最优.

Ren等^[91]将DE差分策略与BBO迁移策略相结合,提出一种基于生物地理学的混合优化(hybrid BBO, HBBO)算法,减轻了算法后续的进化问题. 将逆运动学问题表述为等价极小化问题,再采用改进算法进行求解.

周恒旭等^[92]针对在奇异点无法逆运算的问题,在LSTM的基础上提出一种新型求解算法,通过正运动学得到诸多关节空间数据,以及对应末端姿态数据,将这些数据设为下一步的训练样本,通过训练得到高精度的逆运动学解. 该方法相较于传统方法,具有求解速度快且稳定的优点.

为实现末端执行器位姿误差最小,Shi等^[93]构造一种适应度函数,将逆运动学求解问题转换为最优化问题,采用群智能优化算法求解,提出一种HMFOA平衡探索与开发,提高了算法的收敛速度. 为提高求解精度并降低计算量,杨帅^[94]提出一种改进果蝇优化算法,增加最差个体学习的改进策略,达到优化进化方程以及避免陷入局部最优的目的.

除了上述智能算法,还有禁忌搜索算法^[95]、模拟退火算法^[96-97]、改进天牛须算法^[98]、自适应微分进化算法^[99]、免疫算法等智能算法应用于冗余机械臂的逆运动学求解.

4.5 各种智能算法的特点

通过分析各种方法的原理及研究现状发现,各种智能算法都适用于 $\text{DOF} \geq 7$ 的冗余机械臂,总结出每种智能算法具备的优缺点,以及该方法根据应用环境如何调节,如表4所示.

表4 各种智能算法的特点

| 各种智能算法 | 优点 | 缺点 | 可调节性 |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|------------------------|
| 神经网络算法 ^[62-67] | 可处理大量非线性关系的数据,实现精准的运动规划与控制 | 不能保证充分的优化,模型复杂,学习过程较长 | 制定网络架构、调节目标函数,可调节的参数较多 |
| 粒子群算法 ^[68-75] | 参数易于调整,可求得最优解,简单且容易实现 | 局部搜索能力差,搜索精度低且依赖参数,难以实时求解 | 需要调节的参数较少,调节惯性权重以及速度参数 |
| 遗传算法 ^[76-79] | 鲁棒性、收敛性、可扩展性好 | 参数多、编程复杂、搜索速度慢、计算效率低,并依赖于初始种群 | 制定适应度函数、调节各个参数 |

5 核心问题以及解决情况

5.1 核心问题

冗余机械臂逆运动学求解过程中,遇到的核心问题包括: 1) 奇异现象; 2) 多任务; 3) 多约束; 4) 不确定

性; 5) 计算资源有限.

1) 奇异现象. 奇异点位于机械臂两轴共线处,由于冗余机械臂中的臂杆数量较多,发生奇异点的位置与机会也随之增加. 奇异现象使得机械臂速度、力矩

等参数发生突变,影响系统鲁棒性.

2) 多任务. 由于冗余机械臂的逆解不唯一,可完成非冗余机械臂无法完成的任务,并在完成主要任务的前提下,额外完成许多次要任务,但难以合理分配各个任务所占权重.

3) 多约束. 冗余机械臂在运动过程中存在各种约束条件,例如在关节空间中存在:关节偏角约束、速度约束、加速度约束、力或力矩约束. 除了关节空间存在约束以外,运动空间、承载范围等也存在约束,而逆运动学求解结果不一定满足约束条件. 冗余机械臂运动空间中的障碍物也是一种约束条件,需要避免机械臂触碰障碍物.

4) 不确定性. 在冗余机械臂逆运动学求解过程

中会遇到诸多不确定性,例如:参数变化、干扰/扰动/抖动、容错问题等. 冗余机械臂系统中的参数存在不确定性,求解方法中也存在诸多参数,这些参数如何取值以及如何自适应调节都是棘手问题.

5) 计算资源有限. 求出高精度解需要大量时间,难以进行实时逆运动学求解.

5.2 核心问题攻关

针对上述核心问题,学者们提出了相应的解决措施,各种逆运动学求解方法的攻关过程如图7所示. 图7中归纳总结了以下内容:1) 求解方法的发展过程和特点;2) 核心问题以及问题之间的关联;3) 每种问题对应的求解方法.

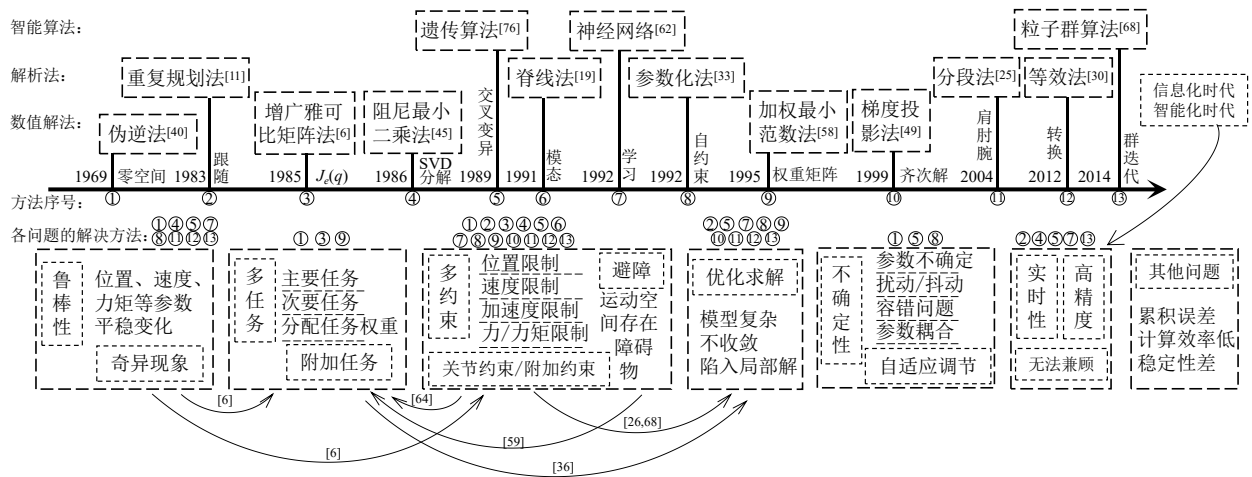


图7 逆运动学求解方法及核心问题分布

1) 在第2~第4节中,详细叙述了各种求解方法的发展过程及特点,图7中展示了每种方法的提出年份、参考文献、核心内容,并通过序号表示每种方法. 例如序号为①的伪逆法^[40]于1969年提出,借助零空间投影矩阵,解决冗余求解问题.

2) 整理第5.1节的内容,列举出冗余机械臂逆运动学求解中存在的核心问题. 各种核心问题之间存在关联性. 例如:将避障^[59]、避极限^[64]、避奇异^[6]、力矩优化、能量优化和抖动抑制等因素作为附加任务,将末端执行器位姿、障碍物位置^[6]等因素作为约束条件,将多任务问题^[36]、耦合约束问题^[26,68]转化为最优化问题进行求解,等.

3) 整理历年研究成果,总结出5种问题所对应的求解方法,并从近两年研究成果中列举具体事例.

① 文献 [6, 31, 34, 47, 61, 69, 81, 88] 采用阻尼最小二乘法或其他改进方法解决奇异问题. 例如 Sun^[100] 在阻尼最小二乘法的基础上引入修正系数,得到改进奇异鲁棒反演方法,并通过冗余机械臂空间

直线轨迹和曲线轨迹的应用实例验证了改进奇异鲁棒反演方法具有更好的优化性能和稳定性,可以解决奇异问题.

② 针对多任务中存在的主要任务、次要任务、附加任务,文献 [6-10, 36, 46, 54, 58, 72] 通过合理分配任务的权重或结合其他算法完成多任务逆运动学求解. 例如 Žlajpah 等^[10] 提出一种任务空间分解方法,根据目标函数的梯度保证适当的自运动,从而收敛至正确的构型,该方法优于扭转分解法.

③ 在每种求解方法中,均存在解决约束问题的事例^[17,26,31,35,42,47,53,58-59,68-69,88]. 例如 Woliński^[101] 提出一种基于二次规划方法的速度级逆运动学求解方法,该方法允许在位置、速度和加速度级别实现关节约束. 为了实现冗余机械臂在运动过程中的避障,文献 [17, 72-73] 采用粒子群算法、末端跟随法、脊线法,或者将避障问题转换为多任务、多约束问题,进而实现避障. 在数值解法与智能算法中,可将机械臂与障碍物的距离转换为参数,通过制定目标函数或任务实

现避障. 例如Jia^[17]在末端跟随法中, 根据障碍物位置规划路径, 使得末端执行器及各个关节中心点均沿着该路径运动, 进而求解出各参数变化规律, 保证冗余机械臂不触碰障碍物.

④ 针对不确定性, 文献[33-37, 43, 102]借助伪逆法、参数化法以及智能算法进行解决. 例如Shi等^[93]提出具备平衡探索与开发的自适应方法, 根据不确定性因素的实时数据, 调节逆运动学求解系统.

⑤ 为了协调高精度、偏差小、实时性, 学者们提出了许多措施. 针对实时偏差与累计误差, 文献[12, 55, 62-63, 77-80, 83, 87]借助末端跟随法、阻尼最小二乘法、智能算法来减小误差. 在智能算法中, 将误差最小化转换为优化问题, 使误差减小至微米级^[77]. Morell等^[80]采用智能算法提高精度, 满足了实时性要求. Xu等^[102]针对计算耗时长的问题, 提出一种基于关节摄动和关节运动优先级的实时方法. 该方法同时微调不同角度偏差的所有关节, 在位姿集合中寻找最接近目标位姿的解, 以该解为初解迭代计算, 直到误差小于指定误差.

5.3 研究方向

针对冗余机械臂逆运动学求解方法, 人们在解析法、数值解法、智能算法的基础上提出了改进方法. 通过整理、分析、比较这些改进方法, 发现许多值得研究的方向, 结合作者见解归纳如下.

1) 热门话题1: 最优化求解.

许多学者^[62-99]将冗余机械臂的逆运动学问题转换为多目标优化问题, 再通过优化算法进行求解. 随着信息化与智能化的发展, 越来越多的智能算法应用于逆运动学求解. 在配备充足计算资源的基础上, 智能算法通过随机、变异等方式求取下一个迭代值, 分析最优解方向, 快速求得最优解.

目前, 通过已有的优化算法可处理大量非线性关系的数据, 获得最优解, 具备很好的鲁棒性、收敛性和可扩展性. 未来研究方向是: ① 针对冗余机械臂的特点、应用环境或求解过程中的问题, 制定相应的改进优化算法; ② 针对优化算法中的参数多、学习过程长、难以实时求解的问题, 需要简化模型, 提高算法的计算效率与搜索速度; ③ 通过设定优化算法中的目标函数、可调节参数, 优化求解模型, 解决本系统中的多任务、多约束问题; ④ 由于优化算法的收敛性和求解效率受到初始点/初始种群的影响, 可提出改善初始点/初始种群或改进算法的方案.

2) 热门话题2: 多约束求解.

针对机械臂结构、运动空间中存在的约束问

题, 在每种方法的基础上均提出了相应的改进方法^[17, 26, 31, 35, 42, 47, 53, 58-59, 68-69, 72-73, 88]. 这些改进方法从理论上分析了机械臂参数、约束参数与运动参数之间的关系, 通过构建约束方程组或参数的选取范围限制求解空间, 从而满足约束要求.

目前, 在位置、速度、加速度层面以及避障方面, 通过改进方法使得冗余机械臂满足基本的约束条件. 未来研究方向是: ① 在多约束条件下合理分配各约束条件的权重, 分析如何避免各约束之间耦合及冲突, 或者根据多约束制定多目标耦合函数 J ; ② 将约束问题转换为最优化问题或多任务问题^[26, 64, 59, 68], 针对不同的应用对象或应用环境等因素, 该思路仍存在宽阔的发展空间; ③ 将约束参数等效成运动参数的约束, 例如将关节约束等效成路径参数约束^[17], 将障碍物约束等效成关节参数约束等.

3) 热门话题3: 多目标求解.

在冗余机械臂运动中, 目标可设定为: 能量最小、时间最短、安全性高、工作寿命长、运动平稳等, 目标可分为主要目标、次要目标. 未来研究方向是: ① 根据应用场景及运动对象分析制定哪些目标, 如何分配权重, 通过自调节加权策略自动调节权重^[103]; ② 根据多目标分析如何设定价值函数.

4) 热门话题4: 实时性求解.

冗余机械臂可应用于复杂环境中, 执行复杂任务, 但实时逆运动学求解的难度也随之增加. 未来研究方向是: ① 利用过去信息和现在信息, 结合预测控制, 自适应调节参数, 进行实时逆运动学求解; ② 根据冗余机械臂的特性, 完善模型理论或建模方法, 从而提高求解速度, 实现高精度实时求解.

5) 话题5: 构建简化模型或通用模型.

① 在诸多求解问题中, 均需构建数学模型, 可以针对机械臂或几个关节的特点构建相应的通用化模块. 在求解前, 将复杂机械臂模型分模块简化, 提升冗余机械臂逆运动学求解的效率及通用性. ② 结合运动学建系方法, 改进冗余机械臂逆运动学求解方法.

6) 话题6: 方法融合.

分析各种求解方法的原理、优缺点, 对比各自的适用领域, 各取所长, 提出融合方式, 协同解决问题, 以获得更好的求解结果. 例如将智能算法与解析法或数值解法相结合, 借助智能算法的特性提升求解速度, 改善求解结果.

7) 话题7: 创新性方法.

① 根据冗余机械臂具体结构, 从位置级提出创新性的解析法或半解析法; ② 借助雅可比矩阵提出

创新性的数值解法,或者无需雅可比矩阵,从而降低计算量,提出改进的求解方法;③针对逆运动学求解问题,提出对应的智能求解算法,或者将其他领域的新型智能算法应用于逆运动学求解,改善求解过程并优化求解结果。

8) 话题8: 多学科交叉。

随着科技发展,传统的逆运动学求解方法无法满足智能化、可控可调、可视化等要求,需要将求解方法与计算机、信息、光学、控制、机械、电子等学科相结合,规划出通用的冗余机械臂逆运动学求解方法,设计出满足全面要求、具备通用性的逆运动学求解系统。例如:①障碍物信息未知,通过“计算机视觉”“地图构建”进行障碍物建模,从而实现避障;②在冗余机械臂的运动过程中,通过“模式识别”来判断障碍物或目标物或所处环境的类别,从而决定机械臂的运动方向;③通过“远程遥控”技术实现远距离的实时逆运动学求解等。

6 结论

冗余机械臂逆运动学求解方法的探索横跨半个世纪,许多解析法、数值解法、智能算法随之涌现。研究人员通过调节系统指标、改进最优化模型、扩展雅可比矩阵、融合方法,在奇异现象、多任务、多约束、不确定性、计算资源有限等核心问题方面均取得了相应进展。然而,当前逆运动学求解方法缺乏系统性,通用性不强,不利于该领域的后续发展,亟需领域专家加强研究,开发出通用性方法。

另一方面,为适应更加复杂的应用场景,冗余机械臂具有向全柔性发展的趋势,这种机械臂的逆运动学问题更为复杂,预计将成为新的研究热点。

参考文献(References)

- [1] Hassan A A, El-Habrouk M, Deghedie S. Inverse kinematics of redundant manipulators formulated as quadratic programming optimization problem solved using recurrent neural networks: A review[J]. *Robotica*, 2020, 38(8): 1495-1512.
- [2] 陈钢. 空间机械臂建模、规划与控制[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2019: 40-52.
(Chen G. Modeling, planning and control of space manipulators[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2019: 40-52.)
- [3] Chen L, Zielinska T, Wang J K, et al. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2020, 30(2): 351-361.
- [4] Patkó D, Zelei A. Velocity and acceleration level inverse kinematic calculation alternatives for redundant manipulators[J]. *Meccanica*, 2021, 56(4): 887-900.
- [5] Yahya S, Moghavvemi M, Mohamed H A F. Geometrical approach of planar hyper-redundant manipulators: Inverse kinematics, path planning and workspace[J]. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2011, 19(1): 406-422.
- [6] Baillieul J. Kinematic programming alternatives for redundant manipulators[C]. *Proceedings of 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. St. Louis, 2003: 722-728.
- [7] Nakamura Y, Hanafusa H, Yoshikawa T. Task-priority based redundancy control of robot manipulators[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1987, 6(2): 3-15.
- [8] Chembully V V M J S, Voruganti H K. An efficient approach for inverse kinematics and redundancy resolution of spatial redundant robots for cluttered environment[J]. *SN Applied Sciences*, 2020, 2(6): 1-20.
- [9] Sekiguchi M, Takesue N. Fast and robust numerical method for inverse kinematics with prioritized multiple targets for redundant robots[J]. *Advanced Robotics*, 2020, 34(16): 1068-1078.
- [10] Žlajpah L, Müller A. A task space decomposition algorithm for the inverse kinematics of functionally redundant manipulators[C]. *The 20th International Conference on Advanced Robotics*. Ljubljana, 2022: 1048-1053.
- [11] Asano K, Obama M, Arimura Y, et al. Multijoint inspection robot[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1983, IE-30(3): 277-281.
- [12] Sreenivasan S, Goel P, Ghosal A. A real-time algorithm for simulation of flexible objects and hyper-redundant manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(3): 454-466.
- [13] Aristidou A, Lasenby J. FABRIK: A fast, iterative solver for the inverse kinematics problem[J]. *Graphical Models*, 2011, 73(5): 243-260.
- [14] Palmer D, Cobos-Guzman S, Axinte D. Real-time method for tip following navigation of continuum snake arm robots[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2014, 62(10): 1478-1485.
- [15] 王俊刚, 汤磊, 谷国迎, 等. 超冗余度机械臂跟随末端轨迹运动算法及其性能分析[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(3): 18-25.
(Wang J G, Tang L, Gu G Y, et al. Tip-following path planning and its performance analysis for hyper-redundant manipulators[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(3): 18-25.)
- [16] Palmer D, Axinte D. Active uncoiling and feeding of a continuum arm robot[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2019, 56:

- 107-116.
- [17] Jia L F, Huang Y P, Chen T, et al. MDA+RRT: A general approach for resolving the problem of angle constraint for hyper-redundant manipulator[J]. *Expert Systems With Applications*, 2022, 193: 116379.
- [18] Xie H B, Wang C, Li S S, et al. A geometric approach for follow-the-leader motion of serpentine manipulator[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2019, 16(5): 172988141987463.
- [19] Chirikjian G S, Burdick J W. Parallel formulation of the inverse kinematics of modular hyper-redundant manipulators[C]. *Proceedings of 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Sacramento, 2002: 708-713.
- [20] Fahimi F, Ashrafiun H, Nataraj C. An improved inverse kinematic and velocity solution for spatial hyper-redundant robots[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 18(1): 103-107.
- [21] Zhen W K, Gong C H, Choset H. Modeling rolling gaits of a snake robot[C]. *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seattle, 2015: 3741-3746.
- [22] Song S, Li Z, Yu H Y, et al. Shape reconstruction for wire-driven flexible robots based on Bézier curve and electromagnetic positioning[J]. *Mechatronics*, 2015, 29: 28-35.
- [23] Xu W F, Mu Z G, Liu T L, et al. A modified modal method for solving the mission-oriented inverse kinematics of hyper-redundant space manipulators for on-orbit servicing[J]. *Acta Astronautica*, 2017, 139: 54-66.
- [24] Zhang X B, Liu J G, Ju Z J, et al. Head-raising of snake robots based on a predefined spiral curve method[J]. *Applied Sciences*, 2018, 8(11): 2011.
- [25] Wang Y F, Chirikjian G S. Workspace generation of hyper-redundant manipulators as a diffusion process on $SE(N)$ [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(3): 399-408.
- [26] Moradi H, Lee S. Joint limit analysis and elbow movement minimization for redundant manipulators using closed form method[C]. *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer, 2005: 423-432.
- [27] Mu Z G, Yuan H, Xu W F, et al. A segmented geometry method for kinematics and configuration planning of spatial hyper-redundant manipulators[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(5): 1746-1756.
- [28] Zhou Y H, Zhang Y F, Ni F L, et al. A head control strategy of the snake robot based on segmented kinematics[J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(23): 5104.
- [29] 潘博, 付宜利, 杨宗鹏, 等. 面向冗余机器人实时控制的逆运动学求解有效方法[J]. *控制与决策*, 2009, 24(2): 176-180.
- (Pan B, Fu Y L, Yang Z P, et al. Efficient inverse kinematics solution for redundant robots to real-time control[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 176-180.)
- [30] Yu C, Jin M H, Liu H. An analytical solution for inverse kinematic of 7-DOF redundant manipulators with offset-wrist[C]. *2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Chengdu, 2012: 92-97.
- [31] Faria C, Ferreira F, Erilhagen W, et al. Position-based kinematics for 7-DoF serial manipulators with global configuration control, joint limit and singularity avoidance[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 121: 317-334.
- [32] Lou Y N, Quan P K, Lin H Y, et al. A closed-form solution for the inverse kinematics of the 2n-DOF hyper-redundant manipulator based on general spherical joint[J]. *Applied Sciences*, 2021, 11(3): 1277.
- [33] Kreutz-Delgado K, Long M, Seraji H. Kinematic analysis of 7-DOF manipulators[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1992, 11(5): 469-481.
- [34] Samer Y, Haider A F, Moghavvemi M. A new geometrical approach for the inverse kinematics of the hyper redundant equal length links planar manipulators[J]. *Engineering Transactions*, 2009, 12(2): 109-114.
- [35] Shimizu M, Kakuya H, Yoon W K, et al. Analytical inverse kinematic computation for 7-DOF redundant manipulators with joint limits and its application to redundancy resolution[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, 24(5): 1131-1142.
- [36] Zaplana I, Basanez L. A novel closed-form solution for the inverse kinematics of redundant manipulators through workspace analysis[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 121: 829-843.
- [37] Jiokou Kouabon A G, Melingui A, Mvogo Ahanda J J B, et al. A learning framework to inverse kinematics of high DOF redundant manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 153: 103978.
- [38] Zhang Y W, Liu Y C, Cao B S, et al. Joint limit optimal inverse kinematics of the 7-DoF manipulator with link offset based on semi-analytical solution[C]. *2021 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Sanya, 2022: 483-489.
- [39] Ma B Y, Xie Z W, Jiang Z N, et al. Precise semi-analytical inverse kinematic solution for 7-DOF offset manipulator with arm angle optimization[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2021, 16(3): 435-450.
- [40] Whitney D E. Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses[J]. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, 1969, 10(2): 47-53.
- [41] Mayorga R V, Wong A K C, Milano N. A fast

- procedure for manipulator inverse kinematics evaluation and pseudoinverse robustness[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1992, 22(4): 790-798.
- [42] Xiao L, Zhang Y N. Acceleration-level repetitive motion planning and its experimental verification on a six-link planar robot manipulator[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(3): 906-914.
- [43] Guo D S, Xu F, Yan L C. New pseudoinverse-based path-planning scheme with PID characteristic for redundant robot manipulators in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(6): 2008-2019.
- [44] Guo D S, Li A F, Cai J H, et al. Inverse kinematics of redundant manipulators with guaranteed performance[J]. *Robotica*, 2022, 40(1): 170-190.
- [45] Wampler C W. Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1986, 16(1): 93-101.
- [46] Colomé A, Torras C. Closed-loop inverse kinematics for redundant robots: Comparative assessment and two enhancements[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(2): 944-955.
- [47] Wu J W, Bin D E, Feng X B, et al. GA based adaptive singularity-robust path planning of space robot for on-orbit detection[J]. *Complexity*, 2018, 2018: 1-11.
- [48] Wang X Q, Cao J F, Liu X, et al. An enhanced step-size Gaussian damped least squares method based on machine learning for inverse kinematics of redundant robots[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 68057-68067.
- [49] 吴瑞珉, 刘廷荣. 一种新的冗余度机器人梯度投影算法[J]. *机械工程学报*, 1999, 35(1): 76-80.
(Wu R M, Liu T R. New gradient projection method of kinematically redundant manipulators[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1999, 35(1): 76-80.)
- [50] Lu S T, Zhao J D, Jiang L. Gradient projection method of kinematically redundant manipulator based on improved scale factor[C]. *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shenyang, 2015: 4955-4960.
- [51] Liegeois A. Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1977, 7(12): 868-871.
- [52] 马如奇, 王伟东, 董为, 等. 基于改进梯度投影算法的腹腔微创外科手术机器人系统术前摆位分析[J]. *机器人*, 2014, 36(2): 156-163.
(Ma R Q, Wang W D, Dong W, et al. Preoperative positioning analysis of the celiac minimally invasive surgery robotic system based on an improved gradient projection algorithm[J]. *Robot*, 2014, 36(2): 156-163.)
- [53] Ito M, Kawatsu K, Shibata M. Kinematic control of redundant manipulators for admitting joint range of motion maximally[J]. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 2017, 6(4): 278-285.
- [54] Wan J, Yao J, Zhang L. A weighted gradient projection method for inverse kinematics of redundant manipulators considering multiple performance criteria[J]. *Strojnicki Vestnik—Journal of Mechanical Engineering*, 2018: 64(7/8): 475-487.
- [55] Ratajczak J. Design of inverse kinematics algorithms: Extended Jacobian approximation of the dynamically consistent Jacobian inverse[J]. *Archives of Control Sciences*, 2015, 25(1): 35-50.
- [56] Karpińska J, Tcho K, Janiak M. Approximation of Jacobian inverse kinematics algorithms: Differential geometric vs. variational approach[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2012, 68(3): 211-224.
- [57] Cao Y, Gan Y H, Dai X Z, et al. Inverse kinematics of 7-DOF redundant manipulators with arbitrary offsets based on augmented Jacobian[C]. *The 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation*. Nanjing, 2018: 33-42.
- [58] Chan T F, Dubey R V. A weighted least-norm solution based scheme for avoiding joint limits for redundant joint manipulators[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1995, 11(2): 286-292.
- [59] Jiang P, Xiang J, Wei W, et al. General-weighted least-norm control for redundant manipulators under time-dependent constraint[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2015, 12(5): 53.
- [60] Chen P, Xiang J, Wei W. A unified weighted least norm method for redundant manipulator control[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2016, 13(1): 19.
- [61] Yan W B, Sun L. An optimization method for inverse kinematics of a 7-DOF redundant manipulator[C]. *The 34th Chinese Control Conference*. Hangzhou, 2015: 4472-4479.
- [62] Edwin S, Utama W. Artificial neural network for redundant manipulator inverse kinematics computation[C]. *Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques*. Boston, 1992: 668-677.
- [63] Zhang Z J, Chen S Y, Li S. Compatible convex-nonconvex constrained QP-based dual neural networks for motion planning of redundant robot manipulators[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(3): 1250-1258.
- [64] Xu Z H, Li S, Zhou X F, et al. Dynamic neural networks based kinematic control for redundant manipulators with model uncertainties[J]. *Neurocomputing*, 2019, 329:

- 255-266.
- [65] Takatani H, Araki N, Sato T, et al. Neural network-based construction of inverse kinematics model for serial redundant manipulators[J]. *Artificial Life and Robotics*, 2019, 24(4): 487-493.
- [66] Raja R, Dutta A, Dasgupta B. Learning framework for inverse kinematics of a highly redundant mobile manipulator[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2019, 120: 103245.
- [67] Ren H L, Ben-Tzvi P. Learning inverse kinematics and dynamics of a robotic manipulator using generative adversarial networks[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2020, 124: 103386.
- [68] 任子武, 朱秋国, 熊蓉. 冗余仿人臂避关节物理约束的一种逆运动学问题求解方法[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(19): 58-65.
(Ren Z W, Zhu Q G, Xiong R. A joint physical constraints avoidance method for inverse kinematics problem of redundant humanoid manipulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(19): 58-65.)
- [69] Wang M M, Luo J J, Yuan J P, et al. Coordinated trajectory planning of dual-arm space robot using constrained particle swarm optimization[J]. *Acta Astronautica*, 2018, 146: 259-272.
- [70] Sancaktar I, Tuna B, Ulutas M. Inverse kinematics application on medical robot using adapted PSO method[J]. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2018, 21(5): 1006-1010.
- [71] 朱经纬, 方虎生, 邵发明, 等. 自适应粒子群算法求冗余机械臂逆运动学解[J]. *计算机工程与应用*, 2019, 55(14): 215-220.
(Zhu J W, Fang H S, Shao F M, et al. Self-adaptive particle swarm optimization algorithm for solving inverse kinematics problem of redundant manipulator[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2019, 55(14): 215-220.)
- [72] Ram R V, Pathak P M, Junco S J. Inverse kinematics of mobile manipulator using bidirectional particle swarm optimization by manipulator decoupling[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 131: 385-405.
- [73] Chen L, Ma Y, Zhang Y, et al. Obstacle avoidance and multitarget tracking of a super redundant modular manipulator based on bezier curve and particle swarm optimization[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 33(1): 1-19.
- [74] Dereli S, Köker R. A meta-heuristic proposal for inverse kinematics solution of 7-DOF serial robotic manipulator: Quantum behaved particle swarm algorithm[J]. *Artificial Intelligence Review*, 2020, 53(2): 949-964.
- [75] Dereli S, Köker R. Strengthening the PSO algorithm with a new technique inspired by the golf game and solving the complex engineering problem[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2021, 7(3): 1515-1526.
- [76] Parker J K, Khoogar A R, Goldberg D E. Inverse kinematics of redundant robots using genetic algorithms[C]. *International Conference on Robotics and Automation*. Scottsdale, 2002: 271-276.
- [77] Köker R. A genetic algorithm approach to a neural-network-based inverse kinematics solution of robotic manipulators based on error minimization[J]. *Information Sciences*, 2013, 222: 528-543.
- [78] Yesid Veslin E, Suell Dutra M, Lengerke O, et al. A hybrid solution for the inverse kinematic on a seven DOF robotic manipulator[J]. *IEEE Latin America Transactions*, 2014, 12(2): 212-218.
- [79] 林阳, 赵欢, 丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(3): 1-8.
(Lin Y, Zhao H, Ding H. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(3): 1-8.)
- [80] Morell A, Tarokh M, Acosta L. Inverse kinematics solutions for serial robots using support vector regression[C]. *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe, 2013: 4203-4208.
- [81] Lin C J, Chen C L. Motion planning of redundant robots with singularities using transputer based fuzzy inverse kinematic method[C]. *Proceedings of the 2006 International Conference on Intelligent Computing: Part II*. Kunming, 2006: 140-145.
- [82] Zhao J D, Zhao L L, Liu H. Motion planning of hyper-redundant manipulators based on ant colony optimization[C]. *2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. New York: ACM, 2016: 1250-1255.
- [83] El-Sherbiny A, Elhosseini M A, Haikal A Y. A new ABC variant for solving inverse kinematics problem in 5 DOF robot arm[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 73: 24-38.
- [84] Dereli S, Köker R. Simulation based calculation of the inverse kinematics solution of 7-DOF robot manipulator using artificial bee colony algorithm[J]. *SN Applied Sciences*, 2019, 2(1): 1-11.
- [85] 李娜托. 基于改进人工蜂群算法的冗余机器臂逆解研究[J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2020(3): 37-40.
(Li N T. Research on inverse solution of redundant robot based on improved artificial bee colony algorithm[J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2020(3): 37-40.)
- [86] Zhang L, Xiao N F. A novel artificial bee colony algorithm for inverse kinematics calculation of 7-DOF serial manipulators[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(10): 3269-3277.

- [87] Dereli S, Köker R. Calculation of the inverse kinematics solution of the 7-DOF redundant robot manipulator by the firefly algorithm and statistical analysis of the results in terms of speed and accuracy[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2020, 28(5): 601-613.
- [88] Hernandez-Barragan J, Lopez-Franco C, Arana-Daniel N, et al. A modified firefly algorithm for the inverse kinematics solutions of robotic manipulators[J]. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 2021, 28(3): 257-275.
- [89] 谢习华, 范诗萌, 周烜亦, 等. 基于改进差分进化算法的机械臂运动学逆解[J]. *机器人*, 2019, 41(1): 50-57. (Xie X H, Fan S M, Zhou X Y, et al. Inverse kinematics of manipulator based on the improved differential evolution algorithm[J]. *Robot*, 2019, 41(1): 50-57.)
- [90] Li C, Dong H, Li X B, et al. Inverse kinematics study for intelligent agriculture robot development via differential evolution algorithm[C]. *2021 International Conference on Computer, Control and Robotics*. Shanghai, 2021: 37-41.
- [91] Ren Z W, Wang Z H, Sun L N. A hybrid biogeography-based optimization method for the inverse kinematics problem of an 8-DOF redundant humanoid manipulator[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2015, 16(7): 607-616.
- [92] 周恒旭, 何志敏, 周燕. 基于长短期记忆网络的机械臂逆运动学解[J]. *机械与电子*, 2020, 38(6): 74-80. (Zhou H X, He Z M, Zhou Y. Inverse kinematics solution of robotic manipulator based on long short-term memory networks[J]. *Machinery & Electronics*, 2020, 38(6): 74-80.)
- [93] Shi J P, Mao Y T, Li P S, et al. Hybrid mutation fruit fly optimization algorithm for solving the inverse kinematics of a redundant robot manipulator[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2020: 1-13.
- [94] 杨帅. 求冗余机器人逆运动学解的改进果蝇优化算法[J]. *机械强度*, 2020, 42(4): 883-889. (Yang S. Solving inverse kinematics problem of redundant robot based on improved fruit fly optimization algorithm[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2020, 42(4): 883-889.)
- [95] Abainia K, Ben Ali Y M. Bio-inspired approach for inverse kinematics of 6-DOF robot manipulator with obstacle avoidance[C]. *The 3rd International Conference on Pattern Analysis and Intelligent Systems*. Tebessa, 2019: 1-8.
- [96] Urrea C, Saa D. Design and implementation of a graphic simulator for calculating the inverse kinematics of a redundant planar manipulator robot[J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(19): 6770.
- [97] Köker R. A neuro-simulated annealing approach to the inverse kinematics solution of redundant robotic manipulators[J]. *Engineering with Computers*, 2013, 29(4): 507-515.
- [98] 都海波, 葛展展, 张金锋, 等. 基于改进天牛须算法的电力攀爬机器人运动学逆解算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2217-2225. (Du H B, Ge Z Z, Zhang J F, et al. Inverse kinematics solution algorithm of electric climbing robot based on improved beetle antennae search algorithm[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2217-2225.)
- [99] Hernandez-Barragan J, Lopez-Franco C, Arana-Daniel N, et al. Inverse kinematics for cooperative mobile manipulators based on self-adaptive differential evolution[J]. *PeerJ Computer Science*, 2021, 7: e419.
- [100] Sun J Y, Liu Y J, Ji C. Improved singular robust inverse solutions of redundant serial manipulators[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2020, 17(3): 172988142093204.
- [101] Woliński U, Wojtyra M. A novel QP-based kinematic redundancy resolution method with joint constraints satisfaction[J]. *IEEE Access*, 2022, 10: 41023-41037.
- [102] Xu Q H, Zhan Q. A real-time inverse kinematics solution based on joint perturbation for redundant manipulators[J]. *Mechanical Sciences*, 2021, 12(1): 221-235.
- [103] Faroni M, Beschi M, Pedrocchi N. Inverse kinematics of redundant manipulators with dynamic bounds on joint movements[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, 5(4): 6435-6442.

作者简介

贾龙飞(1994—), 男, 工程师, 博士, 从事机器人运动规划与控制的研究, E-mail: longfei.jia@lasat.com;

乔尚岭(1990—), 男, 工程师, 博士, 从事宇航空间机构、欠驱动系统等研究, E-mail: qiaoshangling@163.com;

陶云飞(1988—), 男, 高级工程师, 博士, 从事空间机电伺服系统技术、电机与控制等研究, E-mail: tyf19881113@163.com;

郑继贵(1979—), 男, 研究员, 博士, 从事空间机电伺服系统技术、电机与控制等研究, E-mail: zhengjigui@163.com;

郭亚星(1995—), 男, 工程师, 硕士, 从事机械臂控制、丝杠传动等研究, E-mail: guoyaxing08@163.com;

陈靓(1988—), 女, 工程师, 博士, 从事空间机电伺服系统技术、电机和机器人控制等研究, E-mail: chenjing@bjtu.edu.cn;

黄玉平(1967—), 男, 研究员, 博士生导师, 从事伺服系统、机器人等研究, E-mail: yuping.huang@lasat.com.