

# 控制与决策

Control and Decision

基于改进Koopman算子在线预估器的海洋浮体路径跟踪预测控制算法

丁博文, 付东飞, 金志豪, 黎明

引用本文:

丁博文, 付东飞, 金志豪, 等. 基于改进Koopman算子在线预估器的海洋浮体路径跟踪预测控制算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(3): 863–870.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0164>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于Frenet坐标系的自动驾驶轨迹规划与优化算法](#)

Trajectory planning and optimization algorithm for automated driving based on Frenet coordinate system  
控制与决策. 2021, 36(4): 815–824 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0748>

[基于多维泰勒网的超前d步预测模型](#)

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network  
控制与决策. 2021, 36(2): 345–354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

[输入受限下自主水下航行器路径跟踪的级联控制](#)

Path-following control of an AUV in cascade under input saturation  
控制与决策. 2021, 36(12): 2964–2972 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0411>

[基于平衡鲸鱼优化算法的无人车路径规划](#)

Path planning of unmanned ground vehicle based on balanced whale optimization algorithm  
控制与决策. 2021, 36(11): 2647–2655 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0416>

[基于改进蛙跳算法的分布式两阶段混合流水车间调度](#)

An improved shuffled frog leaping algorithm for the distributed two-stage hybrid flow shop scheduling  
控制与决策. 2021, 36(1): 241–248 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0472>

# 基于改进 Koopman 算子在线预估器的海洋浮体 路径跟踪预测控制算法

丁博文<sup>1</sup>, 付东飞<sup>1†</sup>, 金志豪<sup>1</sup>, 黎明<sup>1,2</sup>

(1. 中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266404;  
2. 中国海洋大学 海洋工程与技术创新研究院, 山东 青岛 266100)

**摘要:** 针对具有强非线性动力学特性的海洋浮体路径跟踪问题, 提出基于改进 Koopman 算子在线预估器的模型预测控制 (MPC) 算法. 在算子可观测函数中引入状态时延变量与状态导数, 将浮体动态系统提升到希尔伯特空间, 使其高维线性化模型包含更多系统模式. 据此提出基于 Koopman 算子的线性预估器, 该数据驱动方法通过在提升空间中解决最小二乘问题, 对系统的输入-输出数据进行非线性变换. 将扩展动态模式分解得到的线性模型作为 MPC 控制器的内模, 以此方式设计的 MPC 优化问题与一般线性动态系统的 MPC 优化问题具有相同的计算复杂度. 此外, 既可以以线性的方式对状态和控制输入施加线性不等式约束, 也可以施加源自海洋浮体动态特性的非线性约束. 为了减少计算时间, 在线预测器采用增量更新策略. 将所提出控制方案应用于海洋浮体的路径跟踪控制, 并通过仿真实验验证其有效性.

**关键词:** 海洋浮体; Koopman 算子; 模型预测控制; 路径跟踪; 扩展动态模式分解; 增量更新

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0164

**引用格式:** 丁博文, 付东飞, 金志豪, 等. 基于改进 Koopman 算子在线预估器的海洋浮体路径跟踪预测控制算法 [J]. 控制与决策, 2025, 40(3): 863-870.

## Path-following predictive control of marine floating body based on online predictor of Koopman operator

DING Bo-wen<sup>1</sup>, FU Dong-fei<sup>1†</sup>, JIN Zhi-hao<sup>1</sup>, LI Ming<sup>1,2</sup>

(1. College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266404, China; 2. Institution of Marine Engineering and Technological Innovation, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

**Abstract:** To tackle the path-following problem of marine floating bodies with strong nonlinear dynamics, this paper proposes a model predictive control (MPC) scheme based on an online predictor using Koopman operator learning. By introducing delayed states and corresponding derivatives into the observable function, the system dynamics are lifted to Hilbert space, where the linear model of marine floating body is more accurate. Thereby, a linear predictor is designed based on the Koopman operator, in which this data-driven approach relies on nonlinear transformation of system input-output measurements by solving the least squares problem in the lifting space. Then, the linear model obtained from the extended dynamic mode decomposition is used as the internal model of the MPC controller. Therefore, the MPC optimization problem designed in this way has the same computational complexity as the one in the linear MPC scenario. Moreover, both linear inequality constraints and nonlinear constraints arising from the dynamic characteristics of marine floating bodies can be imposed in a linear manner on the state and control inputs. To reduce computation time, an incremental update strategy is used by the online predictor. The proposed control scheme is applied to the path-following of a marine floating body, and extensive experiments are conducted to verify its effectiveness.

**Keywords:** marine floating body; Koopman operator; model predictive control; path-following; extended dynamic mode decomposition; incremental update

## 0 引言

新兴的可重构浮体是一种特殊的水面无人系统,

可以使多个模块化智能浮体根据海洋工程任务需求  
自主拼接、分离以形成不同形状和尺度的大型浮动

收稿日期: 2024-02-18; 录用日期: 2024-08-19.

基金项目: 山东省自然科学基金项目 (ZR2022MF280).

责任编委: 陈家伟.

†通讯作者. E-mail: fudongfei@ouc.edu.cn.

平台. 可重构浮体具有为海洋工程作业构建支点平台<sup>[1]</sup>、浮桥快速自动搭建<sup>[2]</sup>、海洋资源开发<sup>[3]</sup>和水面垃圾清理等应用潜力. 为有效完成这些任务, 过去几年涌现出各种基于模型的水面无人系统控制方法<sup>[4]</sup>. 路径跟踪控制作为设计浮体间对接和分离运动控制器的关键, 获得越来越多的关注<sup>[5]</sup>.

传统方法大多依赖数学模型基于反馈或优化设计控制律, 现阶段采用模型预测控制 (MPC) 的海洋浮体路径跟踪调控<sup>[6]</sup>是较为有吸引力的解决方案, 但由于浮体水动力学高度非线性、强耦合的存在, 导致优化问题变为非凸的, 非线性 MPC 求解困难, 甚至因耗费大量计算时间而难以进行实时控制. 鉴于线性 MPC 理论相对比较成熟, 将浮体的非线性动力学模型转化为线性模型再进行控制器设计, 具有很好的研究应用前景. 现有的非线性系统线性化技术需要对浮体系统的精确数学模型有足够的了解, 且线性化的模型很难捕捉到完整的系统的动态信息, 不利于非线性浮体系统的精确跟踪控制. 可借助 Koopman 算子理论<sup>[7]</sup>来解决此难题. 作为一种数据驱动方案, 其优势在于该算子只需利用系统的实验或仿真数据, 即可对非线性动力系统进行全局线性化, 给出比常规线性化方法 (局部线性化或 Carleman 线性化) 更加精确的线性预估器<sup>[8]</sup>.

理论上, 基于 Koopman 算子求得的预测器符合 MPC 理论中对系统内模具有预测功能的要求. 因为路径跟踪需要考虑受控系统, 通过上述方法获得的预测器并不适用. 一个理论上可行的方案是利用动态模式分解 (DMD) 将局部线性分析与非线性算子联系起来, 然后纳入控制的影响, 形成带控制的动态模式分解 (DMDc)<sup>[9-10]</sup>. 这样既保留了 DMD 的所有优点, 又能够区分基础水动力学和驱动的影响, 从而得到受控系统的输入输出模型. 与 DMD 类方法不同, 基于 Koopman 算子的数据驱动建模<sup>[11]</sup>可产生面向路径跟踪控制的浮体系统线性模型. 其中, 一个固有的关键难题是选择合理的基函数以保证预测器的精度<sup>[12]</sup>. 最近的研究表明, 时间延迟坐标可能提供更有意义的信息<sup>[13-15]</sup>, 即通过用时间延迟坐标扩展测量坐标来构建基函数<sup>[16-17]</sup>, 以输入输出数据构建 Koopman 模型. 通过高增益观测器估计可测坐标的高阶导数来填充基函数<sup>[18-19]</sup>, 以进一步提高模型精度. 目前已有将 Koopman 算子方法扩展到输入-输出系统的相关研究<sup>[2, 20-22]</sup>.

考虑到以上挑战, 本文通过增广状态空间法<sup>[21]</sup>将 Koopman 算子理论推广到浮体路径跟踪控制问

题中. 对于算子的无限维特性导致控制器设计难以实现的问题, 借鉴扩展动态模式分解 (EDMD) 得到 Koopman 算子的有限维近似<sup>[22]</sup>. 将延迟状态及其导数作为扩展可观测量, 等效于增加了系统的状态维度, 使算子线性模型的精度有进一步的提高. 采用算子线性模型作为内模进行后续的预测控制器设计, 据此提出 IO-KMPC 的路径跟踪控制算法, 并以此完成浮体的路径跟踪控制器设计.

## 1 问题描述

可重构浮体的各模块在自主拼接、分离形成不同形状和尺度的平台过程中, 跟踪特定的路径. 本文使用预测控制方法以期达到海洋环境约束下的精确路径跟踪, 首先需要建立浮体的动力学模型.

考虑如图 1 所示的六自由度的受控浮体, 为描述其动态特性, 建立以地球任意一点为坐标原点的惯性坐标系  $O_e-X_eY_eZ_e$  和以浮体重心为原点的体坐标系  $O_b-X_bY_bZ_b$ . 浮体在  $O_e-X_eY_eZ_e$  下的位姿可以用  $\eta = [x_g, y_g, z_g, \phi, \theta, \Psi]^T$  表示, 在  $O_b-X_bY_bZ_b$  下的速度可以用  $v = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  描述. 将浮体视作流体中的刚体, 根据牛顿-欧拉动力学方程可得到浮体的动态特性为

$$\begin{cases} m[\dot{v}_x - v_y\omega_z + v_z\omega_y - x_g(\omega_y^2 + \omega_z^2) + y_g(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) + z_g(\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y)] = F_x, \\ m[\dot{v}_y - v_z\omega_y + v_x\omega_z - y_g(\omega_x^2 + \omega_z^2) + z_g(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) + x_g(\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z)] = F_y, \\ m[\dot{v}_z - v_x\omega_x + v_y\omega_x - z_g(\omega_x^2 + \omega_y^2) + x_g(\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y) + y_g(\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_x)] = F_z, \\ I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z - (\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y)I_{xz} + (\omega_z^2 - \omega_y^2)I_{yz} + (\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y)I_{xy} + m[y_g(\dot{v}_z - v_x\omega_y + v_y\omega_x) - z_g(\dot{v}_y - v_z\omega_x + v_x\omega_z)] = T_x, \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z - (\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z)I_{xy} + (\omega_x^2 - \omega_z^2)I_{zx} + (\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z)I_{yz} + m[z_g(\dot{v}_x - v_y\omega_z + v_z\omega_y) - x_g(\dot{v}_z - v_x\omega_y + v_y\omega_x)] = T_y, \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y - (\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)I_{yz} + (\omega_y^2 - \omega_x^2)I_{xy} + (\omega_z\omega_y - \dot{\omega}_x)I_{zx} + m[x_g(\dot{v}_y - v_z\omega_x + v_x\omega_z) - y_g(\dot{v}_x - v_y\omega_z + v_z\omega_y)] = T_z. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $m$  为浮体质量;  $F_x, F_y, F_z, T_x, T_y, T_z$  分别为作用于浮体的力和力矩在  $O_e-X_e, O_e-Y_e, O_e-Z_e$  轴方向上的分量;  $I_x, I_y, I_z$  分别为浮体转动惯量在  $O_e-X_e, O_e-Y_e, O_e-Z_e$  轴方向上的分量;  $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$  分别为  $O_e-X_eY_e, O_e-Y_eZ_e, O_e-Z_eX_e$  平面上的惯性积.

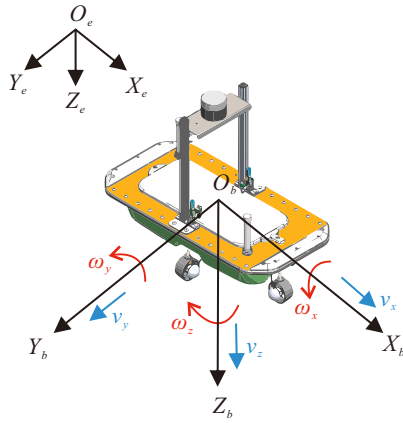


图1 单个浮体的坐标系及位姿和速度描述

浮体对接的实际过程是平面运动, 可仅考虑浮体模型纵荡、横荡和艏摇 3 个自由度上的运动, 即  $z_g = 0, \phi = \theta = 0, w = 0, p = q = 0$ . 因此, 浮体位姿和速度可分别重新定义为  $\eta = [x_g, y_g, \Psi]^T$ ,  $v = [v_x, v_y, \omega_z]^T$ , 则水动力学模型 (1) 可简化为

$$\tau(t) = M\dot{v}(t) + C(v)v(t) + D(v)v(t), \quad (2)$$

其中  $M$ 、 $C$  和  $D$  分别为惯性矩阵、科氏力矩阵和流体阻力矩阵. 作用于浮体的合力矩  $\tau = [\tau_u, \tau_v, \tau_r]^T$  可以由  $\tau = \Xi\Gamma$  获得,  $\Xi \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  为推进器配置矩阵,  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4]^T$  为 4 个推进器产生的推力.

浮体运动学方程为

$$\dot{\eta}(t) = R(\Psi)v(t), \quad (3)$$

其中旋转矩阵  $R(\Psi)$  决定运动学模型与动力学模型的转换关系. 综合模型 (2) 和 (3), 令状态  $x = [\eta^T, v^T]^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^6$ , 输入  $u = \tau$ , 对浮体系统模型  $\dot{x} = f(x, u)$  离散化可得

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k). \quad (4)$$

$f(\cdot)$  是包含大量参数的高度非线性系统, 难以辨识其模型并用于路径跟踪控制, 该问题可转化为从实际系统输入输出数据中借助 Koopman 算子理论, 将非线性模型 (4) 提升为等效的高维线性系统模型, 按照线性 MPC 原理进行路径跟踪控制设计.

## 2 基于 Koopman 算子的线性预测控制

### 2.1 受控系统的 Koopman 算子模型

经典 Koopman 算子理论针对自治系统  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $x_k \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  展开, 算子  $\mathcal{K} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  将系统状态  $x$  提升到无限维的希尔伯特空间  $\mathcal{H}$ , 有

$$\mathcal{K}\varphi(x_k) = \varphi(f(x_k)), \quad (5)$$

其中每一个  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  为关于  $x_k$  的非线性提升函数 (可观测量). 为使用 MPC 方法, 需要将其作用于形如式 (4) 的一般受控系统. 假设  $x \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ , 将状态空间扩展为原始状态空间  $\mathcal{M}$

与所有控制序列  $\mathbf{u} \triangleq \{u_i\}_{i=0}^{\infty}$  张成空间  $\ell(\mathcal{U})$  之积<sup>[15]</sup>, 即  $\mathcal{M} \times \ell(\mathcal{U})$ . 据此定义拓展状态  $\mathcal{X} = [x^T, \mathbf{u}^T]^T$ , 其动力学变为

$$\mathcal{X}_{k+1} = F(\mathcal{X}_k) \triangleq \begin{bmatrix} f(x, \mathbf{u}_k(0)) \\ \mathcal{S}\mathbf{u}_k \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中:  $\mathcal{S}$  表示移位运算符, 即  $\mathcal{S}\mathbf{u}(i) = \mathbf{u}(i+1)$ ,  $\mathbf{u}(i)$  为控制序列的第  $i$  个输入量. 参照上述算子定义方式确定受控系统广义 Koopman 算子  $\mathcal{K} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , 有

$$\mathcal{K}\Phi(\mathcal{X}_k) = \Phi(F(\mathcal{X}_k)) = \Phi(\mathcal{X}_{k+1}), \quad (7)$$

其中每个  $\Phi(\mathcal{X}) : \mathcal{M} \times \ell(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  为状态提升函数. 如果  $\mathcal{H}$  空间蕴含原非线性系统的所有状态, 则  $\mathcal{K}$  即为包含所有非线性动力学的线性算符.

为解决  $\mathcal{K}$  无限维特性带来的分析和计算难题, 利用 EDMD<sup>[22]</sup> 得到其有限维近似矩阵  $K$ . 假设采集原系统数据对集合  $(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , 即  $\mathcal{X}_{k+1} = F(\mathcal{X}_k)$ , 则求解如下优化问题可得  $K$ :

$$\min_{K^T} \sum_{k=1}^M \|\Phi(\mathcal{X}_{k+1}) - K^T\Phi(\mathcal{X}_k)\|^2, \quad (8)$$

其中  $\Phi(\mathcal{X}) = [\Phi_1(\mathcal{X}), \dots, \Phi_{N_\Phi}(\mathcal{X})]^T$  为状态提升函数向量. 然而, 无限维的  $\mathcal{X}$  导致式 (8) 无法求解, 需设计特殊提升函数  $\Phi_i(\mathcal{X}) = \psi_i(x) + \mathcal{L}_i(\mathbf{u})$ . 一般选取非线性函数  $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  和线性函数  $\mathcal{L}_i(\mathbf{u}) : \ell(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ . 令  $N_\Phi = N + m$ , 则  $\Phi(\mathcal{X}) = [\psi_1(x) + \mathcal{L}_1(\mathbf{u}), \psi_2(x) + \mathcal{L}_2(\mathbf{u}), \dots, \psi_N(x) + \mathcal{L}_N(\mathbf{u}), \dots, \psi_{N_\Phi}(x) + \mathcal{L}_{N_\Phi}(\mathbf{u})]^T = [x, \psi_{n+1}(x), \psi_{n+2}(x), \dots, \psi_N(x), \mathbf{u}(0)]^T$ . 后续预测控制的关键是状态预测, 可令  $\psi(x) = [x, \psi_{n+1}(x), \psi_{n+2}(x), \dots, \psi_N(x)]^T$ , 忽略式 (8) 中代价函数后  $m$  维输入, 并提取  $K^T$  的前  $N$  行, 有

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{X}_{k+1}) - K^T\Phi(\mathcal{X}_k) &\triangleq \\ \psi(x_{k+1}) - [A \ B] \begin{bmatrix} \psi(x_k) \\ \mathbf{u}_k(0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

提升后的状态方程系数矩阵  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$  可直接通过优化如下问题求解:

$$\min_{A, B} \sum_{k=1}^M \|\psi(x_{k+1}) - A\psi(x_k) - B\mathbf{u}_k(0)\|^2. \quad (9)$$

同时, 由于  $x$  是在  $\psi_i$  上的最优投影, 输出方程系数矩阵  $C \in \mathbb{R}^{n \times N}$  可由 LSE 求解获得, 即

$$\min_C \sum_{k=1}^M \|x_k - C\psi(x_k)\|^2. \quad (10)$$

综合式 (9) 和 (10), 得到状态预估器线性模型

$$\begin{cases} z_{k+1} = Az_k + Bu_k, \\ \hat{x}_k = Cz_k. \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $z \in \mathbb{R}^N$  为提升后状态,  $\hat{x}$  为对原非线性系统状态的预测, 预估器的初始值为  $z_0 = \psi(x_0)$ .

## 2.2 Koopman-MPC 控制器设计

应用线性模型 (11) 作为后续设计 MPC 控制器的内模, 在采样时刻  $k$ , 求解如下 KMPC 优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{u_i} J(\{u_i\}_{i=0}^{N_c-1}, \{z_i\}_{i=1}^{N_p}); \\ \text{s.t. } z_{i+1} = Az_i + Bu_i, E_i u_i + F_i z_i \leq c_i, \\ E_{N_p} z_{N_p} \leq c_{N_p}, z_0 = \psi(x_k). \end{aligned} \quad (12)$$

代价函数  $J$  中  $N_p$ 、 $N_c$  分别为预测时域和控制时域,  $E_k$ 、 $F_k$ 、 $c_k$  定义了输入和提升状态约束. 优化问题 (12) 由非线性动态系统  $x_k$  的当前状态进行参数化.

在采样时刻  $k$ , 还定义了一个反馈控制  $\kappa(x_k) = u_k^*(x_k)$ , 即求得式 (12) 的最优解  $u_k^*$  后, 将其作用于原非线性系统, 得到下一时刻的状态  $x_{k+1}$  用来更新预估器 (11) 的估计初值  $z_0 = \psi(x_{k+1})$ .

## 3 基于改进 Koopman 预估器的在线 MPC

本节提出基于改进 Koopman 预估器的在线模型预测控制方法. 首先, 对算子  $\mathcal{K}$  的近似  $K$  改进, 扩展基函数的可选择范围以期得到更精确的线性模型; 然后, 在 MPC 算法设计中, 每个采样时刻得到新的数据也用于算子的计算, 通过采用增量更新数据的方式降低计算时间, 满足后续 MPC 控制器设计的可行性.

### 3.1 改进的 Koopman 算子预估器

为捕捉更丰富的浮体非线性动力学信息, 通过引入时延变量和状态导数拓展算子的可观测量. 类似地, 首先定义嵌入时延数据的状态和输入

$$\begin{aligned} X_k \triangleq [x_k^T, u_{k-1}^T, x_{k-1}^T, \dots, u_{k-n_d}^T, x_{k-n_d}^T, \\ \dot{x}_{k-1}^T, \dot{x}_{k-2}^T, \dots, \dot{x}_{k-n_d}^T]^T. \end{aligned} \quad (13)$$

其中:  $x_k$  为当前时刻的状态,  $\dot{x}_{k-1}$  为上一时刻状态的导数,  $n_d$  为补充的延迟数据个数,  $k = 1, 2, \dots, M$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $n_x = 2(n_d + 1)n + n_d \cdot m$ .

重新定义扩展状态  $\mathcal{X} = [X^T, \mathbf{u}^T]^T$ , 则拓宽数据下的  $\mathcal{K}$  满足  $\mathcal{K}\Phi(\mathcal{X}_k) = \Phi(\mathcal{X}_{k+1})$ . 类似地, 每个状态提升函数有  $\Phi_i(\mathcal{X}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \ell(\mathbf{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ , 构成提升函数向量  $\Phi(\mathcal{X}) = [\Phi_1(\mathcal{X}), \dots, \Phi_{N_\Phi}(\mathcal{X})]^T$ ,  $\Phi(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^{N_\Phi}$ . 算子  $\mathcal{K}$  可由优化如下问题求得:

$$\min_{\mathcal{K}} \sum_{k=1}^M \|\Phi(\mathcal{X}_{k+1}) - \mathcal{K}^T \Phi(\mathcal{X}_k)\|^2 + \alpha \|\mathcal{K}^T\|^2. \quad (14)$$

引入正则化参数  $\alpha > 0$  控制模型复杂度和保证矩阵可逆. 为确保优化问题可行, 设计特殊的提升函数

$$\Phi(\mathcal{X}) = \psi(X) + \mathcal{L}(\mathbf{u}) = [\psi(X)^T, \mathbf{u}(0)^T]^T. \quad (15)$$

令  $N_\Phi \triangleq N + m$  表示系统状态提升之后的线性系统维数. 设计的提升函数向量为  $\psi(X) = [X^T, \psi_{n_x+1}(X), \psi_{n_x+2}(X), \dots, \psi_N(X)]^T$ , 其中提升函数  $\psi_i : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ . 由式 (15), 优化问题 (14) 转化为

$$\min_{K^T} \sum_{k=0}^M \left\| \psi(X_{k+1}) - K^T \begin{bmatrix} \psi(X_k) \\ \mathbf{u}_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2 + \alpha \|K^T\|^2. \quad (16)$$

可以通过求解最小二乘问题给出优化问题 (16) 的解  $K^T = \Pi\Theta$ . 其中:  $\Pi \triangleq \Phi(\mathcal{X}_{k+1})\Phi(\mathcal{X}_k, \mathbf{u})^T$ ,  $\Theta \triangleq [\Phi(X_k, \mathbf{u})\Phi(X_k, \mathbf{u})^T + \alpha I]^{-1}$ . 据此, 可得到基于改进 Koopman 算子的线性预估模型的状态方程.

### 3.2 改进的 Koopman 算子预估器的数值计算

首先, 采集满足式 (13) 的  $M$  组数据. 值得注意的是, 采集数据时不要求每组数据都必须同一条状态轨迹上, 有

$$\begin{cases} \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_M], \\ \mathbf{X}' = [X_2, X_3, \dots, X_{M+1}]. \end{cases} \quad (17)$$

经过提升函数作用, 即可得到提升数据矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{lift} \triangleq \psi(\mathbf{X}) = [\psi(X_1), \dots, \psi(X_M)], \\ \mathbf{X}'_{lift} \triangleq \psi(\mathbf{X}') = [\psi(X_2), \dots, \psi(X_{M+1})], \\ \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1(0), \dots, \mathbf{u}_M(0)]. \end{cases} \quad (18)$$

利用式 (18) 将优化问题 (16) 简化处理为

$$\min_{K^T} \left\| \psi(\mathbf{X}') - K^T \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{X}) \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \right\|^2 + \alpha \|K^T\|^2.$$

考虑到设计提升函数时采用了特殊的形式, 可直接选取线性预估器输出方程的系数  $\bar{C} = [I, 0]$ . 类似地, 利用 LSE 可求出优化问题的解  $K^T \triangleq [\bar{A}, \bar{B}]$ , 其中  $\bar{A}, \bar{B}$  分别为线性预估器状态方程的系数. 有

$$\begin{cases} \Pi = \mathbf{X}'_{lift} [\mathbf{X}_{lift}^T, \mathbf{U}^T], \\ \Theta = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{lift} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} [\mathbf{X}_{lift}^T, \mathbf{U}^T] + \alpha I \right)^{-1}, \\ K^T = \Pi\Theta. \end{cases} \quad (19)$$

将提升后状态用  $\bar{x}_k$  表示. 至此, 按照收集数据以及数值计算流程得到基于 Koopman 算子的线性预估器模型为

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k, \\ \hat{x}_k = \bar{C}\bar{x}_k. \end{cases} \quad (20)$$

### 3.3 在线更新算子模型的 MPC 控制器设计

利用获得的线性预估器 (20) 进行后续的 MPC 控制器设计, 关键是求解如下 IO-KMPC 优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_U J(\{u_i\}_{i=0}^{N_c-1}, \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{N_p}); \\ & \text{s.t. } \bar{x}_{i+1} = \bar{A}\bar{x}_i + \bar{B}u_i, E_i U_i + F_i \bar{x}_i \leq c_i, \\ & F_{N_p} \bar{x}_{N_p} \leq c_{N_p}, \bar{x}_0 = \psi(X_k). \end{aligned} \quad (21)$$

得到最优解  $u_k^*$  后, 根据式 (20) 预测得到下一时刻的状态  $\hat{x}_{k+1}$ , 作为 MPC 控制的控制状态变量. 这对式 (20) 的预测精度提出了较高的要求, 为此提出一种在线更新的策略. 区别于传统的 KMPC 策略 (12), 将  $u_k^*$  作用于原非线性系统得到新的  $x_{k+1}$  进行滚动优化, 在式 (21) 的 IO-KMPC 策略中, 引入在线更新 Koopman 算子线性模型的方法. 具体而言, 利用 MPC 滚动优化产生的新数据对模型 (20) 进行不断地修正, 根据式 (19), 在  $k$  时刻 MPC 优化问题求解完成, 同时原系统的新状态到来, 将这些新数据用作采集数据的一部分, 以保证模型 (20) 的准确度, 则相应的求解更新模型 (19) 变为

$$\begin{cases} \Pi_k \triangleq [\mathbf{X}'_{\text{lift}} \ \psi(\mathbf{X}_{k+1})] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{lift}} & \psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U} & u_k^* \end{bmatrix}^T, \\ \Theta_k \triangleq \\ \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{lift}} & \psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U} & u_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{lift}} & \psi(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{U} & u_k^* \end{bmatrix}^T + \alpha I \right)^{-1}, \\ K_k^T = \Pi_k \Theta_k. \end{cases} \quad (22)$$

同时, 为减少式 (22) 中更新  $K_{k+1}^T = \Pi_{k+1} \Theta_{k+1}$  时的矩阵求逆计算时间, 利用如下增量形式更新数据流:

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1} &= \Pi_k + \psi(\mathbf{X}_{k+1}) \Phi(X_k, u^*)^T, \\ \Theta_{k+1} &= \Theta_k - \frac{\Theta_k \Phi(X_k, u^*) \Phi(X_k, u^*)^T \Theta_k}{1 + \Phi(X_k, u^*)^T \Theta_k \Phi(X_k, u^*)}, \\ K_{k+1}^T &= \\ K_k^T &+ \frac{(\psi(\mathbf{X}_{k+1}) - K_k^T \Phi(X_k, u^*)) \Phi(X_k, u^*)^T \Theta_k}{1 + \Phi(X_{k+1}, u^*)^T \Theta_k \Phi(X_{k+1}, u^*)}. \end{aligned} \quad (23)$$

则  $k$  时刻的更新模型为

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{A}_k \bar{x}_k + \bar{B}_k u_k, \\ \hat{x}_k = \bar{C}_k \bar{x}_k. \end{cases} \quad (24)$$

下面给出基于改进 Koopman 算子在线预估器模型的预测控制算法 IO-KMPC.

**算法 1** IO-KMPC.

离线计算:

- step 1: 离散化非线性系统, 由式 (17) 收集数据;
- step 2: 由式 (18) 通过提升函数将数据进行处理;
- step 3: 由式 (19) 得到提升后的 Koopman 算子模型, 将式 (20) 作为 MPC 控制器的初始预测模型.

在线计算:

step 4: 求解 MPC 优化问题 (21), 将  $u^*(k)$  作用于原非线性系统, 从而更新式 (17)、(18) 和 (21);

step 5: 由式 (23) 修正 Koopman 的线性模型 (24);

step 6: 返回 step 4.

**4 仿真验证**

为了验证所提出方法的有效性, 将其应用于海洋浮体路径跟踪控制, 搭建基于浮体实物在线的仿真平台, 浮体的物理设计参数如表 1 所示.

表1 可重构浮体的参数设计

| 符号    | 参数值      | 符号       | 参数值                        |
|-------|----------|----------|----------------------------|
| $m$   | 25.1 kg  | 尺寸       | 1m × 0.5m × 0.25 m         |
| $X_g$ | 0.001 m  | $I_x$    | 0.732 kg · m <sup>2</sup>  |
| $Y_g$ | 0.164 m  | $I_y$    | 0.047 kg · m <sup>2</sup>  |
| $Z_g$ | -0.243 m | $I_z$    | 2.075 kg · m <sup>2</sup>  |
| 驱动    | 螺旋桨推进    | $I_{xy}$ | 0.009 kg · m <sup>2</sup>  |
| 供电    | 12V 锂电池  | $I_{yz}$ | 0.015 kg · m <sup>2</sup>  |
| 续航    | 2.8 h    | $I_{zx}$ | -0.012 kg · m <sup>2</sup> |

**4.1 基于改进 Koopman 预估器有效性验证**

考虑到简化模型 (2) 中浮体质心坐标为  $(X_g, Y_g, Z_g)$ , 含附加质量系数的惯性矩阵简化为  $M = \text{diag}[m_{11}, m_{22}, m_{33}]$ . 忽略高阶流体阻尼项, 阻尼矩阵可化简为  $D = \text{diag}[D_{11}, D_{22}, D_{33}]$ . 经过参数辨识实验, 浮体的实际物理参数为:  $m_{11} = 11.89, m_{22} = -10.32, m_{33} = 17.7; D_{11} = 18.640 \text{ 3}, D_{22} = 41.066, D_{33} = 2.806$ . 简化的浮体水动力学表达式为

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{\tau_u}{m_{11}} - \frac{D_{11}}{m_{11}} v_x + \frac{m_{22}}{m_{11}} v_y \omega_z, \\ \dot{v}_y = \frac{\tau_v}{m_{22}} - \frac{D_{22}}{m_{22}} v_y - \frac{m_{11}}{m_{22}} v_x \omega_z, \\ \dot{\omega}_z = \frac{\tau_r}{m_{33}} - \frac{D_{33}}{m_{33}} \omega_z + \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_x v_y. \end{cases} \quad (25)$$

浮体运动学方程 (3) 中旋转矩阵为

$$\mathbf{R}(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在仿真实验中, 首先设置采样周期为  $T_s = 0.01 \text{ s}$ , 应用龙格-库塔法对浮体的动力学模型 (25) 进行离散化; 然后依据式 (17) 收集浮体路径跟踪控制过程的实验数据并进行提升, 根据式 (19) 求解浮体的 Koopman 线性动力学模型; 最后利用此模型设计线性 MPC 控制器 (20), 再根据算法 1 在线更新 Koopman 线性预估器的形式, 完成 MPC 控制器的设计.

首先检验改进的 Koopman 算子预估器模型 (IO-Koopman) 的准确度. 将随机参考输入信号作用于浮体, 在 200 条轨迹跟踪控制中迭代 1 000 个时

刻, 收集  $2 \times 10^5$  对数据. 根据 3.2 节方法得到线性模型后, 将周期为 0.1 s 的方波作为测试信号, 比较 IO-Koopman 与传统 Koopman 算子预估器 (Koopman) 以及局部线性化模型 (L-Koopman) 的预测效果, 结果如图 2 所示.

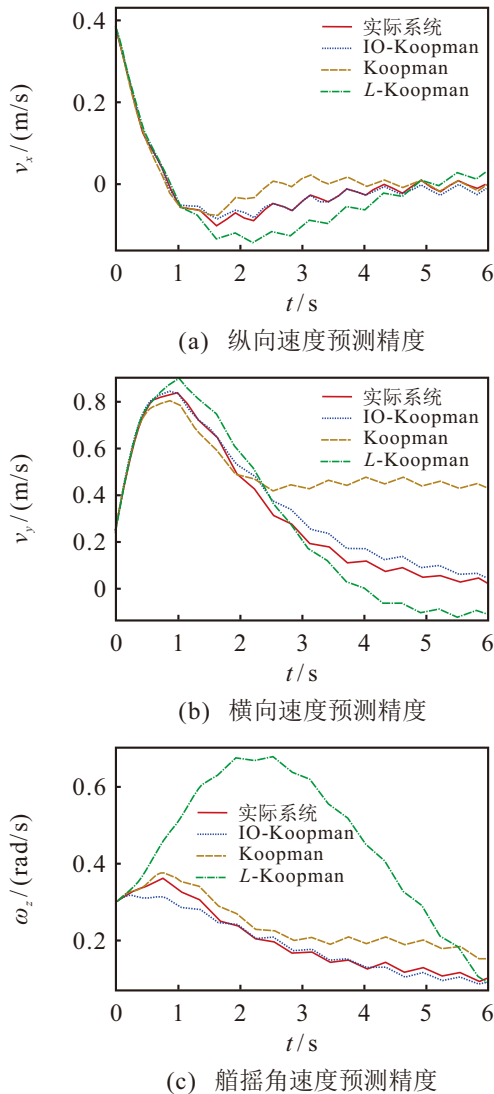


图2 改进的 Koopman 预估器与传统方法的准确度对比

$$\text{利用 RMSE} = \frac{\sqrt{\sum_k \|\hat{x}_k - x_k\|_2^2}}{\sqrt{\sum_k \|x_k\|_2^2}} \text{ 作为量化指}$$

标检验模型的准确度. 表 2 中各方法 RMSE 的对比表明, IO-Koopman 预估模型预测精度较高, 尤其预估初始阶段的状态预测准确度更显著优于其他方法.

表2 3种方法的模型精确度对比

| RMSE   | L-Koopman | Koopman   | IO-Koopman |
|--------|-----------|-----------|------------|
| 总体维度   | 0.444 412 | 0.214 512 | 0.162 972  |
| 纵向速度方向 | 0.424 636 | 0.388 181 | 0.138 355  |
| 横向速度方向 | 0.228 254 | 1.141 768 | 0.618 878  |
| 船摇速度方向 | 1.428 243 | 1.332 626 | 1.269 930  |

## 4.2 路径跟踪 IO-KMPC 控制器有效性验证

按照 3.3 节在线更新 Koopman 算子模型的 IO-KMPC 策略, 完成海洋浮体的路径跟踪控制. 规划参考路径为双扭线轨迹, 以参数方程的形式给出

$$x_g^r = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{20}\right), y_g^r = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right), \Psi^r = \frac{\pi t}{15}. \quad (26)$$

根据路径跟踪的控制目标, 采用二次型代价函数. 由于浮体推进器所提供推力的限制, 按照浮体推进器的实际物理约束反演得到控制输入的约束条件  $u_{\min} = [-70, -70, -70]^T$ ,  $u_{\max} = [70, 70, 70]^T$ .

仿真总时长为 40 s, 提升状态的初值为  $\bar{x}_0 = \psi(x_0)$ , 浮体的初始位置  $\eta_0 = [0, 0, 0]^T$ . 由轨迹方程 (26), 根据浮体运动学模型将位置信息转化为惯性坐标系下的速度信号, 得到浮体需要追踪的参考信号  $\eta^r = [x_g^r, y_g^r, \Psi^r]^T$ ,  $v^r = [v_x^r, v_y^r, \omega_z^r]^T$ . 将 IO-KMPC 与 KMPC 和基于局部线性化的 MPC (记为 LMPC) 进行对比, 其中 KMPC 与 LMPC 的权值矩阵与 IO-KMPC 选择相同的数值. 图 3 的仿真结果表明, IO-KMPC 控制器的跟踪控制效果优于 KMPC 和 LMPC,

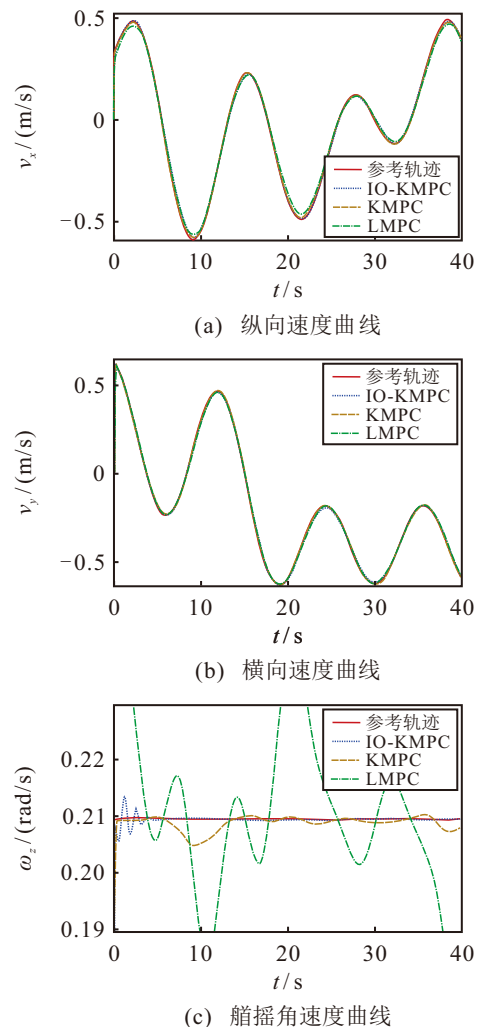


图3 浮体路径跟踪控制下的运动速度随时间演化

特别是对艏摇速度 $\omega_z$ 的跟踪, IO-KMPC可以在保持较高精确度的基础上完成运动状态的跟踪. 表3对3种方法的RMSE比较也验证了这一结论.

表3 针对轨迹(26)的跟踪控制策略的RMSE对比

| RMSE   | LMPC      | KMPC      | IO-KMPC   |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 总体维度   | 0.039 774 | 0.038 470 | 0.035 816 |
| 纵向速度方向 | 0.055 314 | 0.039 547 | 0.037 723 |
| 横向速度方向 | 0.054 774 | 0.048 410 | 0.039 547 |
| 艏摇速度方向 | 0.035 890 | 0.025 633 | 0.024 865 |

经优化算法获得控制输入, 作用于浮体运动学模型, 得到浮体在坐标系 $O_e-X_eY_eZ_e$ 下的位置信息. 图4和图5直观地对比了3种方法下路径跟踪控制效果.

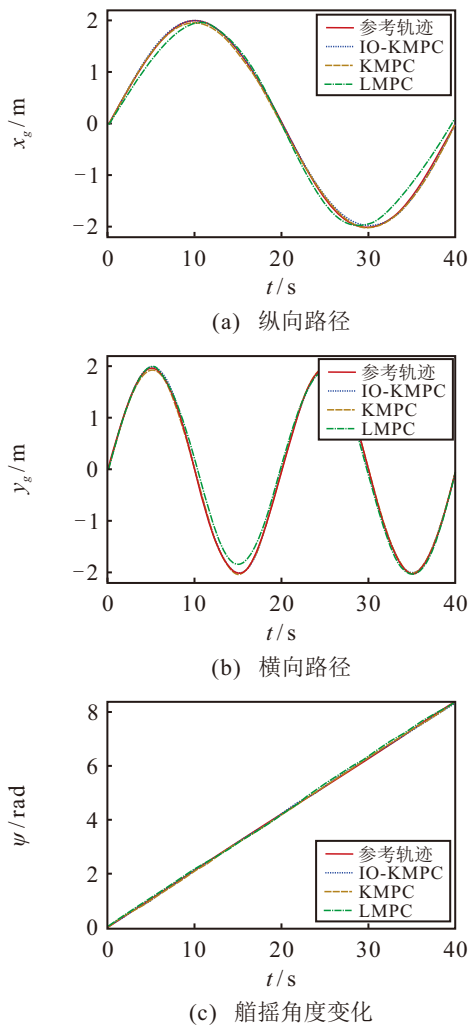


图4 浮体路径跟踪控制中各自由度的跟踪效果对比

由图6的轨迹跟踪误差可见, IO-KMPC控制器的跟踪误差明显小于KMPC和LMPC, 特别是在艏摇速度的跟踪上, 可以在整个路径跟踪过程进行较精确地控制. 同时, 3种路径跟踪控制中的最大误差对比也表明了IO-KMPC的良好控制精度, 这是满足浮体对接过程的控制要求的.

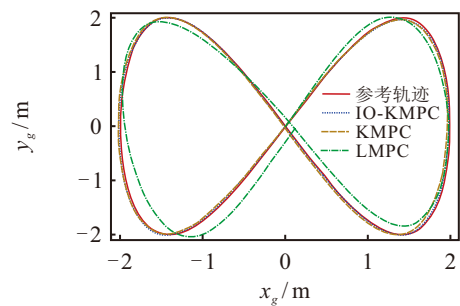


图5 浮体的双扭线路径跟踪控制效果对比

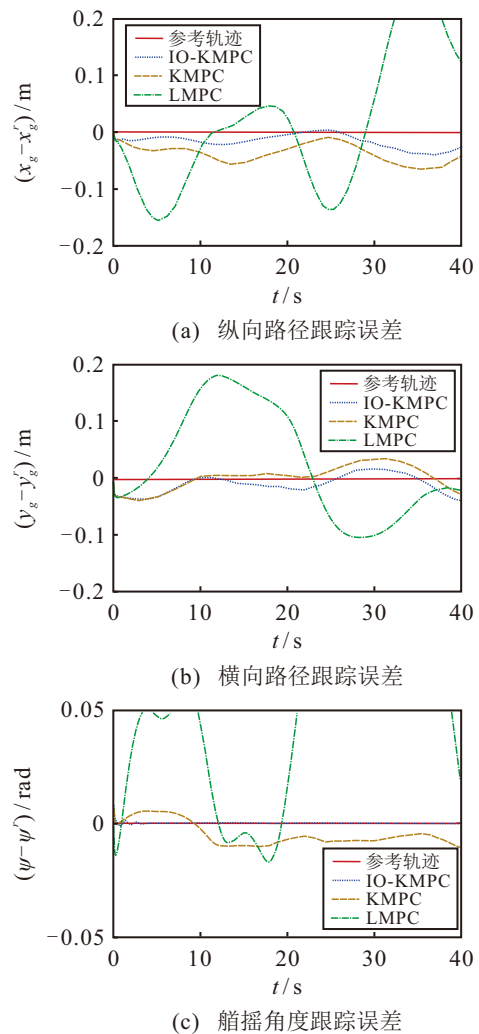


图6 浮体的双扭线路径跟踪控制中跟踪误差的时间演化

### 5 结论

针对非线性系统控制问题, 本文提出的基于改进Koopman算子理论的线性化方法, 在模型的精确度、计算速度上与传统方法相比, 都具有一定的优势. 得到的线性模型可以作为原非线性系统的状态预估器, 与预测控制算法结合作为内模在形式上具有很大的优势. 所提出的IO-KMPC可以较为灵活地处理状态的非线性约束, 只需将其纳入提升函数中. 通过引入时延状态、输入信号以及当前时刻至过去时刻的导数, 扩展了算子的可观测变量, 使得近似线性模型更加准确. 在融入MPC算法时以增量方式更

新数据流,使得更加准确的状态预测用于MPC设计,从而保证了控制的精度,且计算速度满足MPC滚动优化需求。

### 参考文献 (References)

- [1] Wang W, Shan T, Leoni P, et al. Roboat II: A novel autonomous surface vessel for urban environments[C]. International Conference on Intelligent Robots and Systems. Las Vegas, 2020: 1740-1747.
- [2] Wang W, Gheneti B, Mateos L A, et al. Roboat: An autonomous surface vehicle for urban waterways[C]. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Macau, 2019: 6340-6347.
- [3] Kim Y H, Lee S W, Yang H S, et al. Toward autonomous robotic containment booms: Visual servoing for robust inter-vehicle docking of surface vehicles[J]. *Intelligent Service Robotics*, 2012, 5(1): 1-18.
- [4] Dunbabin M, Marques L. Robots for environmental monitoring: Significant advancements and applications[J]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2012, 19(1): 24-39.
- [5] 李莉莉,董凯,郭戈. 纵向速度和艏向角受限的水面艇有限时间协同路径跟踪[J]. *控制与决策*, 2021, 36(2): 363-370.  
(Li L L, Dong K, Guo G. Finite-time cooperative path following of surface vessels with surge velocity and yaw angle constraints[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(2): 363-370.)
- [6] 王志文,辛鹏,孙洪涛,等. 基于收缩约束模型预测控制的无人车辆路径跟踪[J]. *控制与决策*, 2022, 37(3): 625-634.  
(Wang Z W, Xin P, Sun H T, et al. Unmanned vehicle path tracking based on contraction constraint model predictive control[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(3): 625-634.)
- [7] Manzoor W A, Rawashdeh S, Mohammadi A. Vehicular applications of koopman operator theory — A survey[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 25917-25931.
- [8] 贾继莹. Koopman算符在一些动力系统中的应用研究[D]. 北京: 清华大学, 2015: 5-18.  
(Jia J Y. Research on algorithm and application of koopman operator in some dynamical systems[D]. Beijing: Tsinghua University, 2015: 5-18.)
- [9] Proctor J L, Brunton S L, Kutz J N. Dynamic mode decomposition with control[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2016, 15(1): 142-161.
- [10] Jovanović M R, Schmid P J, Nichols J W. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition[J]. *Physics of Fluids*, 2014, 26(2): 024103.
- [11] Brunton S L, Brunton B W, Proctor J L, et al. Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control[J]. *PLoS One*, 2016, 11(2): e0150171.
- [12] Brunton S L, Budišić M, Kaiser E, et al. Modern koopman theory for dynamical systems[J]. *SIAM Review*, 2022, 64(2): 229-340.
- [13] Daniels B C, Nemenman I. Automated adaptive inference of phenomenological dynamical models[J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 8133.
- [14] Ye H, Beamish R J, Glaser S M, et al. Equation-free mechanistic ecosystem forecasting using empirical dynamic modeling[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2015, 112(13): E1569-E1576.
- [15] Wang J J, Xu B G, Lai J W, et al. An improved koopman-MPC framework for data-driven modeling and control of soft actuators[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2023, 8(2): 616-623.
- [16] Liu Y, Li C Y, Wang J M, et al. Koopa: Learning non-stationary time series dynamics with Koopman predictors[C]. The 37th Conference on Neural Information Processing Systems. New Orleans: NeurIPS, 2023: 12271-12290.
- [17] Wan J, Zhao S, Chang W, et al. Time-delayed koopman network-based model predictive control for the FRIBRFQ[J/OL]. 2024, arXiv: 2401.11031.
- [18] Castano M L, Hess A, Mamakoukas G, et al. Control-oriented modeling of soft robotic swimmer with koopman operators[C]. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Boston, 2020: 1679-1685.
- [19] Mamakoukas G, Castano M L, Tan X B, et al. Derivative-based koopman operators for real-time control of robotic systems[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2021, 37(6): 2173-2192.
- [20] Chen H, Lv C. Incorporating ESO into deep koopman operator modeling for control of autonomous vehicles[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2024, 32(5): 1854-1864.
- [21] Williams M O, Hemati M S, Dawson S T M, et al. Extending data-driven koopman analysis to actuated systems[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, 49(18): 704-709.
- [22] Korda M, Mezić I. Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control[J]. *Automatica*, 2018, 93: 149-160.

### 作者简介

丁博文 (1996-), 男, 硕士生, 主要研究方向为数据驱动的建模、预测控制, E-mail: [dbw18253297141@163.com](mailto:dbw18253297141@163.com);

付东飞 (1984-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为预测控制理论及其应用, E-mail: [fudongfei@ouc.edu.cn](mailto:fudongfei@ouc.edu.cn);

金志豪 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为强化学习、风机预测控制, E-mail: [21230911006@stu.ouc.edu.cn](mailto:21230911006@stu.ouc.edu.cn);

黎明 (1975-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为智能信号处理与智能控制、海洋测控技术, E-mail: [limingneu@ouc.edu.cn](mailto:limingneu@ouc.edu.cn).