

控制与决策

Control and Decision

含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用

许泽东, 党耀国, 杨德岭

引用本文:

许泽东, 党耀国, 杨德岭. 含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3578–3584.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0080>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时滞累积TDAGM($1, N, t$)模型及其在粮食生产中的应用

Time-delayed accumulative TDAGM($1, N, t$)

控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

考虑退化轨迹差异性与相似性的轴承RUL预测

Prediction of bearing remaining useful life involving difference and similarity of degradation trajectories

控制与决策. 2021, 36(11): 2832–2840 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1028>

一种基于深度学习的时间序列预测方法

A time series prediction method based on deep learning

控制与决策. 2021, 36(3): 645–652 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0809>

基于小波变换与差分变异BSO-BP算法的大坝变形预测

Dam deformation prediction based on wavelet transform and differential mutation BSO-BP algorithm

控制与决策. 2021, 36(7): 1611–1618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1431>

基于迁移学习灰支持向量回归机的交互式进化计算

Interactive evolutionary computation based on transfer learning grey support vector regression

控制与决策. 2021, 36(10): 2399–2408 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0420>

含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用

许泽东^{1†}, 党耀国¹, 杨德岭²

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106; 2. 许昌电气职业学院 经济管理系, 河南 许昌 461002)

摘要: 为了进一步提高含时间幂次项的灰色预测模型的拟合预测精度, 通过引入分数阶多项式, 提出灰作用量优化的 FPDGM(1, 1, N) 预测模型. 在经典的 DGM(1, 1, N) 模型的基础上, 将灰作用量整数阶多项式拓展为分数阶多项式, 使得构造的模型能够生成更加贴近于一般特征的时间响应序列, 从而得到拟合预测精度更高的灰色预测模型. 对该模型的建模机理、参数估计、递推时间响应式等进行研究, 并讨论模型参数几种特殊取值下该模型的性质. 研究表明: DGM(1, 1) 模型、NDGM(1, 1) 模型和 DGM(1, 1, N) 模型等均是 FPDGM(1, 1, N) 模型的特殊形式, 因此, 该模型在形式上统一了现有的含时间幂次项灰色模型, 扩大了灰色预测理论的应用范围. 最后通过实验表明, 所提出的新模型具有更好的拟合和预测精度, 从而验证了所构建模型的有效性和适用性.

关键词: 灰色预测模型; 分数阶多项式; 时间幂次项; FPDGM(1, 1, N) 模型

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0080

引用格式: 许泽东, 党耀国, 杨德岭. 含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3578-3584.

Discrete grey forecasting model with fractional order polynomial and its application

XU Ze-dong^{1†}, DANG Yao-guo¹, YANG De-ling²

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. Department of Economic and Management, Xuchang Electric Vocational College, Xuchang 461002, China)

Abstract: In order to further improve the fitting prediction accuracy of the grey prediction model with time power term, the FPDGM(1, 1, N) model with grey action optimization is proposed by introducing the fractional order polynomial. The constructed model can generate a time response sequence closer to the general characteristics, so as to obtain a grey prediction model with higher fitting prediction accuracy. The modeling mechanism, parameter estimation and recursive time response formula of the model are studied, and the properties of the model under several special values of model parameters are discussed. The results show that the DGM(1, 1) model, the NDGM(1, 1) model and the DGM(1, 1, N) model are all special forms of the FPDGM(1, 1, N) model. Therefore, this model formally unifies the existing grey model with time power term and enlarges the application scope of grey prediction theory. Finally, experiments show that the proposed model has better fitting and prediction accuracy, which verifies the validity and applicability of the proposed model.

Keywords: grey forecasting model; fractional order polynomial; time power term; FPDGM(1, 1, N) model

0 引言

在研究社会系统、经济系统等抽象系统时, 往往会遇到随机干扰(即所谓“噪声”). 人们对“噪声”污染系统的研究大多基于概率统计方法. 但传统概率统计方法研究的是大量数据, 并要求有典型的统计规律, 对于数量少的数据处理效果并不理想. 如何基于

“小样本”“贫信息”数据完成系统分析、建模任务, 以此获得具有较高可信度的预测结果? 以“小样本”“贫信息”的数据建模、分析为特色的灰色系统理论恰逢其会, 它有着简便、易学、准确性和可行性高的特点, 因此应用领域十分宽广.

经济系统、生态系统、农业系统等均可视为广

收稿日期: 2022-01-11; 录用日期: 2022-09-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771119, 72001107); 国家自然科学基金青年项目(71901191); 教育部人文社会科学青年基金项目(19YJC630167); 江苏省自然科学基金青年项目(BK20190426).

责任编辑: 樊治平.

[†]通讯作者. E-mail: xzd361296@nuaa.edu.cn.

义的能量系统,而能量的积累与释放一般遵从指数规律,因此灰色预测理论的指数模型具有十分广泛的适用性,而其中的GM(1,1)模型是目前影响最大、应用最为广泛的指数预测模型^[1].由于该模型的参数估计值以差分方程为基础,预测函数由微分方程的解引申而来,从差分方程到微分方程存在跳跃性误差,因此即使原始数据序列完全满足齐次指数规律,GM(1,1)模型的模拟精度也可能不理想.研究者为了减少或消除GM(1,1)模型固有偏差,已从初始条件改进^[2]、背景值优化^[3]、灰导数优化^[4]等方面对GM(1,1)模型进行了深入研究.

然而,现实生活中具有近似齐次指数规律的序列仅是少数情况,随着灰色预测模型在各行各业中的推广应用,不同领域、不同特征数据对灰色模型提出了新的要求.因此,诸多学者从多个尺度对GM(1,1)模型进行拓展与改进,并取得了一系列研究成果.文献[5]从提高齐次指数序列的模拟精度出发,提出了DGM(1,1)模型;进一步地,在DGM(1,1)模型建模原理的基础上,通过在模型中引入一次项,构建了适用于近似非齐次指数序列的离散灰色模型,并称之为NDGM(1,1)模型^[6];文献[7-8]基于相同的目的,从预测函数式的结构入手,以GM(1,1)模型的灰色微分方程为演绎推理工具,构建了适合非齐次指数序列的NGM(1,1, k)模型;文献[9]在此基础上进一步提出了一个更通用的灰色NHGM(1,1, k)模型来拟合非齐次指数特征规律的原始序列.文献[10]针对具有近似部分指数特征并含时间幂次项的特征行为序列,构建出GM(1,1, t^α)新型灰色预测模型,研究了 α 的几种特殊取值情况下GM(1,1, t^α)模型的特性,并将其中的GM(1,1, t^2)模型应用于高速公路软土地基沉降预测;文献[11-12]在其基础上,分别解决了GM(1,1, t^α)模型的基本形式与白化方程最佳匹配和时间响应函数具体求解问题,为GM(1,1, t^α)模型的推广应用奠定了基础;文献[13]在GM(1,1)模型和等间隔GM(1,1, t^α)模型的基础上提出了非等间隔GM(1,1, t^α)幂次时间项模型,并给出了确定幂指数范围及其最终取值的方法;而文献[14-15]针对含时间幂次项特征和波动特征的数据序列,分别构建了含时间多项式的灰色GMP(1,1, N)和DGM(1,1, N)预测模型;文献[16-19]则运用不同的方法研究了GMP(1,1, N)和DGM(1,1, N)模型的多项式阶数 N 取值的判定准则.文献[20]则借鉴离散灰色模型的思想,构建了一种能够同时描述系统指数型和幂函数型变化规律的离散灰色幂模型.

上述模型均可看作是对具有部分指数并含时间

幂次项的时间序列进行研究,由于此类特征序列在实际应用中广泛存在,关于该方面的研究成果相当丰富,这些研究极大地推动了灰色系统理论的发展和完善.通过整理已有研究成果可知,现有模型建模基础大多是假设原始数据满足一定的增长规律,然而由于随机因素的干扰,这一假设在实际应用中很难验证,极大地影响了此类模型的应用.同时,随着灰色模型在各行各业的推广应用,根据不同数据特征构建的模型形式多种多样,使得模型形式之间存在交叉.这不禁让我们困惑,对于一个实际问题,可供选择的模型很多,但如何从这些模型中选择合适的模型?构建一个形式灵活、具有统一性的一般通式灰色模型具有重要的意义,可以有效地解决模型选择难的问题.基于此,本文尝试分析现有的含时间幂次项灰色模型的基本形式,通过引入分数阶多项式对上述模型结构进行通式表达,进而构建一种结构自动改进的含分数阶 γ -多项式的灰色预测模型FPDGM(1,1, N),从而实现现有模型基本形式的统一,使得模型的精度和适应性得到极大提高,进一步拓展灰度模型的适用范围.案例分析结果表明了本文所提出方法的有效性和可行性.

1 含分数阶 γ -多项式的离散灰色模型构建

对于现有的含时间幂次项灰色模型,人们已提出了大量的连续或离散的表达式.为了直观分析,将相关研究成果中模型的基本形式、白化方程进行归纳总结,如表1所示.

由表1可见,上述模型的基本形式均可用 $x^{(1)}(k) = ax^{(1)}(k-1) + b_0 + b_1t^{c_1} + \dots + b_Nt^{c_N}$ ($c_1 < c_2 < \dots < c_N$)的统一形式表达,它们之间的不同仅在于灰作用量的结构.而灰作用量的结构决定了模型时间响应式函数的结构和形式,含有不同指数变化的幂函数组合形式的灰作用量能够较好地反映和拟合由多种不同运动叠加而成的更一般化序列变化规律,这样构造的模型优于单一变化幂函数和结构固定的多项式结构灰色模型.因此,本文在现有研究基础上,针对具有部分指数特征并含时间幂次项的特征行为序列,基于灰色预测建模思想构建一种含分数阶多项式的灰色预测模型,并分析其与其他灰色预测模型的联系,以期拓展灰色系统理论体系和应用范围.

考虑到灰色模型适合“小样本”建模及对于连续时间响应式进行预测产生的跳跃性误差,本文提出一种最简单的含分数阶 γ -多项式的离散灰色模型FPDGM(1,1, N).

表1 典型的含时间幂次项灰色预测模型总结

模型出处	英文缩写	基本形式	白化方程
文献[1]	GM(1,1)	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$
文献[5]	DGM(1,1)	$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2$	无
文献[9]	NHGM(1,1,k)	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(2k-1)b + c$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + c$
文献[6]	NDGM(1,1)	$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2 k + \beta_3$	无
文献[10]	GM(1,1,t ^α)	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\alpha + c$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt^\alpha + c$
文献[20]	DPGM	$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2 k^\gamma + \beta_3$	无
文献[14]	GMP(1,1,N)	$x^{(0)}(k) + \alpha z^{(1)}(k) = \sum_{i=0}^N \frac{k^{i+1} - (k-1)^{i+1}}{i+1} \beta_i$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + \alpha x^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^N \beta_i t^i$
文献[15]	DGM(1,1,N)	$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \sum_{i=2}^{m+2} \beta_i k^{m+2-i}$	无

设原始序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 称 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

定义1 若 $X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 如上所述, 则称

$$x^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + \beta_0 + \beta_1 k^\gamma + \dots + \beta_N k^{N\gamma} \quad (2)$$

为含分数阶 γ -多项式的离散灰色 GM(1,1,N) 模型, 记作 FPDGM(1,1,N) 模型. 一般地, $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, $N \in \{0, 1, 2, 3\}$.

定理1 若 $X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 如上所述, 并记

$$B = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 & 2^\gamma & \dots & 2^{N\gamma} \\ x^{(1)}(2) & 1 & 3^\gamma & \dots & 3^{N\gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 & n^\gamma & \dots & n^{N\gamma} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix},$$

且 $n \geq N+4$, 则参数 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)^T$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\kappa} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (3)$$

证明 将 $k = 2, 3, \dots, n$ 和序列 $X^{(0)}$ 代入式(2)得方程组

$$\begin{cases} x^{(1)}(2) = \alpha x^{(1)}(1) + \beta_0 + 2^\gamma \beta_1 + \dots + 2^{N\gamma} \beta_N, \\ x^{(1)}(3) = \alpha x^{(1)}(2) + \beta_0 + 3^\gamma \beta_1 + \dots + 3^{N\gamma} \beta_N, \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) = \alpha x^{(1)}(n-1) + \beta_0 + n^\gamma \beta_1 + \dots + n^{N\gamma} \beta_N. \end{cases} \quad (4)$$

式(4)可记作矩阵形式

$$Y = B\kappa. \quad (5)$$

由 $n \geq N+4$ 可知, 式(4)为超定方程, 不存在精确解. 对于 $\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ 的一组估计值以 $\alpha x^{(1)}(k-$

$1) + \beta_0 + \beta_1 k^\gamma + \dots + \beta_N k^{N\gamma}$ 代替左边的 $x^{(1)}(k)$, $k = 2, 3, \dots, n$, 可得误差向量 $\varepsilon = (\varepsilon(2), \varepsilon(3), \dots, \varepsilon(n))^T$, 有

$$\varepsilon = Y - B\hat{\kappa}, \quad (6)$$

则参数 κ 的最小二乘估计为

$$\hat{\kappa} = \arg \min_{\kappa} \psi = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B\kappa)^T (Y - B\kappa).$$

由极值存在条件可知

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = 2B^T B\kappa - 2B^T Y = 0, \quad (7)$$

即估计参数 $\hat{\kappa}$ 满足正则方程

$$B^T B\hat{\kappa} = B^T Y, \quad (8)$$

解得 $\hat{\kappa} = (B^T B)^{-1} B^T Y$. \square

定理2 在给定的初始条件 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$ 下, FPDGM(1,1,N) 模型的递推公式为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \\ \hat{\alpha} x^{(1)}(k-1) + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 k^\gamma + \dots + \hat{\beta}_N k^{N\gamma}, \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \\ k = 2, 3, \dots, n+p, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $p \in N^+$ 为预测步长.

证明 将估计参数 $\hat{\kappa}$ 代入式(2), 得序列递推拟合预测值

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \hat{\alpha} x^{(1)}(k-1) + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 k^\gamma + \dots + \hat{\beta}_N k^{N\gamma}, \quad k = 2, 3, \dots, n+p. \quad (10)$$

在初始条件 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$ 下, 结合一阶累减还原算子

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1), \quad k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n+p. \end{cases} \quad (11)$$

可证得式(9)成立. \square

推论1 依据参数 N 和 γ 的取值,有如下结论:

1) 当 $N = 0$ 时,FPDGM(1, 1, N) 模型退化为 DGM(1, 1) 模型^[5], 此时模型方程为

$$x^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + \beta_0,$$

则参数 $\kappa = (\alpha, \beta_0)^T$ 的最小二乘估计为 $\kappa = (\alpha, \beta_0)^T = (B_1^T B_1)^{-1} B_1^T Y$. 其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & x^{(1)}(2) & \dots & x^{(1)}(n-1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T.$$

2) 当 $N = 1$ 时,FPDGM(1, 1, N) 模型退化为离散灰色幂模型 DPGM^[20], 此时模型方程为

$$x^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + \beta_0 + \beta_1 k^\gamma,$$

则参数 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1)^T$ 的最小二乘估计为 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1)^T = (B_2^T B_2)^{-1} B_2^T Y$. 其中

$$B_2 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & x^{(1)}(2) & \dots & x^{(1)}(n-1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^\gamma & 3^\gamma & \dots & n^\gamma \end{bmatrix}^T.$$

特别地,与此同时若 $\gamma = 1$ 时,FPDGM(1, 1, N) 模型退化为 NDGM(1, 1) 模型^[6], 此时模型方程为

$$x^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + \beta_0 + \beta_1 k,$$

则参数 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1)^T$ 的最小二乘估计为 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1)^T = (B_3^T B_3)^{-1} B_3^T Y$. 其中

$$B_3 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & x^{(1)}(2) & \dots & x^{(1)}(n-1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}^T$$

3) 当 $\gamma = 1$ 时,FPDGM(1, 1, N) 模型退化为 DGM(1, 1, N) 模型^[15], 此时模型方程为

$$x^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + \beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_N k^N,$$

则参数 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)^T$ 的最小二乘估计为 $\kappa = (\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)^T = (B_4^T B_4)^{-1} B_4^T Y$. 其中

$$B_4 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 & 2 & \dots & 2^N \\ x^{(1)}(2) & 1 & 3 & \dots & 3^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 & n & \dots & n^N \end{bmatrix}_{(n-1) \times (N+2)}.$$

注1 将参数取值分别代入式(2), 类似定理1, 可证得结论显然成立.

推论1表明, DGM(1, 1)、NDGM(1, 1)、DGM(1, 1, N) 和 DPGM 模型均是 FPDGM(1, 1, N) 模型的特殊形式, 并且其中 DGM(1, 1) 模型和 NDGM(1, 1) 模型是 DGMP(1, 1, N) 模型的特例, 而 DPGM 模型和 DGMP(1, 1, N) 模型由于参数 N 和 γ 取值的不同, 使得模型之间存在一定的交叉和互补. 由此可见,

FPDGM(1, 1, N) 模型形式更加灵活, 具有更广的适用性.

在实际应用中, 参数 N 和 γ 取值直接影响 FPDGM(1, 1, N) 模型的精度, 其最符合原始数据规律特征的参数 N 和 γ 的值, 可以以模型平均相对误差最小化为优化目标来求得, 其中参数 N 通过遍历取值, γ 的取值运用智能算法进行寻优.

2 算例应用

根据2020年BP世界能源统计年鉴中国核能消费总量数据, 选取2001~2019年中国核能消费总量数据作为研究对象, 进行建模分析并验证本文方法的可行性. 图1描绘出中国2001~2019年核能的年消费量, 国际上能源需求数据一般是年度数据, 具有历史统计数据较少、呈逐年指数上升趋势且具有从缓慢变化到加速变化的特征, 同时由于社会经济中的不稳定变化因素, 又伴有不规则的振荡现象, 因此选用含时间幂次项灰色模型来预测能源的需求比较合适.

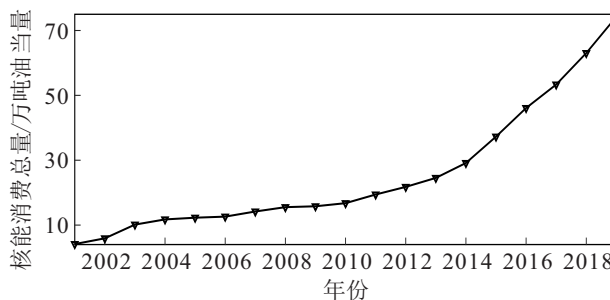


图1 2001~2019年中国核能消费总量时间序列

选用2001~2017年的消费数据作为原始序列进行建模, 记为 $X^{(0)}$, 后面两年数据为测试集, 检验模型预测效果, 分别利用 DGM(1, 1) 模型、NDGM(1, 1) 模型、DGM(1, 1, 2) 模型、DPGM 模型和本文构建的 FPDGM(1, 1, N) 模型进行拟合预测, 依次得到各模型的递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 1.147\hat{x}^{(1)}(k-1) + 5.206,$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 1.267\hat{x}^{(1)}(k-1) - 2.318k + 13.722,$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 1.374\hat{x}^{(1)}(k-1) - 0.115k^2 - 2.090k + 12.377,$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 1.077\hat{x}^{(1)}(k-1) + 7.131 \times 10^{-7}k^{6.1005} + 8.806,$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 1.298\hat{x}^{(1)}(k-1) - 2.430 \times 10^6 k^{0.0046} + 4.871 \times 10^6 k^{0.0023} - 2.442 \times 10^6.$$

通过 $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$ 分别计算各模型还原模拟值, 得到这5个模型的建模结果如表2和表3所示. 其中, DPGM 模型和 FPDGM(1, 1, 2) 模型

表2 5种模型的核能消费量拟合预测值结果

年份	实际值	DGM(1, 1)	NDGM(1, 1)	DGM(1, 1, 2)	DPGM	FPDGM(1, 1, 2)
2001	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15
2002	5.92	5.82	10.2	9.29	9.13	6.19
2003	10.15	6.67	10.6	10.1	9.83	9.82
2004	11.75	7.65	11.12	10.99	10.6	11.44
2005	12.28	8.77	11.77	11.98	11.43	12.36
2006	12.61	10.06	12.6	13.11	12.34	13.06
2007	14.19	11.54	13.65	14.43	13.36	13.75
2008	15.53	13.23	14.99	16.02	14.52	14.58
2009	15.8	15.17	16.67	17.97	15.89	15.66
2010	16.76	17.4	18.81	20.42	17.54	17.1
2011	19.43	19.96	21.53	23.57	19.61	19.03
2012	21.78	22.89	24.96	27.65	22.25	21.6
2013	24.55	26.25	29.32	33.04	25.69	25.02
2014	29.15	30.1	34.84	40.22	30.23	29.53
2015	37.28	34.52	41.83	49.85	36.23	35.46
2016	46.1	39.59	50.7	62.86	44.18	43.24
2017	53.34	45.4	61.94	80.51	54.68	53.4
2018	63.05	52.07	76.18	104.53	68.46	66.68
2019	74.25	59.72	94.23	137.32	86.43	83.97

表3 5种模型拟合预测误差结果对比

年份	DGM(1, 1)	NDGM(1, 1)	DGM(1, 1, 2)	DPGM	FPDGM(1, 1, 2)
2001	—	—	—	—	—
2002	1.77	72.22	56.92	54.18	4.54
2003	34.3	4.46	0.47	3.11	3.26
2004	34.91	5.37	6.48	9.8	2.64
2005	28.57	4.12	2.46	6.93	0.68
2006	20.23	0.05	3.94	2.14	3.56
2007	18.7	3.78	1.69	5.87	3.08
2008	14.81	3.5	3.14	6.51	6.1
2009	3.97	5.54	13.73	0.54	0.88
2010	3.83	12.26	21.86	4.66	2.03
2011	2.71	10.79	21.28	0.92	2.07
2012	5.08	14.62	26.97	2.17	0.82
2013	6.91	19.42	34.59	4.66	1.9
2014	3.26	19.52	37.97	3.7	1.3
2015	7.4	12.22	33.72	2.81	4.88
2016	14.12	9.98	36.36	4.16	6.21
2017	14.88	16.12	50.93	2.51	0.12
2018	17.41	20.82	65.79	8.57	5.75
2019	19.57	26.9	84.94	16.4	13.09
拟合误差	13.47	13.37	22.03	7.17	2.70
预测误差	18.49	23.86	75.36	12.49	9.42

根据粒子群优化算法得到的模型幂指数 γ 分别为6.1005和0.0023.

由表3中关于核能消费量的16个样本点的模拟结果对比可以看出:DGM(1, 1)模型各样本点的相对误差范围为1.77%~34.91%,其中有5个样本点的误差接近或超过20%,占总体数量超30%;NDGM(1, 1)模型对应样本点误差范围为0.05%~72.22%,其中有3个样本点的误差接近或超过20%;DGM(1, 1, 2)模型各样本点的误差范围为0.47%~56.92%,其中有9个点的误差超过20%,占总体数量已超过一半,使得模型的拟合效果最不理想;DPGM模型各样本点误差范围为0.48%~54.18%,除了第2个样

本点误差超过20%,其他所有点的误差均控制在10%以内;FPDGM(1, 1, 2)模型各样本点误差范围为0.12%~6.21%,误差范围相较其他模型显著缩小,模型实现了高精度拟合.而观察各个模型的预测结果可知,FPDGM(1, 1, 2)模型在预测方面同样具有明显的优势,单步预测和两步预测结果相比其他模型也是最好,预测平均相对误差控制在10%以内,模型实现了高精度的短期预测.

图2更直观地给出了上述5种模型的模拟预测曲线与实测曲线的建模结果比较,对比FPDGM(1, 1, 2)模型与其他4个模型产生不同预测效果的原因,由于DGM(1, 1)模型对纯指数序列模拟,整体拟合和

预测值近似线性、低指数增长,使得拟合预测结果整体偏低。而NDGM(1,1)模型和DGM(1,1,2)模型效果相当,由于模型右端多项式结构的性质,模型表现为先匀速增长到加速增长趋势,使得模型拟合值的后段均明显高于真实值。DPGM模型通过自动优化模型右端幂函数的指数,适应不同数据序列的发展规律,使得模型的拟合精度较DGM(1,1)、NDGM(1,1)

和DGM(1,1,2)模型有较大提升,但由于模型结构单一使得模型无法较好识别数据序列的波动变化特征,这点可以从模型第2个样本点的拟合值的相对误差可以看出。FPDGM(1,1,2)模型通过自动优化上述模型的结构,能同时较好地识别序列的波动变化和加速变化特征,使得模型的模拟值和预测值的相对误差最小且稳定。

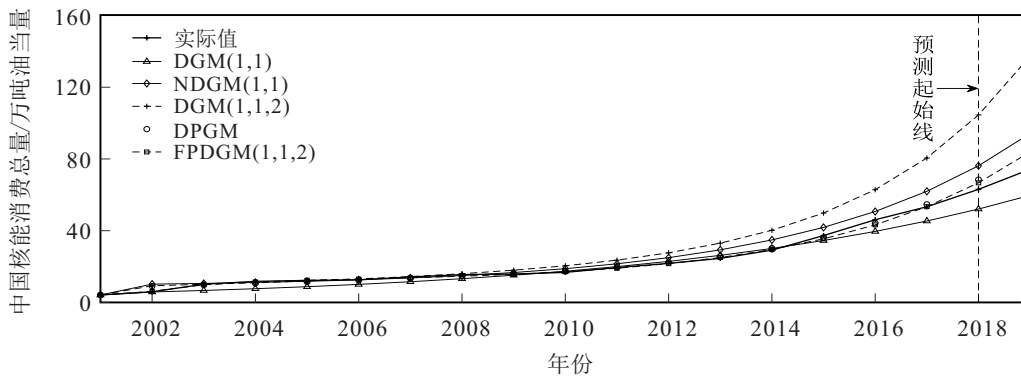


图2 5种含时间幂次项的灰色模型模拟和预测结果对比

从这个例子可以看出,按照本文方法确定的FPDGM(1,1,2)模型与原始序列特征最符合,使得模型无论是拟合还是预测均是最理想的模型。因此,可选择FPDGM(1,1,2)模型作为最终模型,对我国未来核能消费总量进行预测。考虑到灰色模型不适宜中长期预测以及FPDGM(1,1,2)模型建模结果一步预测误差较小,因此借鉴新信息灰色建模思想,不断利用新数据建立新信息FPDGM(1,1,2)模型,分别预测下一年的数据。对我国2020~2025年的核能消费总量进行了建模预测,结果见表4。由表4可知,中国核能消费总量在未来将继续保持稳步上升的发展态势,预计到2025年总量将达到160万吨油当量,这一发展态势与我国坚持有序地发展核能目标相一致。

表4 2020~2025年我国核能消费总量预测值

年份	2020	2021	2022	2023	2024	2025
预测值	91.22	105.65	120.39	134.45	146.02	160.81

能源可持续发展是关系到我国国民经济社会发展全局的重要问题。作为世界上最大的以煤电为基础的电力系统国家,中国向世界庄严承诺要在2060年前实现碳中和目标,这对我国构建“清洁低碳、安全高效的能源体系”提出了更高要求,使得我国在2030年前实现碳达峰成为迫切的现实问题。面对国内资源环境制约日趋激化和应对气候变化减少CO₂、SO₂等气体排放的双重挑战,同时考虑到后续水能、风能和太阳能等可再生能源开发的资源限制和生态环境制约,及其大规模发展带来的新挑战,核能具有

碳排放量小、出力稳定、边际成本低等特征,是我国能源供给侧尤其是新增非化石能源中最有望兼顾“低碳、经济、安全”矛盾三角的能源形式,对我国突破资源环境的瓶颈制约,保障能源安全,减少CO₂排放,实现绿色低碳发展具有不可替代的作用。当前,我国核电装机容量及发电量比例较小,应该有效替代一部分煤电承担的基荷电力,核能应该具有超越当前预期的发展空间。

3 结论

随着灰色预测理论的发展,灰色模型的种类将会越来越多,然而各模型的适用范围界限不明必然会对模型的选择和推广应用造成困扰。因此,构建一个形式灵活、具有统一性的一般通式灰色模型具有重要的意义。本文从一类重要的含时间幂次项的单变量灰色模型的通式表达出发,构建了一种结构自动改进的含分数阶 γ -多项式灰色预测模型FPDGM(1,1,N),并对模型的建模过程、模型的参数估计和模型的递推时间响应式进行了研究,针对参数N和 γ 的几种特殊取值下FPDGM(1,1,N)模型的性质进行了讨论,发现已有的DGM(1,1)模型、NDGM(1,1)模型、DPGM模型和DGM(1,1,N)模型均是FPDGM(1,1,N)模型的特殊形式。实例分析结果表明,本文方法可以较好地识别原始数据序列的波动和加速变化特征,识别得到的模型不仅拟合效果好,而且预测效果也较优。而由DPGM模型和FPDGM(1,1,N)模型的建模结果可知,模型的拟合效果的极大优化并没有同

步带来预测精度的显著提高,模型依然存在泛化能力弱等问题,说明智能优化算法对小样本建模学习力不足.因此,根据原始数据内蕴的演化规律,合理确定模型幂指数的取值,是一个值得研究的问题.

参考文献(References)

- [1] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 第9版. 北京: 科学出版社, 2021.
(Liu S F. Grey system theory and its application[M]. The 9th edition. Beijing: Science Press, 2021.)
- [2] Zhu X Y, Dang Y G, Ding S. Using a self-adaptive grey fractional weighted model to forecast Jiangsu's electricity consumption in China[J]. Energy, 2020, 190: 116417.
- [3] Cao Y, Yin K D, Li X M. Prediction of direct economic loss caused by marine disasters based on the improved GM(1,1) model[J]. The Journal of Grey System, 2020, 32(1): 133-146.
- [4] Li B, Wei Y. Optimized grey derivative of GM(1, 1)[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(2): 100-105.
- [5] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [6] Xie N M, Liu S F, Yang Y J, et al. On novel grey forecasting model based on non-homogeneous index sequence[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5059-5068.
- [7] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [8] Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. A novel grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4399-4406.
- [9] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 689-694.)
- [10] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色 GM(1, 1, $t^{[\alpha]}$) 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1, 1, $t^{[\alpha]}$) model with time power and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [11] 吴紫恒, 吴仲城, 李芳, 等. 改进的含时间幂次项灰色模型及建模机理[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 637-641.
(Wu Z H, Wu Z C, Li F, et al. Improved grey forecasting model with time power and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 637-641.)
- [12] Ding S, Li R J, Wu S, et al. Application of a novel structure-adaptative grey model with adjustable time power item for nuclear energy consumption forecasting[J]. Applied Energy, 2021, 298: 117114.
- [13] 郭欢, 肖新平, Jeffrey Forrest. 非等间隔 GM(1, 1, $t^{[\alpha]}$) 幂次时间项模型及其应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(8): 1514-1518.
(Guo H, Xiao X P, Forrest J. Non-equidistance GM(1, 1, $t^{[\alpha]}$) model with time power and its application[J]. Control and Decision, 2015, 30(8): 1514-1518.)
- [14] 罗党, 韦保磊. 灰色 GMP(1, 1, N) 模型及其在冰凌灾害风险预测中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(11): 2929-2937.
(Luo D, Wei B L. Grey GMP(1, 1, N) model and its application in risk prediction of ice-jam disaster[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(11): 2929-2937.)
- [15] Xie N M, Zhu C, Liu S F, et al. On discrete grey system forecasting model corresponding with polynomial time-vary sequence[J]. Journal of Grey System, 2013, 25(4): 1-18.
- [16] Luo D, Wei B L. Grey forecasting model with polynomial term and its optimization[J]. Journal of Grey System, 2017, 29(3): 58-69.
- [17] Wei B L, Xie N M, Hu A Q. Optimal solution for novel grey polynomial prediction model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 62: 717-727.
- [18] Wei B L, Xie N M, Yang Y J. Data-based structure selection for unified discrete grey prediction model[J]. Expert Systems with Applications, 2019, 136: 264-275.
- [19] 罗党, 韦保磊. 一类离散灰色预测模型的统一处理方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 451-462.
(Luo D, Wei B L. A unified treatment approach for a class of discrete grey forecasting models and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(2): 451-462.)
- [20] 杨保华, 赵金帅. 优化离散灰色幂模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2016, 24(2): 162-168.
(Yang B H, Zhao J S. Optimized discrete grey power model and its application[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(2): 162-168.)

作者简介

许泽东(1989—), 男, 博士生, 从事灰色系统理论的研究, E-mail: xzd361296@nuaa.edu.cn;

党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究, E-mail: iamdangyg@163.com;

杨德岭(1963—), 男, 教授, 博士, 从事高等教育管理、风险评价等研究, E-mail: zzb8913@163.com.