

# 四绳驱动并联机器人工作空间与刚度的建模、分析及优化方法

陈启瀚<sup>1</sup>, 郭永华<sup>1</sup>, 韩瑜<sup>1,2</sup>, 刘万泉<sup>1</sup>, 彭键清<sup>1,2†</sup>

(1. 中山大学智能工程学院, 广东深圳 518107; 2. 广东省消防科学与智能应急技术重点实验室, 广州 510006)

**摘要:** 相比于刚性连杆并联机器人, 绳驱并联机器人 (cable-driven parallel robot, CDPR) 存在结构简单轻盈、工作空间大、响应速度快及成本低廉等优点, 非常适合极端空间环境。然而, 由于电机、绳索和末端执行器之间存在复杂的耦合关系, CDPR 工作空间和刚度的求解具有挑战性。基于此, 本文提出了一种四绳驱动并联机器人工作空间与刚度的建模、分析及优化方法, 并用于指导 CDPR 动锚点位置设计决策。首先, 建立了考虑滑轮模型的 CDPR 运动学模型, 并通过优化方法对 CDPR “电机-绳索-末端” 多层运动学进行了求解。然后, 建立了 CDPR 的工作空间, 并给出了工作空间优化的求解方法。进一步地, 推导了 CDPR 的刚度模型, 并给出了刚度优化的求解方法。最后, 根据优化后的工作空间与刚度模型, 对 CDPR 的动平台锚点位置设计决策进行优化, 数值仿真结果和实验证明了方法的正确性与有效性。

**关键词:** 绳驱并联机器人; 工作空间; 刚度; 蒙特卡洛方法; 粒子群算法; 设计决策优化

中图分类号: TP24

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0057

**引用格式:** 陈启瀚, 郭永华, 韩瑜, 等. 四绳驱动并联机器人工作空间与刚度的建模、分析及优化方法 [J]. 控制与决策.

## Modeling, analysis and optimization method of workspace and stiffness of 4-cable-driven parallel robot

CHEN Qi-han<sup>1</sup>, GUO Yong-hua<sup>1</sup>, HAN Yu<sup>1</sup>, LIU Wan-quan<sup>1</sup>, PENG Jian-Qing<sup>1,2</sup>

(1. School of Intelligent Systems Engineering, Sun Yat-Sen University, Shenzhen 518107, China)

**Abstract:** Compared with the rigid-link parallel robot, the cable-driven parallel robot (CDPR) has the advantages of a simple and lightweight structure, large working space, fast response speed, and low cost, which is very suitable for extreme space environments. However, due to the complex coupling relationship between the motor, the cable, and the end effector, the solution of the CDPR workspace and stiffness is challenging. In this paper, a modeling, analysis, and optimization method of workspace and stiffness of four-cable-driven parallel robots is proposed, which is used to guide the design decision of CDPR dynamic anchor position. Firstly, the CDPR kinematics model considering the pulley model is established, and the multi-layer kinematics is solved by the optimization method. Then, the workspace of CDPR is established, and the solution method of workspace optimization is given. Furthermore, the stiffness model of CDPR is derived, and the solution method of stiffness optimization is given. Finally, according to the optimized workspace and stiffness model, the anchor position design decision of the moving platform of CDPR is optimized. The numerical simulation results and experiments prove the correctness and effectiveness of the method.

**Keywords:** cable-driven parallel robot; workspace; stiffness; Monte Carlo method; particle swarm optimization algorithm; design decision optimization

## 0 引言

并联机器人主要由固定基座与移动平台组成, 并且移动平台通过一组并联运动链连接到固定基座上。绳驱并联机器人 (CDPR) 的末端执行器由多条柔性绳索悬挂<sup>[1]</sup>, 它将传统并联机器人上的刚性连

杆用柔顺的绳索替代, 这能够实现末端运动的敏捷性、灵巧性以及适应性<sup>[2]</sup>。与传统的工业机器人相比, 虽然同样具有固定的绳索布局, 但其模块化程度更高, 布局的灵活性更强。特别是, 在大空间无法安装机械臂的场合, 具有绳索灵活安装和布局的 CDPR 成

收稿日期: 2024-01-12; 录用日期: 2024-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金 (62103454), 广东省基础与应用基础研究基金 (2024A1515010540), 深圳市科技计划资助 (JCYJ20220530150006014).

†通讯作者. E-mail: pengjq7@mail.sysu.edu.cn.

为了首选。因此,CDPR在港口运输<sup>[3]</sup>、建筑构造<sup>[4]</sup>、航空航天<sup>[5-6]</sup>以及工业3D打印<sup>[7-8]</sup>等领域具有广阔的应用前景。

坐标系建立与运动学建模与分析是CDPR工作空间分析的基础<sup>[9]</sup>。传统的CDPR的运动学分析中,会将固定锚点座与绳索的连接处等效成质点,以简化运动学分析<sup>[10]</sup>。然而在实际的样机中,固定锚点与绳索之间往往通过滑轮进行连接,从而减少摩擦。随着动平台位姿的变化,绳索在滑轮上的包络弧长会发生变化。而质点等效模型没法对该部分长度变化进行分析。

CDPR的工作空间描述末端动平台所能到达的位姿集合,对机构设计、轨迹规划及控制非常重要。在机器人尺寸相同的情况下,CDPR实际的运动范围会受有效载荷、驱动、外力及绳索自身张力等多种因素的影响<sup>[11-12]</sup>。CDPR的工作空间中,每一个姿态点必须满足几何、力平衡和结构刚度的约束条件,还要满足力、冲击力矩、噪声及发动机功率等边界条件。Pusey等人<sup>[13]</sup>分析了CDPR的静平衡工作空间,并进行工作空间最大化的优化设计。Bosscher等人<sup>[14]</sup>把末端执行器等效为质点研究欠约束绳牵引并联机器人,利用矢量理论求解工作空间的边界。然而,上述方法都是忽略末端执行器尺寸的情况下进行的推算。Pham等人<sup>[15]</sup>分析了张力约束等性能指标,根据CDPR的平面构型进行工作空间的建模。Diao等人<sup>[16]</sup>提出了一种基于数值迭代的全约束CDPR力旋量封闭工作空间求解方法。

刚度是评估CDPR性能的重要指标。机器人刚度在整个工作空间的分布特点是轨迹规划和控制方案设计的重要参考指标。CDPR的静刚度主要影响其定位精度,而动刚度主要影响系统振动强弱和沉降时间<sup>[17]</sup>。常用的静力学分析方法有虚功原理、有限元法、螺旋理论、矢量法以及虚位移法等。Li等人<sup>[18]</sup>利用微分迭代方法和虚功原理在广义力空间中推导出了3-UPU并联机构末端广义的输入/输出力关系,并利用虚功原理建立了少自由度并联机构输入和末端广义力间的静力学映射关系。Moradi等人<sup>[19]</sup>将方向刚度、刚度条件数等指标引入完整形式刚度矩阵,绘制了一种平面构型的刚度分布图。袁晗等人<sup>[20]</sup>考虑了CDPR绳索的质量和弹性,采用末端执行器姿态误差的变化来评估静刚度,并通过识别固有频率来分析动刚度。Amare等人<sup>[21]</sup>研究了CDPRs的三维动、静刚度,并在此基础上对绳索张力和长度进行了优化。

本文推导了详细的四绳驱动并联机器人模型,在运动学分析过程中对滑轮模型加以考虑,以提高运动分析精度。并更详细地分析了不同几何参数对工作空间和刚度的影响。这些分析功能为并联机器人动平台锚点设计决策提供理论依据。本文的主要贡献在于1)提出了一种考虑滑轮模型的CDPR运动学求解方法,解决了CDPR“电机-绳索-末端”多层运动学精确求解问题;2)建立了CDPR的工作空间,并给出了工作空间优化的求解方法;3)推导了CDPR的刚度模型,并给出了刚度优化的求解方法;4)基于工作空间与刚度模型优化机器人动平台的锚点位置。

## 1 CDPR的运动学建模

### 1.1 CDPR坐标系的建立

由于CDPR动平台所受重力垂直向下,驱动绳索对动平台施加朝上的拉力更容易使动平台达到静力学平衡状态。如图1所示,机器人主体框架为一个长方体( $V_1 \sim V_8$ ),框架上方四个顶点处安装有4个带有滑轮组的锚点座。为了建模的方便,绳索与机架的固定连接点设定为 $B_1 \sim B_4$ ,实际计算时将忽略框架的体积。将框架末端的运动平台与绳索的连接点设定为 $A_1 \sim A_4$ 。机架( $V_1V_2$ )边的中心点 $O_w(x_w, y_w, z_w)$ 为全局机械坐标系 $\{W\}$ 的原点, $y_w$ 轴正方向与 $O_wV_2$ 相同, $z_w$ 轴正方向垂直于 $V_1V_2V_3V_4$ 平面向上, $x_w$ 轴方向根据右手定则确定;末端运动平台的几何质量中心为动坐标系 $\{M\}$ 的原点 $O_p(x_p, y_p, z_p)$ , $y_p$ 轴正方向与 $A_4A_3$ 相同, $z_p$ 轴正方向垂直于 $A_1A_2A_3A_4$ 平面向上, $x_p$ 轴方向根据右手定则确定。框架竖向的四条边 $V_1V_5 \sim V_4V_8$ 均垂直于地面。初始状态,动平台位于工作空间的中心点处,动坐标系下的三个坐标轴分别与全局坐标系的三个坐标轴平行。

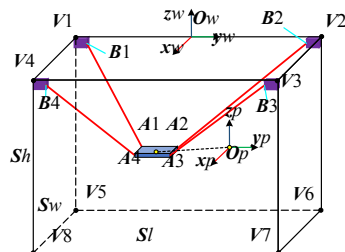


图1 四绳驱动的并联机器人坐标示意图

### 1.2 考虑滑轮的绳索模型

如图2(a)所示,绳索的长度可分解为四个部分:缠绕在绞盘内滚筒的部分;自绞盘引出后到固定锚点的部分;固定锚点所在滑轮上,入绳点与出绳点之间的圆弧部分;出绳点到动锚点座的连接部分。

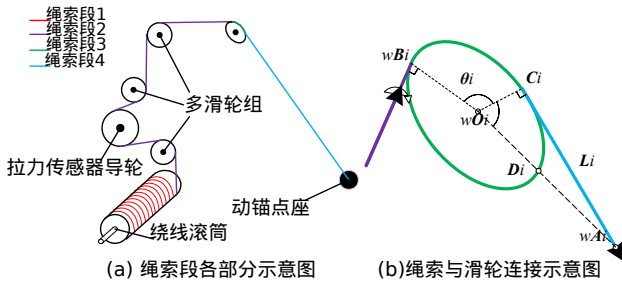


图2 绳索滑轮示意图

CDPR 可以通过电机的电流控制实现预紧力的维持, 绳索可以等效为无重力绳。可以认为绳段上各点具有相同的速度、加速度和拉力。另外, 运动中, 绳索段 2 经过的滑轮组结构均不发生改变, 无重力绳不会发生松弛现象, 认为该部分绳索长度不变。因此, 本文将绳索段 3 和 4 作为主要的研究对象。如图 2(b) 所示, 绳长部分主要由绳索段 3 和 4 组成, 其中绳索段 3 为弧线段, 绳索段 4 为直线段。由于转动滑轮在绳索力的作用下产生转动运动, 使得导绳入绳向量、滑轮出绳向量始终位于滑轮平面上。为计算方便, 将绳索经导绳入绳滑轮引出后, 与转动滑轮相切, 并且转动滑轮的转动轴与该绳索段重合, 使该绳索段与铝合金机架平行。

假设导绳入绳向量  $v_i$ , 固定锚点座相对于世界坐标系的坐标  ${}^w B_i$ , 动锚点座相对于世界坐标系的坐标  ${}^w A_i$ , 滑轮半径  $R_p$ 。导绳入绳向量  $v_i$  与全局坐标系的  $x$  轴或  $y$  轴平行。这时动锚点座  ${}^w A_i$  到导绳入绳向量的水平距离  $d_i$  等于固定锚点座  ${}^w B_i$  与动锚点座  ${}^w A_i$  沿  $y$  轴或  $x$  轴的距离。假设  $h_i$  表示动锚点座  ${}^w A_i$  到固定锚点座  ${}^w B_i$  所在水平面  $u_{zi}$  之间的距离。则可以按照以下算法求解绳索长度与绳索段 4 的向量:

step 1: 计算滑轮平面与导绳水平面的二面角  $\psi_i = \arcsin(d_i/h_i)$ ;

step 2: 根据  $\psi_i$  和滑轮半径  $R_p$  可以计算转动滑轮中心坐标  ${}^w O_i$ ;

step 3: 根据  ${}^w O_i D_i = R_p \cdot {}^w O_i A_i / \|{}^w O_i A_i\|_2$  计算  ${}^w O_i A_i$  与滑轮圆的交点  $D_i$ ;

step 4: 根据  $\angle COA_i = \arccos(R_p / \|{}^w O_i A_i\|_2)$  计算滑轮出绳向量与滑轮切点坐标  $C_i$ ;

step 5: 计算向量  ${}^w O_i C_i$  与  ${}^w O_i B_i$  的夹角  $\theta_i$ ;

step 6: 计算第  $i$  号绳索的长度  $l_i = \widehat{{}^w B_i C_i} + \|C_i {}^w A_i\|_2 = \theta_i \cdot R_p + \|{}^w A_i - C_i\|_2$  和绳索段 4 的方向向量  ${}^w L_i = {}^w A_i - C_i$ ;

### 1.3 CDPR 运动学模型

通过绳索长度的建模, 得到了绳长  $l_i$  与末端运动平台实时位姿  ${}^w P_m$  的关系。在实际的控制中, 绳索缠绕于滚筒上, 根据电机驱动绞盘中的滚筒转动可实现绳长的运动控制, 于是, 绳长  $l_i$  与滚筒转动角度  $\theta_i$  的关系可描述为:

$$l = R_w \cdot \theta \quad (1)$$

式中,  $\theta$  表示所有电机转动角度  $\theta_i$  的向量,  $R_w$  为绞盘模块绕线滚筒的半径。

锚点座位置、动平台位姿与滚筒转动角度之间的映射关系可由下式获得:

$$R_w \cdot \theta = \widehat{BC} + AC \quad (2)$$

根据式 (2), CDPR 的运动学方程可表示为:

$$f_i({}^m A_i, {}^w B_i, {}^w P_m, \theta_i, R_w, R_p) = 0 \quad (3)$$

CDPR 的逆运动学模型可写为:

$$l_i = f_i^{\text{inv}}({}^m A_i, {}^w B_i, {}^w P_m, \theta_i) \quad (4)$$

因为无重力绳索模型的直线部分中, 绳索拉力不会发生突变, 这时绳索各点的速度相同。假设动平台的运动速度为, 绳长变化速度到末端执行器运动速度的雅克比矩阵为, 那么 CDPR 速度级逆运动学方程可表示为:

$$\dot{l} = J_v \cdot \dot{P} \quad (5)$$

假设  ${}^w P_m^{(k)}$  为动平台位姿  ${}^w P_m$  第  $k$  次迭代的拟合值, 根据式 (4), 可以得到绳索长度拟合值  $l_i^{(k)}$ 。令实际的绳索长度为  ${}^r l_i$ , 那么实际绳索长度的优化函数为:

$$F_i({}^m A_i, {}^w B_i, {}^w P_m^{(k)}, {}^r l_i, R_p) = {}^r l_i - l_i^{(k)} \quad (6)$$

进一步地, CDPR 的正运动学优化方程可写为:

$$P_f = \arg \min_{{}^w P_m^{(k)} \in U_p} F({}^m A, {}^w B, {}^w P_m^{(k)}, {}^r l, R_p) \quad (7)$$

其中,  $P_f$  为迭代优化解,  $U_p$  为动平台可达工作空间的集合。最后, 通过牛顿迭代法可求解式 (7) 所示的最优化问题, 为下面的工作空间分析奠定基础。

## 2 CDPR 的工作空间求解

### 2.1 CDPR 的工作空间建模

工作空间是末端执行器在满足特定约束条件下能达范围, 受动平台的尺寸、结构及绳缆与动平台上的连接位置的影响。因此, 工作空间的分析可以优化 CDPR 的结构。理论可达工作空间表示滚筒绳索长度有界的情况下, 动平台所能到达的位姿点集合。用蒙特卡洛方法对框架内所允许的绳索长度生成  $N$  组随机绳长值, 将随机生成的绳长值组合代入

上节所得的正运动学方程,在绳长限制范围内搜索出符合正运动学约束的末端位姿离散点,则计算得到的位姿点 ${}^w P_m$ 的集合为绳长理论可达的工作空间集合。CDPR的理论可达工作空间的表达如下:

$$U_p := \{P_f\}$$

$$P_f = \arg \min \left( {}^m A, {}^w B, {}^w P_m^{(k)}, r_l, R_p \right), l < l^{\max} \quad (8)$$

本文CDPR的理论可达工作空间包含了整个样机的上层工作空间,但由于绳索拉力的限制,部分位姿点并不满足静力学平衡条件。CDPR的力封闭工作空间表示动平台能够满足静力平衡条件的位姿点集合,它可用来评估CDPR的性能。以动平台坐标系原点为分析对象,建立动平台的静力平衡方程为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{D_c} \mathbf{T}_i + \mathbf{G}_m = 0 \\ \sum_{i=1}^{D_c} \mathbf{M}_i = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$\mathbf{T}_i$ 为第*i*号绳索的张力向量, $\mathbf{G}_m$ 为动平台所受的重力, $\mathbf{M}_i$ 为第*i*号绳索施加给动平台的力矩。

考虑拉力约束,进一步地可描述为一个具有线性约束的二次规划问题,即:

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{T}_c^T \mathbf{I}_{D_c \times D_c} \mathbf{T}_c. \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{D_c} \mathbf{T}_i + \mathbf{G}_m = 0; \\ & \quad \quad \text{sum}_{i=1}^{D_c} \mathbf{M}_i = 0; \\ & \quad \quad T_{c,\min} < T_{ci} < T_{c,\max}; \end{aligned} \quad (10)$$

## 2.2 工作空间的优化求解

### 2.2.1 工作空间求解

通过判别式(10)是否存在数值解可以判断某一位姿点下CDPR能否满足静力学平衡条件。本文采用逐点法获取形状简单以及边界较为清晰的可达工作空间。对于力封闭工作空间,其形状难以预测。通过已知绳索长度求解动平台位姿不一定存在数值解,而使用蒙特卡洛法采样关节空间点效率低下,因此本文是直接理论可达工作空间中采样动平台的位姿点。

### 2.2.2 工作空间的优化求解

从上节工作空间的计算发现其与机器人正解模型和静力平衡方程有很大的关系,即影响工作空间主要为CDPR的结构参数 ${}^m A, {}^w B, R_p$ 、绳索绳长 $l$ 和动平台自身初始重力 $G_m$ 。由于本文假设绳索的弹性模量、绳索的横截面积以及框架的尺寸保持不变,机器人空载状态,则可以认为影响CDPR工作空间

的参数主要是动平台连接点位置参数 ${}^m A$ 。

根据位置参数的实际物理意义,可以将位置参数 ${}^m A$ 的变化量转化为动平台与绳索连接点 $A_1 A_2$ (动平台长边)及 $A_1 A_3$ (短边)的距离变化。由于考虑动平台的稳定性和对称性,认为同一边上的连接点距离作对称性变化。假设沿长边和短边运动学结构参数的变化量分别为 $\Delta M_l$ 和 $\Delta M_w$ ,则动锚点座坐标 ${}^w A_i$ 可描述为:

$${}^m A_i(\Delta M_l, \Delta M_w) = [x_{ai} - \Delta M_l, y_{ai} - \Delta M_w, z_{ai}]^T \quad (11)$$

在动平台上需满足 ${}^m A_i(\Delta M_l, \Delta M_w) > 0$ 。则绳长模型(4)可以改写为:

$$l_i = f_i^{\text{inv}}({}^m A_i, {}^w B_i, {}^w P_m, R_p, \Delta M_l, \Delta M_w) \quad (12)$$

力封闭下工作空间求解时建立的动平台的静力平衡方程可以替换为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{D_c} T_{ci} \cdot {}^w \mathbf{u}_i + \mathbf{G}_m = 0 \\ \sum_{i=1}^{D_c} {}^w \mathbf{R}_m \cdot [x_{ai} - \Delta M_l, y_{ai} - \Delta M_w, z_{ai}]^T + \\ {}^w t_m \times (T_{ci} \cdot {}^w \mathbf{u}_i) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

## 3 CDPR的刚度求解

### 3.1 CDPR的刚度建模

CDPR运行时,驱动力通过绳索传递至末端的动平台,力的作用点建立在动锚点座上,使末端执行器对外界做功。本文的末端平台由四根绳索牵引,考虑到绳索只能产生拉力,无法承受压力,当动平台处于稳定状态时,其主要受到驱动绳索的拉力、动平台与负载元件的重力以及绳索的摩擦力,且摩擦力可以忽略不计。

假设所有绳索的长度变化虚位移为 $\Delta l$ ,绳索的拉力为 $T_c$ , $F_{ex}$ 为动平台所受的外力,末端动平台的虚位移为 $\Delta P$ 。在系统处于的平衡状态下,所有主动与其产生的虚位移所做的虚功总和为零,即绳索长度变化引起的拉力产生的虚功和动平台所受外力产生的虚功之和为零,则:

$$F_{ex}^T \cdot \Delta P - T_c^T \cdot \Delta l = 0 \quad (14)$$

由于是绳长的变化会引起末端动平台位姿的变化,于是,有:

$$\Delta l = \frac{\partial l}{\partial P} \Delta P = J_L \Delta P \quad (15)$$

式中 $J_L$ 表示动平台的位置雅克比矩阵。

根据胡克定律,四根绳索的刚度矩阵可表示为:

$$K_c = \frac{\partial T_c}{\partial l} = \frac{\partial T_c}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial l} \quad (16)$$

末端动平台的刚度矩阵  $K_e$  可表示为:

$$K_e = \frac{\partial F_{ex}}{\partial P} \quad (17)$$

又因为

$$\frac{\partial F_{ex}}{\partial P} = J_L^T \cdot \frac{\partial T_c}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial P} + \frac{\partial J_L^T}{\partial P} \cdot T_c \quad (18)$$

于是, 末端动平台的刚度矩阵可进一步表示为:

$$K_e = J_L^T \cdot \frac{\partial T_c}{\partial l} \cdot J_L + H \cdot T_c \quad (19)$$

式中  $H = \frac{\partial J_L^T}{\partial P}$  表示机器人的海森矩阵。

通过上述推导可以看出, CDPR 末端动平台的刚度与绳索刚度和末端所受外力有关。采用蒙特卡洛法可以对 CDPR 的刚度进行分析。

### 3.2 CDPR 刚度的优化求解

从上节 CDPR 的刚度模型推导可以看出, 刚度主要跟 CDPR 的结构参数、绳索的性能参数以及动平台所受外力等相关。由于本文机器人模型为四绳驱动机器人, 可以认为动平台只受到负载重力一个外力, 并且假设绳索的弹性模量、绳索的横截面积以及框架的尺寸保持不变。因此本文主要分析动平台连接点位置参数对 CDPR 刚度产生的影响, 在给定任务轨迹的情况下, 寻求使得刚度最大化的参数值。

#### 3.2.1 考虑运动学结构参数变化下刚度的变化

在空载状态下进行对运动学结构参数对刚度影响的分析。将考虑运动学结构参数的绳长模型 (4) 代入刚度模型 (19), 最终得到对应的刚度模型  $K_e(mB_i, mA_i, wP_m, \Delta M_l, \Delta M_w)$

为方便刚度分析可建立如下的优化方程:

$$K_{ex}(\Delta M_l^*, \Delta M_w^*) = \arg \max \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i \in x, y, z} K_{ci}^2(\Delta M_l, \Delta M_w)} \quad (20)$$

这里,  $N$  表示迭代次数。

为同时分析  $\Delta M_l, \Delta M_w$  两个参数变化对刚度模型的影响, 通过粒子群优化算法对 (20) 进行优化求解。

## 4 仿真和实验

### 4.1 仿真

#### 4.1.1 模型验证

仿真中, 绳驱并联机器人框架的重要结构参数如表 1 所示。假设正运动学迭代的初始位姿为  ${}^w P_m^{\text{start}} = (100, -100, -100)mm$ , 目标位姿  ${}^w P_m^{\text{end}} = (400, 200, -100)mm$ , 迭代精度为  $10^{-6}mm$  和  $10^{-6}rad$ 。位置误差在 5 次迭代后基本接近 0, 姿态误差在迭代次数 15 次后基本接近 0。

表 1 样机框架的结构参数

样机结构参数	设计参数 (mm)	样机结构参数	设计参数 (mm)
本体框架长 $S_l$	750	动平台长 $M_l$	150
本体框架宽 $S_w$	640	动平台宽 $M_w$	110
本体框架高 $S_h$	640	动平台高 $M_h$	10
滚动半径 $R_p$	6.5	滚筒半径 $R_w$	15

假设末端动平台的运动轨迹为一个圆周运动, 运动时间  $T_{traj} = 40s$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T_{traj}}$ , 其对应的轨迹方程为:

$$\begin{cases} x_m = 335 + 200 \sin \omega t; \\ y_m = 200 \cos \omega t; \\ z_m = -200 \end{cases} \quad (21)$$

式 (21) 对应的正解仿真结果如图 3(a) 所示, 各绳索长度随动平台轨迹变化曲线如图 3(b) 所示。

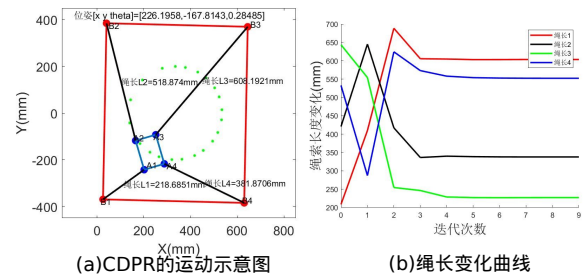


图 3 运动学仿真

#### 4.1.2 CDPR 的工作空间分析

本文主要分析动锚点座结构参数对工作空间的影响。本文的动平台长度  $M_l$  为  $0.150m$ , 连接点之间的距离最少为  $M_l/2$ 。基于上述分析, 将每组实验中动平台连接点  ${}^m A_i, {}^m A_j$  之间的距离沿动坐标系  $y$  方向以  $-10mm$  的梯度下降。设置  ${}^m A_i$  和  ${}^m A_j$  之间长边距离为  $140, 130, 120, 110mm$ , 动平台的高度  $-200mm$ 。假设动平台宽度  $M_w$  为  $110mm$ , 将每组连接点  ${}^m A_i$  和  ${}^m A_j$  短边之间的距离沿动坐标系  $x$  方向上以  $-10mm$  的梯度减小, 即  ${}^m A_i$  和  ${}^m A_j$  之间短边距离分别为  $110, 100, 90, 80mm$ , 动平台高度  $-200mm$ 。

上述实验得到随着动平台长边连接点之间的距离减小, 有限绳长下的可达工作空间也随之减小, 尤其是  $x$  方向上下降的较为明显。随着动平台短边连接点之间的距离减小, 有限绳长下的理论可达工作空间略有减小, 但总体变化不大。

进一步地, 考虑动锚点座位置变化对力封闭工作空间的影响, 图 4 给出了动锚点座沿场边变化趋势下的力封闭空间示意图。随着动平台长边相邻两锚点座之间距离的减小, 力封闭工作空间在  $y$  方向

上锐减,在 $x$ 方向上先略有减少,而后急剧减少。而随着动平台短边相邻两锚点座之间距离的减小,力封闭工作空间在 $y$ 方向和 $x$ 方向均有增加。

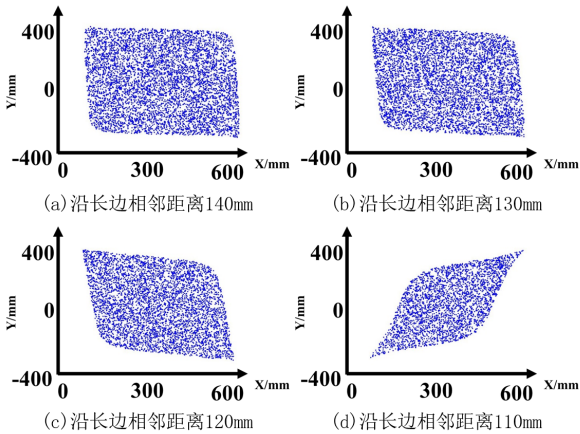


图4 动锚点座沿长边变化前后力封闭工作空间示意图

根据仿真结果。由于动平台与绳索连接的双绳孔结构,动锚点座结构参数最接近动平台实际受绳索拉力作用点,且力封闭工作空间较大,因此最终将动锚点座坐标设定为长边距离130mm,短边距离90mm。

#### 4.1.3 CDPR 的刚度分析

##### 1) 考虑负载重力变化下刚度的变化

在工作空间内随机取一段任务轨迹,计算轨迹上的点在负载变化时刚度的变化。在 matlab 上进行仿真得到负载变化下的相较于空载的刚度净变化图。

从仿真结果可以得出,相较于空载时的刚度,负载 $\Delta m$ 从0开始增加,轨迹上各点的刚度随之减少,整体呈现单向递减的趋势。当负载增加时,机械结构会受到更大的力,从而造成机器人更大的变形使得刚度下降。经过仿真,在达到机器人最大安全负载时,机器人的平均刚度仍然较大,所以在安全负载内绳驱并联机器人刚度是满足要求的。

##### 2) 考虑运动学结构参数变化下刚度的变化

根据仿真结果,算法迭代到第四次后输出的结果均不变,可以看到优化参数结果为 $\Delta M_l = 0$ ,和 $\Delta M_w = 0$ 的时候优化迭代结果达到最大且趋于稳定,此时给定轨迹内最大平均刚度为 $1199180N \cdot m^{-1}$ 。

经过粒子群算法进行刚度优化后的结果,可以得到优化参数结果为0和0的时候优化迭代结果趋于稳定,即动平台与绳索连接点处于动平台四个顶点的位置能达到最大刚度。结合前章节对工作空间的分析,动平台与绳索连接点处于动平台四个顶点时工作空间最大,此时正好能获得最大刚度。

## 4.2 实机实验

### 4.2.1 实验样机

本文的四绳驱动并联机器人主要由铝合金机架、末端运动平台、钢丝驱动绳索及滑轮座组成。框架底部安装的直流电机提供动力牵动绳索,通过绞盘模块将电机的转动转化为绳索的拉伸运动,再利用绳索的长度变化实现末端运动平台的3-DOF位姿控制。驱动系统、stm32主控板以及电线等设备布置在主体框架的下层并组装成单独的模块,各个部件可快速替换。

### 4.2.2 轨迹跟踪实验

如表2所示,给定段轨迹起点,控制动平台以矩形轨迹运动,其中边长均为0.2m。矩形轨迹等价于多段直线轨迹,为使运动轨迹平滑,都通过三次样条曲线插值为多个轨迹点。在轨迹运动中,我们使控制1号-3号绳索电机的驱动器采取电流速度位置控制模式,4号绳索采取电流控制模式。

表2 样机运动参数与误差

段轨迹运动起点(m)	段轨迹运动终点(m)	平均误差(mm)
(0.21, -0.132, 0.024)	(0.41, -0.132, 0.024)	(1.6, 1.7, 1.2)
(0.41, -0.132, 0.024)	(0.41, 0.068, 0.024)	
(0.41, 0.068, 0.024)	(0.21, 0.068, 0.024)	
(0.21, 0.068, 0.024)	(0.21, -0.132, 0.024)	
(0.21, -0.132, 0.024)	(0.41, -0.132, 0.024)	

运行过程中,绳索长度变化曲线图如图12所示,末端动平台给定位姿、正解期望位姿和实际位姿如图13所示。绳索长度的平均误差分别是1.6mm, 1.7mm, 1.2mm。平均误差最大发生在绳索2,为1.7mm。当期望绳长速度变化减缓后,绳长误差逐渐减少,最终趋向于零。

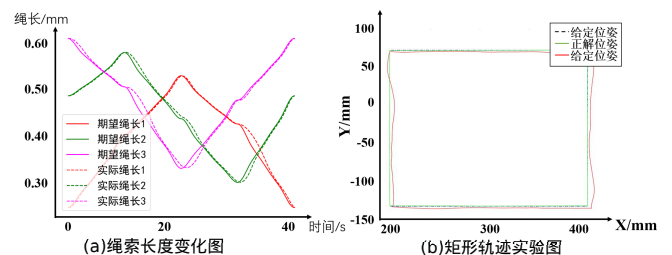


图5 轨迹实验图

## 5 结论

本文建立了CDPR笛卡尔坐标系下绳索自绞盘到动平台不同段数的长度变化模型,并提出了一种考虑滑轮的绳索长度和绳索向量计算方法。在考虑滑轮的绳索模型基础上,分析了四绳驱动并联机器人的运动学模型,并对正、逆运动学分别进行了仿真,验证了绳长和绳索向量计算方法的准确性和可

行性。然后,对CDPR的有限绳长理论可达工作空间和力封闭工作空间进行了建模与分析,分析了动锚点座结构参数变化情况下的工作空间变化趋势。进一步地,对CDPR的刚度进行了建模和分析,并用粒子群算法对刚度模型进行优化。借助优化后的模型完成动平台锚点座的位置决策。最后,通过样机实验对CDPR的轨迹跟踪性能进行验证。在未来研究中,会继续深入探讨柔性给系统带来的深层次影响。

### 参考文献 (References)

- [1] Lau D., Eden J., Tan Y., et al. CASPR: A comprehensive cable-robot analysis and simulation platform for the research of cable-driven parallel robots[C]. 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE. 2016: 16503677.
- [2] 王宇奇, 林麒, 王晓光等. 一种绳牵引并联机器人系统控制律设计及 Lyapunov 稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2018, 33(7): 1329-1334.  
(Wang Y Q, Lin Q, Wang X G, Liu J. Design of control law of WDPR and Lyapunov stability analysis[J]. Control and Decision, 2018, 33(7): 1329-1334.)
- [3] Albus J., Bostelman R., Dagalakis N.. The NIST robocrane. Journal of Robotic Systems[J], 1993, 10(5): 709-724.
- [4] Picard E., Plestan F., Tahoumi E., et al. Control Strategies for a Cable-Driven Parallel Robot with Varying Payload Information[J]. Mechatronics, 2021, 79: 102648.
- [5] Mroz G., Notash L.. Design and Prototype of Parallel, Wire-Actuated Robots with a Constraining Linkage[J]. Journal of Robotic Systems, 2004, 21(12): 677-687.
- [6] 王宇奇, 林麒, 王晓光等. 基于 RBF 神经网络补偿的一种绳牵引并联机器人支撑系统的力/位混合控制 [J]. 控制与决策, 2020, 35(3): 536-546.  
(Wang Y Q, Lin Q, Wang X G, et al. Force / position hybrid control of a wire-driven parallel robot support system based on RBF neural network compensation [ J ]. Control and decision, 2020, 35 ( 3 ) : 536-546)
- [7] Khosravi M., Taghirad H.. Robust PID control of fully-constrained cable driven parallel robots[J]. Mechatronics, 2014, 24(2): 87-97.
- [8] Yin J., Jiang P., Yao R.. An approximately analytical solution method for the cable-driven parallel robot in FAST[J]. Research in Astronomy and Astrophysics, 2021, 21(2): 171-181.
- [9] Ming, A, Makoto K and Toshiro H. On the design of wire parallel mechanism[J]. International Journal of The Japan Society for Precision Engineering 29 (1995): 337-342.
- [10] Lau D., Eden J., Tan Y. and Oetomo D., CASPR: A comprehensive cable-robot analysis and simulation platform for the research of cable-driven parallel robots[C]. 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Daejeon, Korea (South), 2016:3004-3011.
- [11] F. Ennaïem, A. Chaker, M. Laribi, et al. Task-Based Design Approach: Development of a Planar Cable-Driven Parallel Robot for Upper Limb Rehabilitation[J]. Applied Sciences, 2021, 11(12): 5635.
- [12] S. Yu, C. Ye, G. Tao, et al. FWMR-II: a modular link-type rope-climbing robot with the finger-wheeled mechanism[J]. Industrial Robot, 2021, 48(4): 602-613.
- [13] Pusey J., Fattah A., Agrawal S.. Design and workspace analysis of a 6-6 cable-suspended parallel robot[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(7): 761-778.
- [14] Bosscher P., Riechel A., Ebert-uphoff I.. Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(5): 890-902.
- [15] Pham C., Yeo S., Yang G.. Workspace analysis and optimal design of cable-driven planar parallel manipulators[c]. IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 2004: 219-224.
- [16] Diao X., Ma O.. A method of verifying force-closure condition for general cable manipulators with seven cables[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(12): 1563-1576.
- [17] Yoo S., Kim T., Seo M., et al. Position-Tracking Control of Dual-Rope Winch Robot with Rope Slip Compensation[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2021, 26(4): 1754-1762.
- [18] Li Y., Song Y., Huang T., et al. Static force analysis of lower-mobility parallel manipulators[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(9): 80-83.
- [19] Azadi M., Behzadipour S., and Faulkner G.. Antagonistic variable stiffness elements[J]. Mechanism and Machine Theory, 44(9):1746-1758, 2009.
- [20] H Yuan., Courteille E., Deblaise D., Static and dynamic stiffness analyses of cable-driven parallel robots with non-negligible cable mass and elasticity[J], Mechanism and Machine Theory, 85 (2015): 64-81.
- [21] Amare Z., Zi B., Qian S., et al. Three-dimensional static and dynamic stiffness analyses of the cable driven parallel robot with non-negligible cable mass and elasticity[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2018, 46(4): 455-482.

### 作者简介

陈启瀚(1999—),男,硕士研究生,从事机器人控制、计算机视觉等研究, E-mail: chenqh36@mail2.sysu.edu.cn;

郭永华(1999—),男,硕士研究生,从事机器人控制研究, E-mail: 202035161@qq.com;

韩瑜(1981—),男,教授,博士,从事机器人控制的研究, E-mail: hanyu25@mail.sysu.edu.cn;

刘万泉(1965—),男,教授,博士,从事机器人优化的研究, E-mail: liuwq63@mail.sysu.edu.cn;

彭键清(1988—),男,副教授,博士,从事机器人控制的研究, E-mail: pengjq7@mail.sysu.edu.cn.