

# 控制与决策

Control and Decision

## 切换拓扑下群系统保性能编队形成问题优化控制方法

王琳, 张庆杰, 陈宏伟

引用本文:

王琳,张庆杰,陈宏伟. 切换拓扑下群系统保性能编队形成问题优化控制方法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(12): 3436–3444.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0569>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

##### 脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

##### 基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制

Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy

控制与决策. 2021, 36(10): 2435–2441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0453>

##### 有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

控制与决策. 2021, 36(10): 2389–2398 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

##### 基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 $H_\infty$ 控制

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

##### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 切换拓扑下群系统保性能编队形成问题优化控制方法

王琳, 张庆杰<sup>†</sup>, 陈宏伟

(空军航空大学, 长春 130022)

**摘要:** 针对群系统编队形成问题, 提出一种切换拓扑下保性能的优化控制方法. 首先, 建立保性能编队形成问题的数学描述, 设计编队控制协议; 其次, 通过变量代换, 给出群系统实现时变编队的充分条件, 借助李雅普诺夫方法分析系统的稳定性; 再次, 通过求解线性矩阵不等式, 设计编队控制器, 给出群系统性能上界值的数学表达形式. 最后, 通过仿真实验验证了所提控制方法的有效性.

**关键词:** 群系统; 编队形成; 一致性; 保性能; 切换拓扑

中图分类号: V249

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0569

引用格式: 王琳, 张庆杰, 陈宏伟. 切换拓扑下群系统保性能编队形成问题优化控制方法[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3436-3444.

## Optimal control method for swarm systems formation achievement problem with guaranteed-performance and switching topologies

WANG Lin, ZHANG Qing-jie<sup>†</sup>, CHEN Hong-wei

(Aviation University of Air Force, Changchun 130022, China)

**Abstract:** For the formation achievement problem for swarm systems, an optimal control method with guaranteed-performance and switching topologies is proposed. Firstly, the mathematical description of the formation achievement problem with guaranteed-performance is established and a formation control protocol is designed. Secondly, sufficient conditions for swarm systems with time-varying formation are obtained by variable substitution and the stability of the system is analysed using the Lyapunov approach. Then, the formation controller is designed by solving the linear matrix inequality, and the mathematical expression of the upper bound of performance for the swarm system is given. Finally, a numerical simulation is provided to illustrate the effectiveness of the proposed control method.

**Keywords:** swarm systems; formation achievement; consensus; guaranteed-performance; switching topology

## 0 引言

群系统编队控制<sup>[1-5]</sup>越来越受到学者们的关注, 并在无人机<sup>[6-7]</sup>、卫星<sup>[8-9]</sup>和机器人<sup>[10-11]</sup>等领域有着广泛的应用. 传统的编队控制方法存在通信代价大、数学建模复杂、易单点失效导致整体瘫痪的缺点. 一致性理论的出现, 为编队控制问题的解决提供了新的思路. 文献[12]运用一致性方法解决编队控制问题, 有效克服了传统编队控制方法的缺陷.

文献[13]针对大规模群系统, 提出了一种有限时间编队控制策略; 文献[14]运用一致性方法, 解决了二阶积分特性模型下的时变编队问题. 对于有向通信拓扑, 文献[15]运用领导者跟随者方法, 解决了时变编队问题; 文献[16]给出了编队形成的充要条件, 并利用无人机飞行实验, 验证了控制方法的有效

性. 为了解决时变时延条件下的群系统编队控制问题, 文献[17]利用自由权矩阵方法分析系统镇定问题, 得到了编队形成的 LMI 判据以及控制器增益矩阵的设计方法. 文献[13-17]的通信拓扑条件均为理想条件, 而实际应用中, 切换拓扑的情况更为常见.

文献[18]针对一阶积分特性模型, 在所有可能的拓扑集合下设计编队控制器, 解决了多智能体的编队控制问题. 为了解决无人机集群构型变换控制问题, 文献[19]在切换通信拓扑条件下, 给出了无人机集群实现特定构型变换的充要条件. 在无向切换通信拓扑条件下, 文献[20]针对二阶积分特性模型, 进行了理论验证和无人机飞行实验. 针对有向切换拓扑和时变时延, 文献[21]利用变量代换, 将两个通信条件下的编队控制问题转化为系统镇定问题; 文献[22]利

收稿日期: 2022-04-08; 录用日期: 2022-07-17.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: nudtzhang@hotmail.com.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

用完全分布式控制结构,在有向切换拓扑条件下,解决了编队形成问题;文献[23]提出了高阶积分特性模型在无向切换拓扑条件的编队控制方法.在编队形成问题的基础上,文献[24]研究了时变编队轨迹跟踪问题.文献[18-24]从切换拓扑结构出发,进行编队的分析和设计,解决问题的关键在于如何设计一个可行的控制协议,使得群系统各主体形成固定的队形.在实际应用中,不仅需要群系统能够达成一致,还要求某些方面的性能满足一定的要求.

针对群系统形成编队过程中的性能优化问题,在编队控制基础上,通过引入性能指标函数加以解决.文献[25]针对一阶积分特性模型,解决了最小化线性二次型性能指标的编队问题;文献[26]在给定的 $H_\infty$ 性能指标下,给出了群系统实现编队 $H_\infty$ 控制的充分必要条件;文献[27]利用逆优化方法设计时变编队控制协议,给出群系统实现时变编队的可行性条件,并可以保证所提出的控制协议满足LQR性能指标;文献[28]研究了切换拓扑条件下保性能一致性问题,但是没有考虑系统时变编队问题.对于给定的性能函数,文献[29]研究了群系统的双向编队控制问题,得到了实现编队的同时保证性能指标要求的充分条件;文献[30]针对多无人机系统的优化控制问题,提出一种保性能编队控制方法,但是没有考虑切换拓扑的情况.综上所述,对于切换拓扑条件,研究群系统的保性能编队形成问题,具有十分重要的意义.

本文主要研究一种切换拓扑下保性能编队形成控制优化方法.本文的主要工作有:1)建立保性能编队形成问题的数学描述,设计分布式控制协议框架,给出群系统形成时变编队的充分条件;2)通过引入一种分布式性能指标,描述编队控制的调节性能,并给出性能上界的数学表达形式;3)利用求解线性矩阵不等式的方法,设计编队控制器,通过调整不等式中附加项参数,可实现编队形成速度和性能指标加权阵的调节.

## 1 图论知识和相关引理

### 1.1 图论知识

图 $G = (V, \varepsilon, W)$ 中, $V$ 是节点集合, $\varepsilon$ 是边集合, $W$ 是邻接矩阵.其中: $V = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ , $\varepsilon = \{(\xi_i, \xi_j) : \xi_i, \xi_j \in V\}$ , $W = [w_{ij}] \in R^{N \times N}$ .用 $e_{ij} = (\xi_i, \xi_j)$ 表示节点 $\xi_i$ 延伸到节点 $\xi_j$ 的边.如果对于任意的 $e_{ij} \in \varepsilon$ 都存在 $e_{ji} \in \varepsilon$ ,则图 $G$ 是无向图;其他情况下,称图 $G$ 是有向图.用 $w_{ij}$ 表示边 $e_{ji}$ 的连接权重,当 $w_{ij} > 0$ ,节点 $\xi_i$ 可以接收来自节点 $\xi_j$ 的信息,而对于 $i = \{1, 2, \dots, N\}$ ,有 $w_{ii} = 0$ .如果存在一个节点 $\xi_i$ ,可

以传递信息到其他任意节点,则称图 $G$ 含有一个有向生成树.定义节点 $\xi_i$ 的邻居节点集合为 $N_i = \{\xi_j \in V : (\xi_j, \xi_i) \in \varepsilon\}$ .定义节点 $\xi_i$ 的入度 $\deg_{in}(\xi_i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}$ ,则图的入度矩阵为 $D = \text{diag}\{\deg_{in}(\xi_1), \deg_{in}(\xi_2), \dots, \deg_{in}(\xi_N)\}$ .通常用 $L = D - W$ 表示图 $G$ 的拉普拉斯矩阵.

### 1.2 相关引理

**引理1** 对于正定矩阵 $Q \in R^{N \times N}$ ,矩阵 $Q$ 的最大特征值用 $\max\{\lambda(Q)\}$ 表示,最小特征值用 $\min\{\lambda(Q)\}$ 表示,则有 $\min\{\lambda(Q)\}I_N \leq Q \leq \max\{\lambda(Q)\}I_N$ .

**引理2** 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ f(0, t) = 0, \forall t, \end{cases}$$

如果存在正定函数 $V(x, t)$ ,且 $\dot{V}(x, t)$ 是负定函数,则平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的.

## 2 问题描述

### 2.1 保性能编队形成问题

考虑群系统满足如下动态特性:

$$\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1)$$

其中: $A$ 和 $B$ 是系统矩阵, $\xi_i(t) \in R^l$ 是第 $i$ 个主体的状态, $u_i(t) \in R^m$ 是第 $i$ 个主体的控制输入.

考虑群系统各主体之间通信拓扑关系会随着时间而变化. $\tilde{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ , $p \geq 2$ 表示各主体之间通信拓扑关系的集合; $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ 表示拓扑关系切换时刻, $t_{k,k-1} = t_k - t_{k-1}$ ( $k = 1, 2, \dots$ )表示某一种通信拓扑关系维持的时间; $\sigma(t) = \{1, 2, \dots, p\}$ 表示切换信号,图 $G_{\sigma(t)}$ 对应的拉普拉斯矩阵为 $L_{\sigma(t)}$ .

**假设1**  $\tilde{G}$ 中所有通信拓扑关系均是无向连通图.

用 $h(t) = [h_1^T(t), h_2^T(t), \dots, h_N^T(t)]^T \in R^{lN}$ 描述期望的编队队形,其中 $h_i^T(t)$ ( $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ )连续可微.

为了描述群系统(1)形成时变编队的调节性能,构建如下性能指标函数:

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2, \\ J_1 &= \sum_{i=1}^N \int_0^\infty (\xi_i(t) - h_i(t))^T Q (\xi_i(t) - h_i(t)) dt, \\ J_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \sum_{j \in N_i} w_{ij} (\xi_j(t) - h_j(t) - (\xi_i(t) - \end{aligned}$$

$$h_i(t)))^T Q(\xi_j(t) - h_j(t) - (\xi_i(t) - h_i(t)))dt.$$

其中:  $Q$  表示对称正定矩阵,  $N_i$  表示拓扑图  $G$  第  $i$  个节点的邻居集合,  $J_1$  表示主体自身的性能函数,  $J_2$  表示主体之间的性能函数. 进而可以将保性能编队形成问题描述如下.

**定义 1** 存在控制输入  $u_i(t)$ , 使得群系统(1)的主体状态能够满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_i(t) - h_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

且  $J < J^*$  成立, 则称群系统(1)能够实现保性能编队形成控制, 其中  $J^*$  表示保性能上界.

## 2.2 控制协议框架

基于一致性理论, 考虑如下编队控制协议:

$$u_i(t) = u_{i1}(t) + u_{i2}(t) + u_{i3}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

其中:  $u_{i1}(t)$  为自身反馈控制输入,  $u_{i2}(t)$  为辅助函数输入,  $u_{i3}(t)$  为邻居反馈控制输入, 具体表达式为

$$\begin{aligned} u_{i1}(t) &= K_1(\xi_i(t) - h_i(t)), \\ u_{i2}(t) &= v_i(t), \\ u_{i3}(t) &= \\ &K_2 \sum_{j \in N_i} w_{ij}(\xi_j(t) - h_j(t) - (\xi_i(t) - h_i(t))). \end{aligned} \quad (4)$$

$K_1$  和  $K_2$  是待设计的增益矩阵,  $v_i(t) \in R^m$  是辅助函数.

## 3 问题分析和协议设计

### 3.1 充分条件

令

$$\begin{aligned} \xi(t) &= [\xi_1^T(t), \xi_2^T(t), \dots, \xi_N^T(t)]^T, \\ v(t) &= [v_1^T(t), v_2^T(t), \dots, v_N^T(t)]^T, \end{aligned}$$

得到群系统的闭环方程为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (I_N \otimes (A + BK_1))\xi(t) - \\ &(L_{\sigma(t)} \otimes BK_2)\xi(t) + (I_N \otimes B)v(t) - \\ &(I_N \otimes BK_1)h(t) + (L_{\sigma(t)} \otimes BK_2)h(t), \end{aligned} \quad (5)$$

这里  $L$  为通信拓扑图  $G$  的拉普拉斯矩阵. 令  $\varsigma_i(t) = \xi_i(t) - h_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  $\varsigma(t) = [\varsigma_1^T(t), \varsigma_2^T(t), \dots, \varsigma_N^T(t)]^T$ , 则群系统(5)可以转换为

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}(t) &= (I_N \otimes (A + BK_1))\varsigma(t) - \\ &(L_{\sigma(t)} \otimes BK_2)\varsigma(t) + (I_N \otimes A)h(t) + \\ &(I_N \otimes B)v(t) - (I_N \otimes I_l)\dot{h}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

根据定义 1, 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varsigma(t) = 0$ , 则群系统(1)能够形成时变编队  $h(t)$ . 由式(6)可知, 当

$$(I_N \otimes A)h(t) + (I_N \otimes B)v(t) - (I_N \otimes I_l)\dot{h}(t) = 0, \quad (7)$$

且闭环系统

$$\dot{\varsigma}(t) = (I_N \otimes (A + BK_1) - L_{\sigma(t)} \otimes BK_2)\varsigma(t) \quad (8)$$

渐近稳定时, 群系统(1)能够形成时变编队  $h(t)$ , 由此可得式(7)和(8)是群系统形成时变编队的充分条件.

**注 1** 辅助函数  $v(t)$  的引入是为了补偿时变编队  $h(t)$  带来的多余项, 将群系统(1)转化为闭环自治系统, 便于讨论系统的稳定性. 辅助函数  $v(t)$  可以通过式(7)求解得到. 闭环系统(8)的稳定性可通过李雅普诺夫稳定性理论予以证明, 在理论证明中, 难点在于闭环系统(8)中增益矩阵  $K_1$  和  $K_2$  的设计方法.

### 3.2 稳定性和保性能分析

**定理 1** 在假设 1 成立的条件下, 通过构造  $K_1 = -B^T P$ ,  $K_2 = B^T P$ , 其中  $P$  是不等式

$$A^T P + PA - 2\lambda_{\min} P B B^T P + \alpha P + \lambda_{\max} Q < 0 \quad (9)$$

的对称正定解, 则群系统(1)在编队控制协议(4)下能够实现保性能编队形成控制. 其中:  $\lambda_{\min}$  表示矩阵  $I + L_{\sigma(t)}$  的最小特征值,  $\lambda_{\max}$  表示矩阵  $I + L_{\sigma(t)}$  的最大特征值,  $\alpha$  表示大于零的常数,  $Q$  表示性能指标函数中的加权阵. 保性能上界满足  $J^* = \varsigma^T(0)(I \otimes P)\varsigma(0)$ .

**证明** 首先考虑稳定性问题, 构造分段连续的 Lyapunov 函数

$$V = \varsigma^T(t)(I \otimes P)\varsigma(t), \quad (10)$$

其中  $P$  满足式(9).

当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时,  $V$  是连续的, 对其求导并将式(8),  $K_1 = -B^T P$ ,  $K_2 = B^T P$ , 代入式(10)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \varsigma^T(t)(I \otimes (A^T P + PA))\varsigma(t) - \\ &\varsigma^T(t)((I_N + L_{\sigma(t)})^T \otimes P B B^T P)\varsigma(t) - \\ &\varsigma^T(t)((I_N + L_{\sigma(t)}) \otimes P B B^T P)\varsigma(t). \end{aligned} \quad (11)$$

由假设 1, 矩阵  $I + L_{\sigma(t)}$  是对称正定的, 由引理 1 得

$$(I_N + L_{\sigma(t)})^T + (I_N + L_{\sigma(t)}) \geq 2\lambda_{\min} I, \quad (12)$$

则式(11)转换为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &\varsigma^T(t)(I \otimes (A^T P + PA - 2\lambda_{\min} P B B^T P))\varsigma(t). \end{aligned} \quad (13)$$

由式(9)可得

$$A^T P + PA - 2\lambda_{\min} P B B^T P + \alpha P < 0. \quad (14)$$

由式(14),式(13)转换为

$$\dot{V} \leq -\alpha \zeta^T(t)(I \otimes P)\zeta(t). \quad (15)$$

根据式(10)和(15)可得

$$V(t) \leq e^{-\alpha(t-t_k)}V(t_k). \quad (16)$$

在切换拓扑时刻 $t_k$ ,有

$$V(t_k) \leq V(t_k^-), \quad (17)$$

其中 $t_k^-$ 表示切换拓扑发生前的临界时刻. 根据式(16)和(17)进行迭代推理得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{-\alpha(t-t_k)}V(t_k^-) \leq \\ &e^{-\alpha(t-t_k)}e^{-\alpha(t_k-t_{k-1})}V(t_{k-1}) \leq \\ &e^{-\alpha t}V(0). \end{aligned} \quad (18)$$

由式(10),可以得到

$$V(0) \leq \max\{\lambda(P)\|\zeta(0)\|^2, \quad (19)$$

$$\min\{\lambda(P)\|\zeta(t)\|^2 \leq V(t). \quad (20)$$

由式(18)~(20)可得

$$\|\zeta(t)\|^2 \leq \frac{\max\{\lambda(P)\}}{\min\{\lambda(P)\}}e^{-\alpha t}\|\zeta(0)\|^2. \quad (21)$$

由 $-\alpha < 0$ ,得 $\zeta(t)$ 指数收敛于0. 下面考虑保性能问题,由构建的性能指标函数

$$J = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty (\xi_i(t) - h_i(t))^T Q(\xi_i(t) - h_i(t))dt,$$

$$J_2 =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \sum_{j \in N_i} w_{ij}(\xi_j(t) - h_j(t) - (\xi_i(t) - h_i(t)))^T Q(\xi_j(t) - h_j(t) - (\xi_i(t) - h_i(t)))dt, \quad (22)$$

可得

$$J = \int_0^\infty \zeta^T(t)((I + L_{\sigma(t)}) \otimes Q)\zeta(t)dt. \quad (23)$$

由引理1,式(23)转换为

$$J \leq \int_0^\infty \zeta^T(t)(I \otimes \lambda_{\max}Q)\zeta(t)dt. \quad (24)$$

由式(9),式(24)转换为

$$J < \int_0^\infty -\zeta^T(t)(I \otimes \Theta)\zeta(t)dt. \quad (25)$$

其中

$$\Theta = A^T P + PA - 2\lambda_{\min}PBB^T P + \alpha P.$$

由式(10)和(13)可得

$$\dot{V} + \alpha V \leq \zeta^T(t)(I \otimes \Theta)\zeta(t). \quad (26)$$

由式(25)和(26)可得

$$J < \int_0^\infty -(\dot{V} + \alpha V)dt =$$

$$-\int_0^\infty \dot{V}dt - \int_0^\infty \alpha Vdt =$$

$$V(0) - V(\infty) - \int_0^\infty \alpha Vdt. \quad (27)$$

根据 $V$ 稳定收敛于0和 $V$ 的正定性,可得

$$J < V(0) = \zeta^T(0)(I \otimes P)\zeta(0), \quad (28)$$

即得到保性能上界.  $\square$

**注2** 文献[27]讨论的是在给定编队控制协议条件下的LQR最小值问题,而本文研究的是在给定LQR形式的性能指标条件下如何设计控制协议. 两者的区别是正反两个方向求解,本文方法的优势在于性能指标加权阵的形式不会受到拉普拉斯矩阵的限制,在实际应用中可根据复杂的环境灵活改变性能指标加权阵.

**注3** 讨论控制器增益矩阵的设计方法,文献[27]的增益矩阵通过求解Riccati方程得到,没有附加项的引入,不能实现增益矩阵参数的调节. 区别于文献[27],本文通过求解线性矩阵不等式得到增益矩阵参数,因为附加项的引入,能够实现对编队形成速度和性能指标加权阵的调节.

**注4**  $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 是通过比较不同拓扑下的特征值得到,详见下式:

$$\lambda_{\min} =$$

$$\min\{\lambda(I + L_1), \lambda(I + L_2), \dots, \lambda(I + L_p)\},$$

$$\lambda_{\max} =$$

$$\max\{\lambda(I + L_1), \lambda(I + L_2), \dots, \lambda(I + L_p)\}.$$

引入 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 是为了在证明公共李雅普诺夫函数导数负定性的过程中简化求解难度,某种程度上会牺牲一部分保守性. 下一步,将考虑采用文献[17, 26]中的自由权矩阵方法降低保守性问题.

**注5** 式(9)中附加项 $\alpha P$ 的引入使编队形成速度得到相对量化,使得构建的李雅普诺夫函数以高于 $\alpha$ 的速率收敛. 由式(13)可得,对于固定通信拓扑,式(9)中即使没有附加项 $\alpha P$ 和 $\lambda_{\max}Q$ ,即矩阵 $P$ 满足

$$A^T P + PA - 2\lambda_{\min}PBB^T P < 0, \quad (29)$$

群系统仍可以实现保性能编队形成控制. 显然式(9)如果成立,式(29)必定成立,所以本文控制方法也适用于固定拓扑条件下保性能编队形成控制.

**注6** 式(9)中,附加项 $\lambda_{\max}Q$ 的引入,将保性能上界与编队形成控制建立了联系,在控制器的作用下,群系统不仅形成了时变编队,还使得系统实际消耗的性能函数值低于保性能上界值. 如果没有附加项 $\lambda_{\max}Q$ ,系统实际消耗的性能上界值无法量化.

**注7** 解决保性能编队形成问题的核心思路是:

先考虑群系统实际消耗的性能指标,将性能指标中的加权阵 $Q$ 引入线性矩阵不等式,通过求解不等式,得到控制器增益矩阵,进而确定群系统的保性能上界值 $J^*$ ,保证群系统在实现编队的同时,实际消耗的性能指标 $J$ 低于保性能上界值 $J^*$ .

### 4 数值仿真与分析

#### 4.1 数值仿真条件

为验证本文编队控制方法的有效性,设置8个主体组成的三阶群系统.群系统模型中,每个主体由式(1)描述,其中系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

图1和图2分别给出了各主体之间的拓扑图和切换信号.

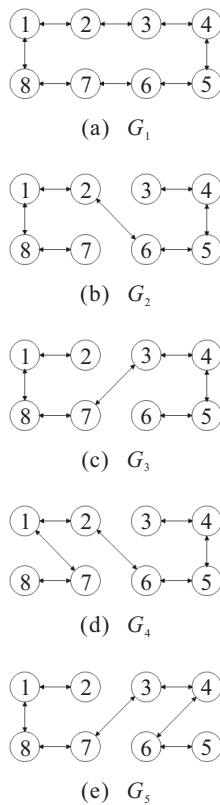


图1 群系统各主体之间的通信拓扑图

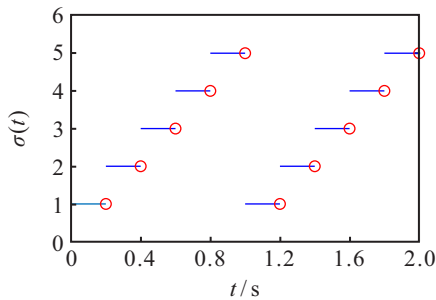


图2 切换信号

定义时变编队 $h(t)$ 为

$$h_i(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t + 0.25(i - 1)\pi) \\ 2 \sin(t + 0.25(i - 1)\pi) \\ 2 \cos(t + 0.25(i - 1)\pi) \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 8.$$

由式(7)可以得到控制函数 $v(t)$ 为

$$v_i(t) = 2 \cos\left(t + \frac{(i - 1)\pi}{4}\right) - 12 \sin\left(t + \frac{(i - 1)\pi}{4}\right).$$

选取性能指标函数加权阵为3维单位阵,取 $\alpha = 0.1$ ,如果节点 $\xi_i$ 可以接收来自节点 $\xi_j$ 的信息,则 $w_{ij} = 1$ ,否则 $w_{ij} = 0$ .根据本文所取的5种通信拓扑图,求得 $\lambda_{\min}(I + L_{\sigma(t)}) = 1, \lambda_{\max}(I + L_{\sigma(t)}) = 5$ .由式(9)可求得

$$P = \begin{bmatrix} 66.3921 & -36.5919 & -34.5048 \\ -36.5919 & 36.2947 & 26.4375 \\ -34.5048 & 26.4375 & 24.3919 \end{bmatrix}.$$

各主体的初始状态分别为

$$\begin{aligned} x_{i1}(0) &= 4(\delta - 0.5), x_{i2}(0) = 3(\delta - 0.5), \\ x_{i3}(0) &= 2(\delta - 0.5), i = 1, 2, \dots, 8, \end{aligned}$$

其中 $\delta$ 为(0, 1)之间的随机数,设置仿真时间为30 s.

#### 4.2 结果讨论与对比分析

##### 4.2.1 结果讨论

图3给出了8个主体的状态在1 s、10 s、20 s和30 s时的状态演化过程和编队构型.图4分别给出了编队形成误差在3个不同方向上的差值曲线.从图3和图4可以看出,在初始阶段,8个主体的构型为不规则图形,随着时间的推移,群系统的8个主体形成了指定的时变编队并可以保持稳定.不同方向上编队形成误差都可以趋于零,说明各主体的3个状态与编队相应状态的差值趋于零,这也说明群系统形成了指定的时变编队,并可以保持稳定.

对于式(9),常数 $\alpha$ 的引入从侧面可以反映编队形成的速度,使得构建的李雅普诺夫函数以高于 $\alpha$ 的速率收敛.在 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 三个方向上,参数 $\alpha$ 取值的不同会影响编队形成误差收敛时间,见表1.这里认为差值小于 $10^{-3}$ 时,编队形成误差趋于零.可以看出,随着参数 $\alpha$ 的增大,编队形成误差趋于零的时间缩短.

表1 编队形成误差收敛时间 单位:s

方向	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$
$x$	7.3	7.1	6.8	6.5	6.1
$y$	9.7	9.5	9.4	9.2	9.0
$z$	9.6	9.4	9.3	9.2	9.0

为了验证群系统能够实现保性能编队形成控制,给出主体运动过程中实际消耗的性能函数曲线,见图5.其中:群系统实际消耗的性能函数值是通过式(23)求解得到的,然后通过曲线拟合得到函数曲线;

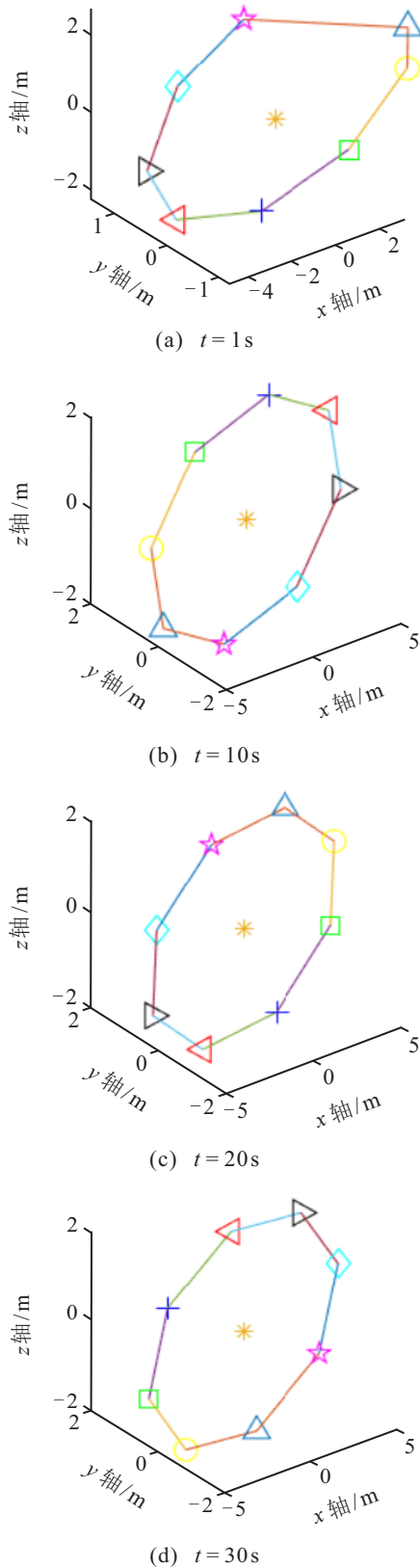


图3 不同时刻群系统状态演化过程

性能上界值是通过求解李雅普诺夫函数的初值得到的,  $J^* = 2886.3$ . 从图5不难看出, 实际消耗的性能函数曲线收敛到有界值, 且低于所求得的性能上界值, 说明在本文控制方法下, 群系统不仅实现了编队形成控制, 还保证了实际消耗的性能函数值低于性能上界值.

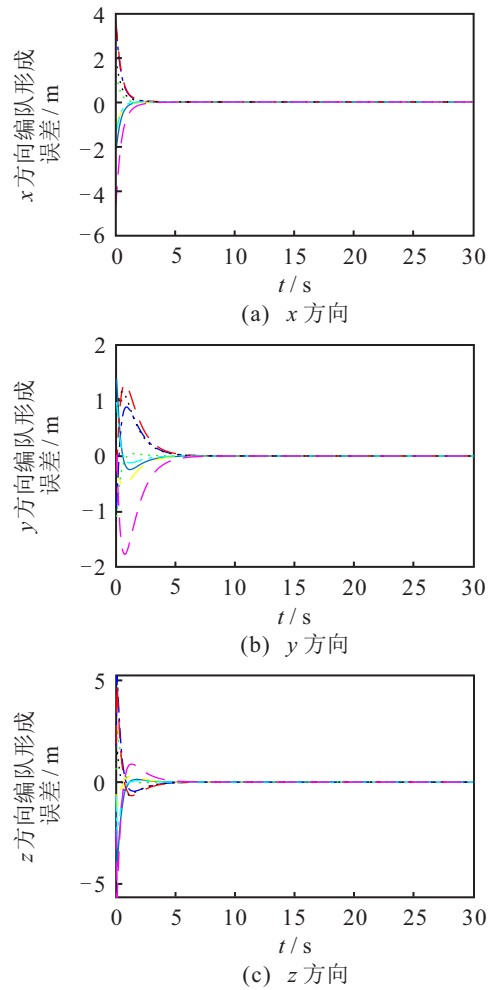


图4 3个不同方向上的编队形成误差

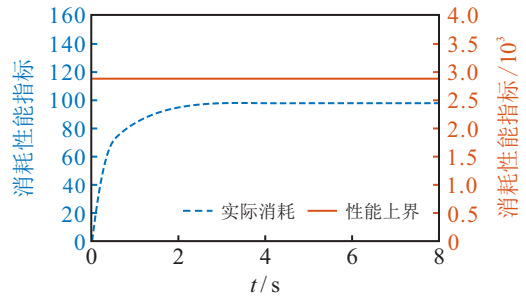


图5 实际消耗性能指标与保性能上界

图6给出了8个主体在编队形成过程中的控制输入曲线. 从图6可以看出, 在形成编队的初始阶段, 控制输入值较大, 随着时间的推移, 主体形成时变编队且趋于稳定, 控制输入保持在较小的幅度内变化.

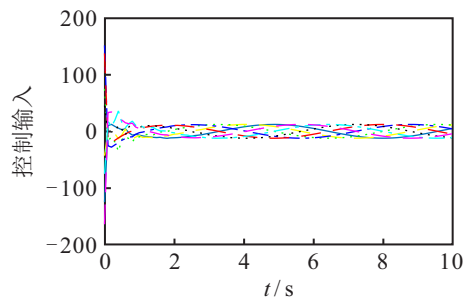


图6 控制输入曲线

4.2.2 对比分析

为便于比较和考虑到控制协议需要满足特定的拓扑条件,仿真条件设置4个二阶模型组成的群系统,选取拓扑图为无向图.系统矩阵为

$$A = I_3 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = I_3 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

定义时变编队 $h(t)$ 为

$$h_i(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t + 0.5(i - 1)\pi) \\ -4 \sin(t + 0.5(i - 1)\pi) \\ 2 \sin(t + 0.5(i - 1)\pi) \\ 2 \cos(t + 0.5(i - 1)\pi) \\ 2 \cos(t + 0.5(i - 1)\pi) \\ -2 \sin(t + 0.5(i - 1)\pi) \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 4.$$

从编队形成速度分析,表2给出了本文方法与其他方法的编队误差收敛时间和控制参数取值.不难看出,本文方法的编队误差收敛时间更短.将3个方向上最长的收敛时间作为群系统的收敛时间,本文方法比文献[16]、文献[20]缩短了17%,比文献[22]缩短了约71%,比文献[24]缩短了约31%,比文献[31]缩短了22%.文献[22]的控制协议是完全分布式结构,即结构中仅含有邻居反馈控制,不含有自身反馈控制,而本文的控制协议结构包含这两种反馈控制,

使得编队形成速度明显提高.

从消耗性能指标分析,图7给出了本文方法与其他方法的消耗性能指标.不难看出,文献[20]与文献[31]的曲线几乎重合,是由于两者消耗的性能指标值相近,且数值较大.还可以得到,本文方法消耗的性能函数值比文献[16]降低了约15%,比文献[20]、文献[31]降低了约16%,比文献[24]降低了约5%.本文在设计控制协议的过程中,目的是将保性能上界与编队形成控制建立联系,进而确定系统实际消耗的性能上界值,并非降低系统实际消耗的性能值,但本文方法在确定性能上界值的同时,还可以在一定程度上降低系统的性能消耗,所以本文控制方法具有一定的参考价值.

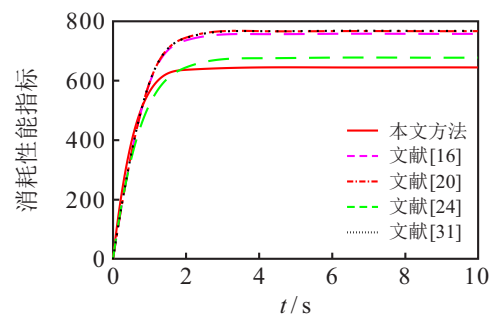


图7 不同方法下消耗性能指标

表2 不同方法下编队误差收敛时间和控制参数取值

方法	收敛时间/s	控制参数取值
本文方法	7.9	$K_1 = I_3 \otimes [5.534 \ 1 \ -5.302 \ 3], K_2 = I_3 \otimes [5.534 \ 1 \ 5.302 \ 3]$
文献[16]	9.5	$K_1 = \begin{bmatrix} -2.9361 & -2.9807 & -0.8030 & 0.0691 & 0.8736 & 0.4162 \\ 0.9894 & -0.0076 & -2.9031 & -2.9894 & 0.4414 & 0.2212 \\ -0.3179 & -0.1306 & -0.0248 & -0.1829 & -2.0661 & -3.0299 \end{bmatrix}$ $K_2 = \begin{bmatrix} 0.0938 & 0.1109 & -0.0290 & 0.0017 & 0.0217 & 0.0077 \\ 0.0348 & 0.0017 & 0.0910 & 0.1101 & 0.0031 & 1.1998 \times 10^{-4} \\ -0.0029 & 0.0077 & -0.0060 & 1.1998 \times 10^{-4} & 0.1232 & 0.1195 \end{bmatrix}$
文献[20]	9.5	$K_1 = \begin{bmatrix} -2.9361 & -2.9807 & -0.8030 & 0.0691 & 0.8736 & 0.4162 \\ 0.9894 & -0.0076 & -2.9031 & -2.9894 & 0.4414 & 0.2212 \\ -0.3179 & -0.1306 & -0.0248 & -0.1829 & -2.0661 & -3.0299 \end{bmatrix}$ $K_2 = \begin{bmatrix} 0.0469 & 0.0554 & -0.0145 & 0.0008 & 0.0108 & 0.0038 \\ 0.0174 & 0.0008 & 0.0455 & 0.0550 & 0.0016 & 5.9990 \times 10^{-5} \\ -0.0014 & 0.0038 & -0.0030 & 5.9990 \times 10^{-5} & 0.0616 & 0.0598 \end{bmatrix}$
文献[22]	27	$K = I_3 \otimes [1.1389 \ 3.4168]$
文献[24]	11.4	$K_1 = I_3 \otimes [-3.1705 \ -4.3546], K_2 = I_3 \otimes [3.1705 \ 4.3546]$
文献[31]	10.1	$K_1 = \begin{bmatrix} -2.9361 & -2.9807 & -0.8030 & 0.0691 & 0.8736 & 0.4162 \\ 0.9894 & -0.0076 & -2.9031 & -2.9894 & 0.4414 & 0.2212 \\ -0.3179 & -0.1306 & -0.0248 & -0.1829 & -2.0661 & -3.0299 \end{bmatrix}$ $K_2 = \begin{bmatrix} 0.1055 & 0.1292 & 0.0460 & 0.0006 & -0.0290 & -0.0013 \\ -0.0476 & 0.0006 & 0.1072 & 0.1320 & -2.8442 \times 10^{-4} & 0.0091 \\ 0.0228 & -0.0013 & 0.0039 & 0.0091 & 0.1303 & 0.1874 \end{bmatrix}$

## 5 结论

本文运用一致性理论给出了控制器增益矩阵的设计方法,解决了无向切换拓扑条件下的群系统保性能编队形成问题;将保性能编队形成控制问题转化为群系统的稳定性问题和系统的实际性能上界值问题;控制器增益矩阵的设计重点在于求解线性矩阵不等式,通过两个附加项的引入,不仅使编队形成速度得到相对量化,还将保性能上界与编队形成控制建立联系,进而确定系统实际消耗的性能上界值。

### 参考文献(References)

- [1] 王祥科, 陈浩, 赵述龙. 大规模固定翼无人机集群编队控制方法[J]. 控制与决策, 2021, 36(9): 2063-2073.  
(Wang X K, Chen H, Zhao S L. Formation control of large-scale fixed-wing unmanned aerial vehicle swarms[J]. Control and Decision, 2021, 36(9): 2063-2073.)
- [2] Xie Y X, Han L, Dong X W, et al. Bio-inspired adaptive formation tracking control for swarm systems with application to UAV swarm systems[J]. Neurocomputing, 2021, 453: 272-285.
- [3] 王晶, 顾维博, 窦立亚. 基于 leader-follower 的多无人机编队轨迹跟踪设计[J]. 航空学报, 2020, 41(S1): 88-98.  
(Wang J, Gu W B, Dou L Y. Leader-follower formation control of multiple UAVs with trajectory tracking design[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(S1): 88-98.)
- [4] 吴宇, 梁天骄. 基于改进一致性算法的无人机编队控制[J]. 航空学报, 2020, 41(9): 323848.  
(Wu Y, Liang T J. Improved consensus-based algorithm for unmanned aerial vehicle formation control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(9): 323848.)
- [5] 田磊, 董希旺, 赵启伦, 等. 异构集群系统分布式自适应输出时变编队跟踪控制[J]. 自动化学报, 2021, 47(10): 2386-2401.  
(Tian L, Dong X W, Zhao Q L, et al. Distributed adaptive time-varying output formation tracking for heterogeneous swarm systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(10): 2386-2401.)
- [6] 费思远, 鲜斌, 王岭. 基于群集行为的分布式多无人机编队动态避障控制[J]. 控制理论与应用, 2022, 39(1): 1-11.  
(Fei S Y, Xian B, Wang L. Distributed formation control for multiple unmanned aerial vehicles with dynamic obstacle avoidance based on the flocking behavior[J]. Control Theory & Applications, 2022, 39(1): 1-11.)
- [7] 郭洪振, 陈谋. 基于预设性能的四旋翼无人机编队安全控制[J]. 航空学报, 2021, 42(8): 300-312.  
(Guo H Z, Chen M. Safety formation control of quadrotor UAVs based on prescribed performance[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(8): 300-312.)
- [8] 杨慧欣. 基于循环追踪控制的卫星编队构形调整控制律设计[J]. 航空学报, 2020, 41(S2): 181-186.  
(Yang H X. Cyclic pursuit control method design for spacecraft formation configuration adjustment[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(S2): 181-186.)
- [9] 宗群, 谷友博, 张秀云, 等. 角速度约束卫星编队控制与虚拟演示验证[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, 53(3): 193-200.  
(Zong Q, Gu Y B, Zhang X Y, et al. Satellite formation control and virtual demonstration verification under angular velocity constraint[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2021, 53(3): 193-200.)
- [10] 王常顺, 王丹, 彭周华. 单路径导引的车式移动机器人协同编队控制[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 1124-1132.  
(Wang C S, Wang D, Peng Z H. Coordinated formation control of car-like mobile robots guided by parameterized single path[J]. Control Theory & Applications, 2021, 38(7): 1124-1132.)
- [11] 谭瑶, 梅杰. 利用方位角信息的移动机器人编队控制[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 1043-1050.  
(Tan Y, Mei J. Formation control of mobile robots using bearing-only measurements[J]. Control Theory & Applications, 2021, 38(7): 1043-1050.)
- [12] Ren W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations[J]. IET Control Theory & Applications, 2007, 1(2): 505-512.
- [13] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [14] Wang X Y. Multi-agent time-varying formation control based on consistency[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1865(2): 022031.
- [15] Liu X F, Xie Y F, Li F B, et al. Time-varying formation control of singular multi-agent systems with multiple leaders[C]. The 16th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA). Sapporo, 2020: 193-198.
- [16] Dong X W, Yu B C, Shi Z Y, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(1): 340-348.
- [17] 石晓航, 张庆杰, 吕俊伟. 基于自由权矩阵的时变时延线性群系统编队控制[J]. 航空学报, 2018, 39(3): 204-214.  
(Shi X H, Zhang Q J, Lv J W. Formation control

- for linear swarm systems with time-varying delays based on free-weighting matrices[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(3): 204-214.)
- [18] Nian X H, Su S J, Pan H. Consensus tracking protocol and formation control of multi-agent systems with switching topology[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2011, 18(4): 1178-1183.
- [19] 刘流, 梁晓龙, 张佳强, 等. 切换通信拓扑条件下的无人机集群构型变换控制[J]. *兵工学报*, 2019, 40(5): 996-1002.  
(Liu L, Liang X L, Zhang J Q, et al. UAV swarm formation reconfiguration control with switching interaction topologies[J]. *Acta Armamentarii*, 2019, 40(5): 996-1002.)
- [20] Dong X W, Zhou Y, Ren Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies[J]. *Control Engineering Practice*, 2016, 46: 26-36.
- [21] 石晓航, 张庆杰, 吕俊伟. 复杂通信条件下的线性群系统编队控制方法[J]. *信息与控制*, 2018, 47(3): 297-305.  
(Shi X H, Zhang Q J, Lv J W. Formation control for linear swarm systems with complex communication conditions[J]. *Information and Control*, 2018, 47(3): 297-305.)
- [22] 刘伟, 周绍磊, 祁亚辉, 等. 有向切换通信拓扑下多无人机分布式编队控制[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(10): 1422-1427.  
(Liu W, Zhou S L, Qi Y H, et al. Distributed formation control for multiple unmanned aerial vehicles with directed switching communication topologies[J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1422-1427.)
- [23] Dong X W, Shi Z Y, Lu G, et al. Time-varying formation control for high-order linear swarm systems with switching interaction topologies[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(18): 2162-2170.
- [24] 周绍磊, 祁亚辉, 张雷, 等. 切换拓扑下无人机集群系统时变编队控制[J]. *航空学报*, 2017, 38(4): 264-272.  
(Zhou S L, Qi Y H, Zhang L, et al. Time-varying formation control of UAV swarm systems with switching topologies[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2017, 38(4): 264-272.)
- [25] Yu C B, Wang Y Q, Shao J L. Optimization of formation for multi-agent systems based on LQR[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2016, 17(2): 96-109.
- [26] 石晓航, 张庆杰, 吕俊伟. 一类复杂通信条件下高阶线性群系统编队控制[J]. *北京航空航天大学学报*, 2020, 46(4): 769-780.  
(Shi X H, Zhang Q J, Lv J W. Formation control for high-order linear swarm systems with complex communication conditions[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2020, 46(4): 769-780.)
- [27] Hu J Y, Lanzon A. Cooperative adaptive time-varying formation tracking for multi-agent systems with LQR performance index and switching directed topologies[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*. Miami, 2018: 5102-5107.
- [28] Xi J X, Wang C, Liu H, et al. Completely distributed guaranteed-performance consensualization for high-order multiagent systems with switching topologies[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(7): 1338-1348.
- [29] 王未, 王莉, 黄迟. 脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(1): 180-186.  
(Wang W, Wang L, Huang C. Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(1): 180-186.)
- [30] 权婉珍, 罗哲, 杨小冈, 等. 间歇通信条件下多无人机保性能编队追踪控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2021, 43(11): 3288-3294.  
(Quan W Z, Luo Z, Yang X G, et al. Guaranteed-performance formation tracking control of multi-UAVs with intermittent communication[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2021, 43(11): 3288-3294.)
- [31] Qi Y H, Zhou S L, Kang Y H, et al. Formation control for unmanned aerial vehicles with directed and switching topologies[J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2016, 2016: 7657452.

### 作者简介

王琳(1998—), 男, 硕士生, 从事群系统编队控制、性能优化等研究, E-mail: 2517865877@qq.com;

张庆杰(1981—), 男, 副教授, 博士, 从事群系统编队控制、一致性等研究, E-mail: nudtzhang@hotmail.com;

陈宏伟(1990—), 男, 硕士生, 从事群系统编队控制、合作博弈等研究, E-mail: 1018539984@qq.com.