

控制与决策

Control and Decision

基于Laguerre的多组分稀土萃取分布式模型预测控制

朱建勇, 张琳, 陆荣秀, 杨辉

引用本文:

朱建勇, 张琳, 陆荣秀, 等. 基于Laguerre的多组分稀土萃取分布式模型预测控制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 1005-1014.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0208>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计](#)

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements
控制与决策. 2021, 36(7): 1771-1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

[基于数据驱动的浓密-压滤过程协调优化控制](#)

Data driven coordinated optimization control of thickening-filter process
控制与决策. 2021, 36(5): 1095-1100 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1151>

[基于多维泰勒网的超前d步预测模型](#)

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network
控制与决策. 2021, 36(2): 345-354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

[基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型](#)

[Multi-component system state space partition model based on Markov process](#)
控制与决策. 2021, 36(2): 418-428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

[基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识](#)

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)
控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

基于 Laguerre 的多组分稀土萃取分布式模型预测控制

朱建勇^{1,2}, 张琳^{1,2}, 陆荣秀^{1,2}, 杨辉^{1,2†}

(1. 华东交通大学 电气与自动化工程学院, 南昌 330013; 2. 江西省先进控制与优化重点实验室, 南昌 330013)

摘要: 针对多级子工艺稀土萃取生产采用人工根据经验逐级调药的方式, 容易导致人工循环调药、生产指标波动大的问题, 提出一种基于 Laguerre 函数的分布式模型预测控制方法调节药剂量。首先, 基于多稀土组分萃取机理建立具有串联结构的分布式状态空间方程, 拓展成嵌有积分器的增广状态空间模型; 其次, 利用多组分稀土萃取中各级子工艺仅与其上游子工艺存在耦合的特点, 构造一种具有输入约束的非迭代递阶求解分布式药剂量目标优化函数; 由于采用较大的预测时域能够实现更高的控制精度, 但会急剧增大其计算量, 为此, 利用 Laguerre 函数表示控制增量, 将原目标函数转化为含有 Laguerre 系数的目标函数, 并利用二次规划进行求解。这种方法使得计算量与预测时域无关, 而仅与 Laguerre 函数的系数数量有关, 不会随着预测时域的范围改变。仿真实验表明了所提出方法的有效性。

关键词: 溶剂萃取; 预测函数; 串联过程; 状态空间; 约束处理; 分布式预测控制

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0208

引用格式: 朱建勇, 张琳, 陆荣秀, 等. 基于 Laguerre 的多组分稀土萃取分布式模型预测控制 [J]. 控制与决策, 2025, 40(3): 1005-1014.

Distributed model predictive control for multi-component rare earth extraction based on Laguerre

ZHU Jian-yong^{1,2}, ZHANG Lin^{1,2}, LU Rong-xiu^{1,2}, YANG Hui^{1,2†}

(1. School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization of Jiangxi Province, Nanchang 330013, China)

Abstract: Aiming at addressing the challenges of manual adjustment in drug dosage during multistage sub-process rare earth extraction production, as well as the significant fluctuations in production index caused by such manual adjustments, a distributed model predictive control method based on the Laguerre function is proposed. Firstly, a distributed state-space equation with series structure is established based on the extraction mechanism of multi-rare earth components, followed by the development of an augmented state-space model with embedded integrators. Secondly, a non-iterative hierarchical optimization function with input constraints is constructed to solve the distributed drug dose objective optimization function, taking advantage of the fact that the sub-process of multi-component rare earth extraction is only coupled with its upstream sub-process. Thirdly, while higher control accuracy can be achieved by using a larger prediction time domain, it also leads to significantly increased computational workload. To address this issue, the Laguerre function is utilized to represent control increment and transform the original objective function into one containing Laguerre coefficients for solution through quadratic programming. This approach ensures that computational workload remains independent of prediction time domain scope but is solely related to the number of coefficients in Laguerre function and does not change accordingly. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: solvent extraction; prediction function; cascade process; state space; constraint treatment; distributed predictive control

0 引言

稀土由镧系元素, 铈和钇等 17 种元素组成, 具

有独特的物理化学性质, 使其在许多高尖端应用领域中变得不可或缺。溶剂萃取法在提取纯化稀土过

收稿日期: 2024-03-01; 录用日期: 2024-06-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62363010); 国家自然科学基金重大项目 (61991404).

责任编辑: 刘向杰.

†通信作者. E-mail: yhshuo@163.com.

程中具有分离系数高、针对性强、连续生产等优点而在工业生产中被广泛应用,在我国被普遍认为是分离稀土的最合适技术^[1]。然而,溶剂萃取的方式在工业生产中的自动化程度极低,近些年国内稀土萃取分离过程的工业萃取现场利用比例-积分-微分(PID)的控制算法,实现了部分药剂流量的自动控制与集中调整。但是,目前仍不能完全摆脱人工给定流量的现状,导致过程控制的波动幅度较大,影响产品的质量及其稳定性^[2]。

为提高萃取分离过程中稀土组分含量的控制精度,文献[3]提出了改进的灰色关联分析即时学习算法(grey relational analysis-just in time learning-least squares support vector machine, GRA-JITL-LSSVM)用于建立稀土萃取组分含量在线检测模型。利用灰色关联分析(GRA)分析变量关联,利用哈希表确定学习集大小,建立最小二乘支持向量机(LSSVM)模型加强抗干扰能力;引入带有停滞回溯策略的遗传算法(stagnant backtracking strategy-genetic algorithm, SBS-GA)保证参数全局最优,实时性和预测精度高。文献[4]提出了一种事件触发约束模型预测控制方法,方法包括建立线性预测系统、微调反馈修正、引入约束优化函数计算试剂用量,设计事件触发机制更新控制器。文献[5]针对目前稀土铈镨/钹萃取生产过程人工控制导致生产指标波动大的问题,提出一种静态设定和动态补偿的药剂控制方法。

分布式预测控制利用局部控制策略,有效降低系统维度并实施在线滚动优化,适用于处理有约束的大型系统控制问题^[6-7],目前正在理论和应用领域受到广泛重视。文献[8]提出了一种分布式模型预测控制方法,使智能体能够在本地计算控制输入并通过通信网络与相邻智能体交流。该方法无需中心站,实现了凸模型预测控制问题的线性收敛,并提供了闭环控制器。文献[9]提出了最小信息交换式的(distribute model predictive control, DMPC)分布式预测控制 DMPC,从而实现有效的供应链管理。每个子系统利用局部的信息求解控制量,合作使得全局优化目标函数最小化。文献[10]采用分布式模型预测控制方法解决多四旋翼无人机编队在巡航飞行中队形形成和保持问题,通过领航跟随策略设计的控制器实现预设队形飞行并保证系统稳定性。但大多数优化策略忽略了算法滚动优化过程中的计算负担,严重阻碍了 MPC 在工程实践中的应用。

为使得设计控制器时可以权衡预测时域的变化对于控制性能的影响^[11-12],文献[13]提出基于 Laguerre 函数的自适应预测控制方法,提高自主水下航行器

在复杂水文条件下的轨迹跟踪性能,实现系统动态性能、抗干扰性和鲁棒性的提升并降低了计算量;文献[14]将 Laguerre 函数应用于传统的线性时变车辆模型中,以实现高性能、低计算复杂度的 MPC 自主车辆跟踪控制。目前,难见利用 Laguerre 函数研究分布式预测控制的文献。

综上所述,本文针对多组分稀土萃取工艺串级萃取且人工逐级调药的特点,结合分布式预测控制和 Laguerre 函数,提出基于 Laguerre 函数的多组分稀土萃取过程分布式预测控制技术。本文主要工作如下:

1) 针对多组分稀土萃取工艺串级关联的特点,建立具有串联结构的分布式状态空间方程,并将其拓展成嵌有积分器的增广状态空间模型,利用多组分稀土萃取中各级子工艺仅与其上游子工艺存在耦合的特点,构造了一种具有输入约束的非迭代递阶求解分布式药剂目标优化函数,算法的设计使得控制器之间只存在上游到下游的信号传递,有效地降低了控制器之间的通信负担。

2) 在分布式预测控制中,采用较大的预测时域能够实现更高的控制精度,但这会显著增加计算的复杂度。为此,利用 Laguerre 函数能够降低计算复杂度的特点,构建具有 Laguerre 函数的串级分布式预测控制算法(LF-DMPC),并给出 LF-DMPC 的详细数学表达式,包括未来预测状态、目标函数及约束变换,从而避免了预测时域对计算复杂度的影响。

1 萃取工艺描述与状态空间模型

1.1 工艺描述

多组分稀土产线的萃取过程如图 1 所示,每一段萃取槽包括 n 级萃取段和 m 级洗涤段共 $n + m$ 级组成,稀土生产针对萃取槽的第 1 级加入萃取剂,第 n 级萃取槽加入料液,第 $n + m$ 级萃取槽加入洗涤剂。由于槽体结构设计和搅拌力的影响,使得各级萃取槽中有机相从左向右流动、水相从右向左流动。稀土料液在萃取剂和洗涤剂的作用下经过逐级萃取,最后从混合稀土溶液中分离、提取所需一定纯度的单一稀土元素,萃取段第 1 级水相出口得到难萃产品,洗涤段第 $n + m$ 级有机相出口得到易萃产品,因此多组分稀土萃取过程包含多级子工艺。

1.2 基于萃取机理的稀土萃取状态空间模型

稀土串级萃取分离过程的机理模型,由高维微分方程组及非线性代数方程组构成,难以直接应用于在线控制及优化,为此,需要对模型进行简化。在 t 时刻, $x^A = [x_{i,1}^A, \dots, x_{i,n+m}^A]^T$ 表示第 i 稀土元素在

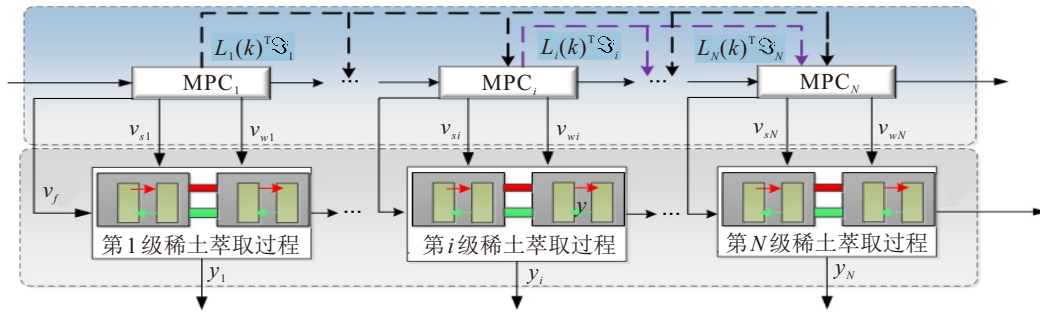


图2 多组分稀土萃取组分含量控制方案

量控制方案可表述为:多组分稀土萃取过程包含有 N 级子工艺,每级子工艺都有各自独立的输入输出,且每级子工艺仅与其上游子工艺存在串联耦合,在设计某级子工艺的 MPC 时,需要考虑其对下游子工艺输出的影响,在各级子工艺的萃取模型及相关约束条件下,引入 Laguerre 函数逼近控制器中求解得到关于各药剂流量的控制量,与此同时,将原控制器之间的信号以 Laguerre 函数的形式进行传递。

2.1 基于串联结构的稀土萃取分离分布式模型

基于以上内容的分析,基于串联结构的算法设计需要将每级子工艺的上游控制输入作为已知量代入下游子工艺的状态方程,每个子工艺仅优化自身和其上游系统的目标函数.与全局预测控制相比,串联结构算法的性能有所差距,但可以确保系统实现相应的控制目标.同时,由于只存在自上游至下游的信号传递,不存在迭代过程,从而极大地减少了控制算法对通信的负担^[18].结合式(1)得到第 i 个子工艺优化目标如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ci}(t) = A_{ci}x_{ci}(t) + B_{ci}u_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij}u_j(t), \\ y_{ci}(t) = C_{ci}x_{ci}(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci}(t) &= [\dot{x}^A \quad \dot{x}^O]^T, \\ A_{ci} &= \begin{bmatrix} H_A^{-1}F[\cdot] & O \\ O & H_o^{-1}G[\cdot] \end{bmatrix}, \\ B_{ci} &= \begin{bmatrix} 0 & H_A^{-1}L_2 & H_A^{-1}L_3 \\ H_o^{-1}L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ u_i(t) &= [v_s \quad v_f \quad v_w], \\ C_{ci} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times (n+m)}. \end{aligned}$$

$u_i(t)$ 表示第 i 级子工艺 MPC 的控制输入; $u_j(t)$ 表示前 j 级子工艺的控制输入,对第 i 级子工艺作为已知量给定; S_{ij} 表示第 i 级子工艺和第 j 级子工艺耦合的

相应系数矩阵; $y_i(t)$ 表示第 i 级水相和有机相输出的纯度.选择采样时间 T ,对模型进行离散化并写成增量形式,得到

$$\begin{cases} \Delta x_{di}(k+1) = \\ A_{di}\Delta x_{di}(k) + B_{di}\Delta u_{di}(k) + \sum_{j=1}^{i-1} S_{dij}\Delta u_{dj}(k), \\ y_{di}(k) = C_{di}x_{di}(k). \end{cases} \quad (3)$$

其中: A_{di} 、 B_{di} 、 C_{di} 、 S_{dij} 分别表示式(2)中系统矩阵的离散形式; $\Delta x_{di}(k)$ 、 $y_{di}(k)$ 、 $\Delta u_{di}(k)$ 、 $\Delta u_{dj}(k)$ 分别表示离散时间下的状态、输出、输入和上游输入.此外,本文为了考虑处理常见约束,将上述状态空间模型拓展成嵌有积分器的增广状态空间模型,即

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i \Delta u(k) + \sum_{j=1}^{i-1} S_j \Delta u_j(k), \\ y_i(k) = C_i x(k). \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} A_{di} & o_m^T \\ C_{di}A_{di} & 1 \end{bmatrix}, \quad o_m = \underbrace{[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_{n_1}; \\ B_i &= [B_{di} \quad C_{di}B_{di}]^T; \quad S_j = [S_{dij} \quad C_{di}S_{dij}]^T; \\ C_i &= [o_m \quad 1]; \\ x_i(k+1) &= [\Delta x_{di}(k+1) \quad y_{di}(k+1)]^T. \end{aligned}$$

结合增广状态空间模型,考虑控制时域等于预测时域,第 i 级子工艺的目标函数可表示为

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{m=1}^{N_p} x_i(k+m|k)^T Q x_i(k+m|k) + \\ &\quad \sum_{m=1}^{N_p} \Delta u(k+m-1|k)^T R \Delta u(k+m-1|k). \end{aligned} \quad (5)$$

其中: Q 为系统跟踪误差的权值矩阵, R 为系统输入权值矩阵, $r(k)$ 为需要跟踪设定值的参考信号, $x_i(k+m|k) = [\Delta x_i(k+m|k) \quad y(k+m|k) - r(k)]^T$. 当所选择的权值矩阵 $Q = C_i^T \cdot C_i$, 目标函数的状态项 $x_i(k+m|k)^T Q x_i(k+m|k)$ 等同于传统目标函数

中的 $\| \tilde{y}(k) - r(k) \|_Q^2$ 时, N_p 为预测时域.

结合串联分布式模型预测算法的思路, 首先对目标函数进行改变, 然后再进行以各个子工艺顺序递阶的方式来更新迭代各个子系统的状态. 针对第 i 级子工艺总的目标函数可表示为

$$\begin{aligned} \min J_i &= \sum_{l=1}^i J_l(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i; x_l(k)) = \\ \min J_i &(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i; x_i(k)). \\ \text{s.t. } x_i(k+1) &= \\ &A_i x(k) + B_i \Delta u(k) + \sum_{j=1}^{i-1} S_j \Delta u_j(k); \\ &\Delta U_i(k)_{\min} < \Delta U_i(k) < \Delta U_i(k)_{\max}; \\ &\Delta U_i(k) = [\Delta u_i(k), \Delta u_i(k+1), \dots, \\ &\quad \Delta u_i(k+N_p-1)]^T. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: u_1, \dots, u_{i-1} 为前 $i-1$ 个子工艺已知的控制输入值, 并作为已知量给第 i 个子工艺.

2.2 基于 Laguerre 函数的预测控制算法设计

现有研究表明, 针对 MPC 算法闭环稳定性的问题, 在代价函数中设计终端等式约束的方法会在预测时域足够大的条件下得到相同的效果, 从而引导预测状态轨迹在稳态过程后收敛于原点^[19-20]. 然而, 足够大的预测范围会导致在线滚动优化的最优解或次优解的计算量很大, 从而导致控制器在有限的采样时间间隔内无法实现. 为了克服这一困难, 在多组分稀土萃取分布式 MPC 中, 采用离散时间标准正交 Laguerre 函数逼近控制轨迹. Laguerre 函数是平方可积函数空间上的一组正交基, 离散时间 Laguerre 网络结构如图 3 所示, 将其 Z 变换离散化后可表示为

$$\psi_N(z, a) = \psi_1(z, a) \left(\frac{1-az}{z-a} \right)^{N-1}, \quad N=1, 2, \dots, \infty. \quad (7)$$

其中: $\psi_1(z, a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}}$, a 为 Laguerre 函数的极点, 一般极点 a 的取值范围为 $[0, 1]$.

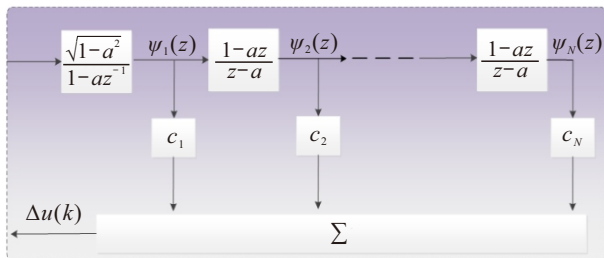


图3 离散 Laguerre 网络结构

设 l_m 表示 $\psi_m(z, a)$ 的 Z 逆变换, 则上述一组离散时间 Laguerre 函数用向量形式表示为

$$L(k) = [l_1(k) \ l_2(k) \ \dots \ l_N(k)]^T, \quad (8)$$

且式 (8) 中的初始条件为

$$L(0)^T = \sqrt{\beta} [1 - a a^2 - a^3 \ \dots \ (-1)^{N-1} a^{N-1}],$$

其中 $\beta = 1 - a^2$. 进一步得到 $L(k+1)L(k)$ 的关系为

$$L(k+1) = A_l L(k), \quad (9)$$

其中

$$A_l = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & a & 0 & \dots & 0 \\ -a\beta & \beta & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a^{N-2}\beta & a^{N-3}\beta & \dots & \beta & a \end{bmatrix}.$$

离散时间 MPC 设计的核心技术本质上是基于对未来控制轨迹的优化, 即通过求解优化问题得到控制信号的差值 $\Delta u(k)$. 因此, MPC 在采样时刻 k 处, 基于 Laguerre 函数求序列 $\Delta u(k)$ 可以通过式 (8) 中定义的一组 Laguerre 函数和通过求解优化问题获得的一组系数 \mathfrak{S} 的乘积求得, 即

$$\Delta u(k) = L(k)^T \mathfrak{S}. \quad (10)$$

其中: $\mathfrak{S} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T$, N 为序列系数的个数. 将式 (4) 迭代 m 次并重新表述为基于 Laguerre 函数的形式, 有

$$\begin{cases} x_i(k+m|k) = \\ A_i^m x_i(k) + \sum_{h=0}^{m-1} A_i^{m-h-1} B_i L(h)^T \mathfrak{S} + \\ \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{i-1} A_i^{m-h-1} S_j L_j(h) \mathfrak{S}_j, \\ y_i(k+m|k) = C A_i^m x_i(k). \end{cases} \quad (11)$$

定义 $\varphi_i(m)^T = \sum_{h=0}^{m-1} A_i^{m-h-1} B_i L(h)^T$, $\psi_{ij}(m) = \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{i-1} A_i^{m-h-1} S_j L_j(h) \mathfrak{S}_j$, 式 (11) 可以表示为

$$\begin{cases} x_i(k+m|k) = A_i^m x_i(k) + \varphi_i(m)^T \mathfrak{S} + \psi_{ij}(m), \\ y_i(k+m|k) = C A_i^m x_i(k). \end{cases} \quad (12)$$

结合式 (12) 中给出的预测状态变量, 第 i 级子工艺的目标函数 (6) 重新表述为基于 Laguerre 函数并转化为标准二次规划形式:

$$J = \mathfrak{S}^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \varphi_i(m) Q \varphi_i(m)^T + R_L \right) \mathfrak{S} +$$

$$2\mathfrak{S}^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \varphi_i(m) Q(A^m x_i(k) + \psi_{ij}(m)) \right) +$$

$$\sum_{m=1}^{N_p} (A^m x_i(k) + \psi_{ij}(m))^T Q(A^m x_i(k) + \psi_{ij}(m)).$$

s.t. $x_i(k+m|k) = A_i^m x_i(k) + \varphi_i(m)\mathfrak{S} + \psi_{ij}(m);$

$$\Delta U_i(k)_{\min} < L(h)^T \mathfrak{S} < \Delta U_i(k)_{\max}. \quad (13)$$

其中: $R_L = \sum_{m=1}^{N_p} L(m-1)^T R L(m-1)$, 且式中第3项 $\sum_{m=1}^{N_p} (A^m x_i(k) + \psi_{ij}(m))^T Q(A^m x_i(k) + \psi_{ij}(m))$ 为常量.

由式(11)~(13)可明显看出, 引入Laguerre函数可以将在线优化中的决策变量固定在一个常数值, 无论预测时域如何变化, 待求解的系数 \mathfrak{S} 中的数值 N 都是固定的, 能够有效降低预测时域带来的数值压力, 本文所提出方法解决了计算复杂度和内存需求的问题, 同时结合串联结构的分布式控制方案, 又能降低系统的维度和子系统之间的通信负担.

基于上述, 首先结合多组分稀土萃取串级关联的特点建立分布式预测模型, 以各级子工艺顺序递进的通信模式代替同步迭代更新的模式, 与此同时, 利用Laguerre函数逼近每级子工艺MPC控制器的控制轨迹并将其作为控制器之间的传递信号, 使得计算复杂度降低. 本文所提出多组分稀土萃取DMPC控制方法, 第 i 级子工艺优化目标的实现步骤如下.

step 1: 初始化 $i+1$, 预测时域为 N_p , 子工艺的数量为 Ω .

step 2: 给出萃取纯度的设定值 $r(k)$, 根据式(13)求解第 i 级子工艺的最优系数序列 \mathfrak{S} .

step 3: 利用求取的系数序列和Laguerre函数逼近当前采样时刻的控制输入.

step 4: 当 $i < \Omega$ 时, 将 $j = 1, 2, \dots, i$ 的控制输入 $u_j(k) = L_j(k)^T \mathfrak{S}_j$ 传递到第 $i+1$ 级子工艺, 返回到step 2; 当 $i = \Omega$ 时, 算法结束.

3 算法稳定性证明

为证明所提出算法的稳定性, 利用李雅普诺夫方法选取各级子工艺的目标函数作为Lyapunov候选函数, 为保证优化问题的可行性和分布式系统的稳定性, 提出如下定理和假设.

假设1 在最优控制律 $u_i(k) = L(k)^T \mathfrak{S}$ 的作用下, 使得预测的增广状态向量 $x_i(k+N_p|k)^T Q x_i(k+N_p|k)$ 的终值为零.

注1 假设1是保证系统最后能够稳定的关键, 假设在滚动优化的预测时域步长的终端处增广状态

向量为零, 能够确保预测输出跟踪上给定的参考信号.

假设2 对于串级关联的多组分稀土萃取系统, 各级子工艺接收前级子工艺控制输入后的第1个采样时刻, 通过求解满足输入约束条件的目标函数(13)都能得到最优的参数序列 \mathfrak{S} .

命题1 在假设1和假设2成立的条件下, 基于Laguerre函数的分布式预测控制算法使得串级关联的稀土萃取系统渐近稳定.

证明 选取目标函数(13)作为Lyapunov候选函数, 有

$$V_i^*(k) = \min J(x_i(k), \mathfrak{S}_i^*) =$$

$$\min \sum_{m=1}^{N_p} x_i(k+m|k)^T Q x_i(k+m|k) + \mathfrak{S}_i^{*kT} R_L \mathfrak{S}_i^{*k}. \quad (14)$$

由式(14)可知, 当 $x_i(k)$ 趋于无穷时, $V_i^*(k)$ 也趋于无穷, 因此 \mathfrak{S}_i^{*k} 是 k 时刻求得的最佳Laguerre系数, 进而在下一个采样时刻 \mathfrak{S}_i^{*k+1} 处, Lyapunov候选函数变为

$$V_i^*(k+1) =$$

$$\sum_{m=1}^{N_p} x_i(k+m+1|k+1)^T Q \times$$

$$x_i(k+m+1|k+1) + \mathfrak{S}_i^{*k+1T} R_L \mathfrak{S}_i^{*k+1}. \quad (15)$$

选取式(14)在 k 时刻的最优Laguerre系数作为式(15)中在 $k+1$ 时刻的可行解, 其中 $x_i(k+1)$ 为 $k+1$ 时刻的初始状态向量且与 $x_i(k)$ 有关, 因此通过将控制信号 $\sum_{m=1}^{N_p} \Delta u_i(k+m-1)$ 向左移一个时刻并将最后的元素替换为零, 可以得到在 $k+1$ 时刻处可行的控制序列, 即

$$[L(0)^T \mathfrak{S}_i, L(1)^T \mathfrak{S}_i, \dots, L(N_p-1)^T \mathfrak{S}_i] \rightarrow$$

$$[L(1)^T \mathfrak{S}_i, L(2)^T \mathfrak{S}_i, \dots, L(N_p-1)^T \mathfrak{S}_i, 0]. \quad (16)$$

设在 $k+1$ 时刻处可行的控制序列对应的Lyapunov候选函数为 $\tilde{V}_i(k+1)$, 由于 \mathfrak{S}_i^{*k} 系数的最优性, 有

$$V_i^*(k+1) \leq \tilde{V}_i(k+1). \quad (17)$$

不等式(17)恒成立, 再将式(17)两边同时减去 $V_i^*(k)$, 得

$$V_i^*(k+1) - V_i^*(k) \leq \tilde{V}_i(k+1) - V_i^*(k). \quad (18)$$

在采样时刻 $k+1$ 到 $k+N_p-1$ 处, $\tilde{V}_i(k+1)$ 的控制向量和状态向量与 $V_i^*(k)$ 的状态向量相匹配, 因此可得

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i(k+1) - V_i^*(k) = & \\ & - x_i(k+1)^T Q x_i(k+1) + \\ & x_i(k+N_p|k)^T Q x_i(k+N_p|k) - \mathfrak{S}_i^{*k^T} R_L \mathfrak{S}_i^{*k}. \end{aligned} \quad (19)$$

根据假设1, 式(19)可变为

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i(k+1) - V_i^*(k) = & \\ & - x_i(k+1)^T Q x_i(k+1) - \mathfrak{S}_i^{*k^T} R_L \mathfrak{S}_i^{*k}. \end{aligned} \quad (20)$$

因此, 结合式(18)、(20)可知

$$\begin{aligned} V_i^*(k+1) - V_i^*(k) \leq & \\ & - x_i(k+1)^T Q x_i(k+1) - \mathfrak{S}_i^{*k^T} R_L \mathfrak{S}_i^{*k} < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)可得系统是渐近稳定的。

综上所述, 本文所提出的基于串联结构的分布式控制方案与Laguerre函数逼近相配合, 满足了算法可行性和闭环稳定性的要求。□

4 仿真结果与分析

本节首先通过仿真实验来验证模型的准确性, 然后通过两部分实验来验证所提出方法的有效性: 一是稀土元素出口组分含量跟踪控制实验, 二是预测时域及Laguerre系数数量 N 的选取对于控制器影响的对比实验。

4.1 模型仿真验证

为了检验所建立的稀土萃取模型与真实稀土萃取过程, 在相同的工况条件和输入条件下, 输出之间的一致性需要进行对比实验。在仿真过程中, 以实际生产数据作为模型的输入量, 模型计算结果与实际生产过程的测量数据进行对比。以4组分稀土(La、Ce、Pr、Nd)萃取分离为例, 整个萃取流程共48级, 并从第1级加萃取剂, 第25级添加稀土料液, 第48级添加洗涤剂, 主要输入量和边界条件如表1所示。

表1 输入量和边界条件

输入量		边界条件	
$v_s/(L/min)$	89.72	$x_{i,n+m+1}^A/(mol/L)$	0.1
$v_f/(L/min)$	19.84	$x_{i,0}^O/(mol/L)$	0.1
$v_w/(L/min)$	5.67	$x_{i,F}$	2.31
		α_c	1.3
		α_d	1.13

模型逐级计算4组分稀土元素在各萃取级的水相和有机相中浓度静态分布仿真曲线如图4和图5所示。可以看出, 模型计算得到4种稀土元素的浓度值在水相和有机相都有不同程度的富集, 此外, 图4和图5中通过计算可以得到La、Ce、Pr、Nd在水相和有机相中模型计算值与实际测量值的平均相对误差分别为3.82%、2.16%; 4.02%、4.25%; 4.7%、5.29%; 3.62%、3.02%。由此可以得出, 模型的逐级计算结

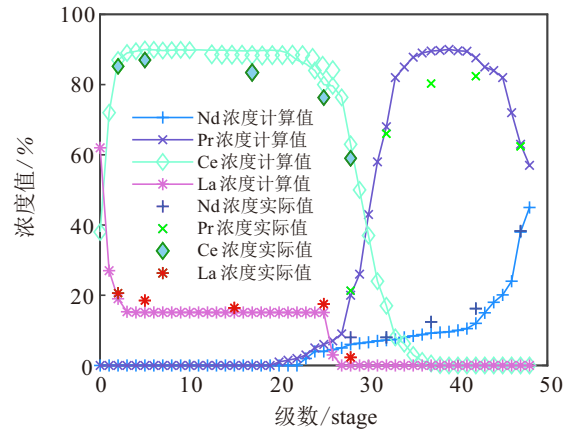


图4 水相稀土元素摩尔浓度计算值与实际值分布情况

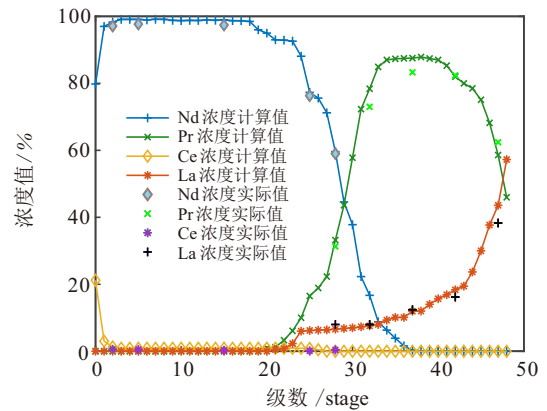


图5 有机相稀土元素摩尔浓度计算值与实际值分布情况
果与实际测量值相差不大, 在实际生产允许范围内。

4.2 组分含量跟踪控制

本节以国内某稀土生产企业4组分稀土萃取生产工艺为对象, 基于实际运行数据对稀土元素组分含量控制方法的有效性进行仿真验证, 主要模型参数如表2所示。

表2 模型参数

参数	工序 I	工序 II	工序 III
$x_{i,F}$	1.27	2.31	1.35
$h_{A,j}/L$	14.7	29.4	15.5
$h_{O,j}/L$	2.6	6.8	3.3
$v_s/(L/min)$	43.58	89.72	46.45
$v_f/(L/min)$	21.58	19.84	15.77
$v_w/(L/min)$	1	5.67	0.45
α_c	1.3	1.3	1.3
α_d	1.13	1.13	1.13
$x_{i,n+m+1}^A/(mol/L)$	0.1	0.1	0.1
$x_{i,0}^O/(mol/L)$	0.1	0.1	0.1
T/s	0.1	0.1	0.1
萃取级数	13	25	15
洗涤级数	9	23	11

此外, 通过对稀土生产企业的历史数据进行统计分析, 得到式(6)中各级子工艺设定值 $\Delta U = \{\Delta U_{v_s} \sim \Delta U_{v_w}\}$ 的边界为

$$\begin{cases} -10 \text{ L/min} \leq \Delta U_{v_s} \leq 10 \text{ L/min}, \\ -5 \text{ L/min} \leq \Delta U_{v_f} \leq 5 \text{ L/min}, \\ -0.2 \text{ L/min} \leq \Delta U_{v_w} \leq 0.2 \text{ L/min}. \end{cases} \quad (22)$$

为验证所提出方法的有效性, 本文将分散式 MPC (decentralized MPC)、集中式 MPC (CMPC)、基于 Laguerre 函数的 DMPC 算法 (LF-DMPC) 的仿真结果进行对比, 本节中控制器的参数如表 3 所示, 其中分散式和集中式 MPC 的基本参数设置 (即预测时域和控制输入权重矩阵) 与分布式 MPC 相同。

表3 控制器参数设置

级数	a	N	N_p	R
工序 I	0.8	20	40	diag(0.01, 0.1, 0.07)
工序 II	0.8	20	40	diag(0.01, 0.1, 0.05)
工序 III	0.8	20	40	diag(0.01, 0.02, 0.01)

与 LF-DMPC 相比, 分散式 MPC 忽略了相邻子工艺之间的数据通信, 集中式控制则是在代价函数中考虑了所有子工艺的控制变量, 在系统矩阵中具有更高的维数, 3 种算法跟踪效果的仿真曲线如图 6 和图 7 所示。

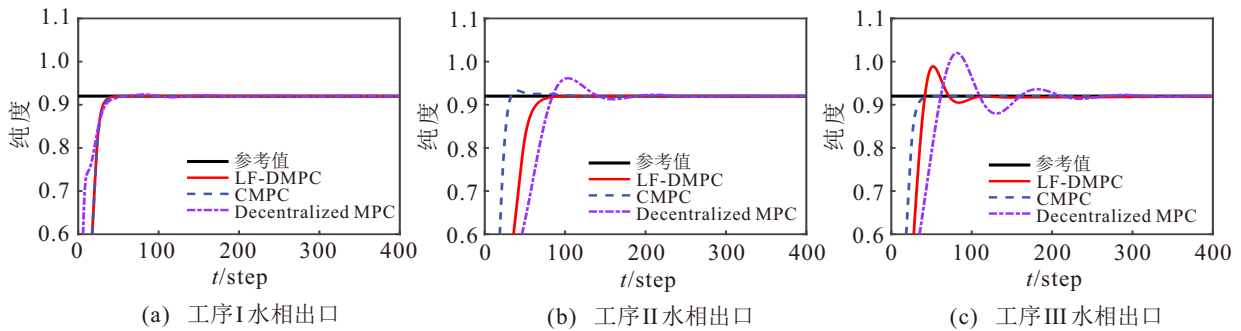


图6 各子工艺有机相出口组分含量跟踪曲线

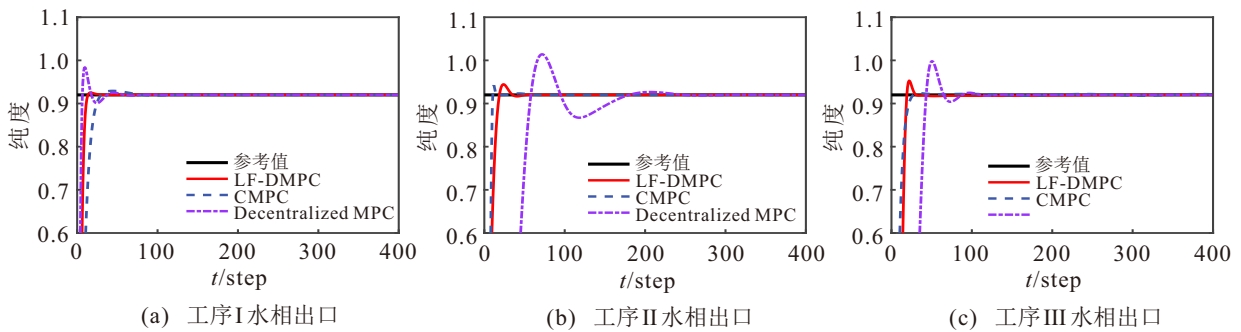


图7 各子工艺水相出口组分含量跟踪曲线

仿真结果表明 3 种算法最后都能跟踪上设定值, 其中 LF-DMPC 和 CMPC 两种算法的组分含量跟踪曲线差异及收敛到设定值的时间差异较小, 表明本文所提出的 LF-DMPC 与集中式控制方案相比具有足够令人满意的控制性能。然而在分散式的组分含量跟踪控制过程中, 除第 1 级子工艺的控制曲线能够较快地跟踪上设定值外, 后续工艺的控制曲线变化幅度较大, 出现较大超调量, 调节时间也更长, 这是因为分散式控制没有考虑子工艺之间的通信, 前级工艺的状态变化情况对于后级工艺的控制变量的影响是缓慢的, 从而出现明显的性能下降。

4.3 预测时域及系数数量 N 对控制性能的影响

为探究预测时域对 MPC 控制性能的影响, 以第 1 级和第 2 级水相口输出为例, 图 8 和图 9 给出了本文方法在 4 种不同预测时域下的组分含量跟踪误差率。

仿真结果表明: 随着预测时域的增加, 图 8 中可得控制曲线的调节时间变短, 系统输出收敛到设定值的速度会加快, 并且误差率也随着逐渐降低; 图 9 中虽然控制曲线的跟踪性能在某些采样时刻中随着预测时域的增加有所下降, 但对应 $N_p = 20$ 与 $N_p =$

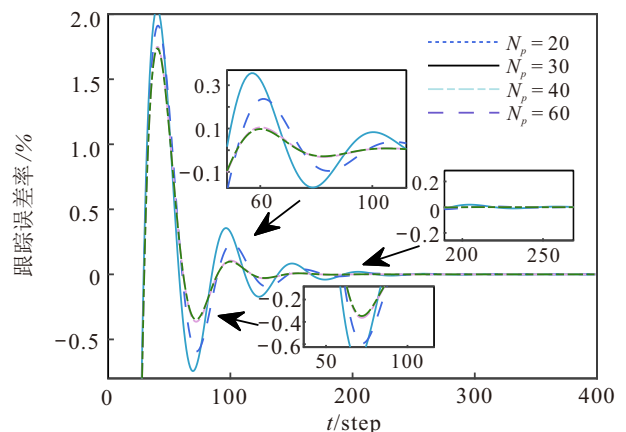


图8 各预测时域下第 1 级水相组分含量跟踪误差率

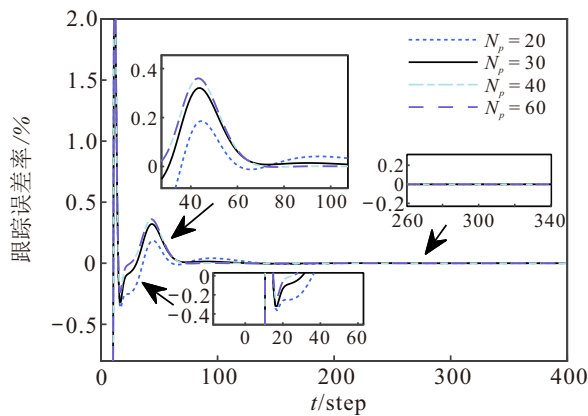


图9 各预测时域下第2级水相组分含量跟踪误差率

60在某一时刻中误差率最大也仅相差了0.2%左右,而调节时间却极大地减少,可以认为系统的控制性能逐渐变好. 预测时域的增加会使滚动优化求解过程中考虑的预测信息变多,控制器对外界环境未知变化的反应更快,由此影响系统的输出快速收敛到设定值. 仅增大预测时域,每个采样时刻的在线计算时间也会明显增长,而本文方法能够在采用较大预测时域而不显著增加控制器计算量的前提下,使得系统获得更好的控制性能.

为进一步探究序列 \mathcal{S} 中不同数量的决策变量对于控制增量变化曲线的逼近效果,以第1级工艺的萃取剂流量的控制增量为例,在能保证系统稳定的基础上,与传统MPC进行了比较,仿真结果见图10.

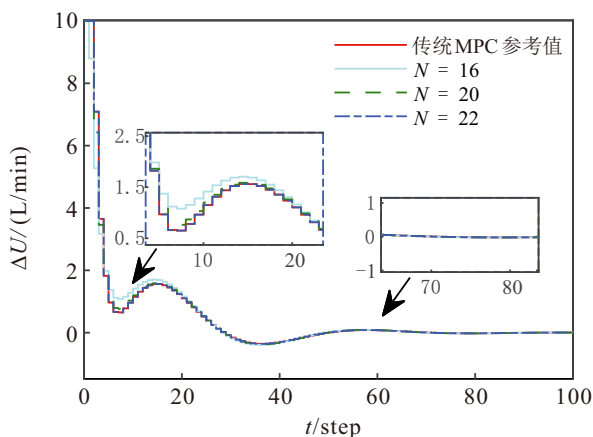


图10 不同N下的第1级萃取剂流量增量控制曲线

仿真结果表明,在 $N = 16$ 和 $N = 20$ 时,第2级有机相组分含量输出曲线仍存在一定差异. 但是,当 $N = 20$ 和 $N = 22$ 时,两条曲线几乎重合. 此外,当 $N = 20$ 时的控制增量曲线的轨迹收敛于传统MPC的曲线轨迹. 因此,可以得出结论,本文所提出方法的MPC控制增量轨迹随着 N 的增加而收敛,最终与传统的MPC控制轨迹重合且输入控制增量曲线的逼近精度高度依赖于Laguerre系数数量的选择. 为

此,找到一个合适的 N 值,实现最优的控制性能是本文MPC控制器设计中最重要任务之一.

图11举例说明了在不同的预测时域下,利用本文提出的LF-DMPC与Conventional DMPC及基于Laguerre的集中式MPC(LF-CMPC)的计算时间比较结果,能够明显看出,Conventional DMPC方法的计算时间随着 N_p 的增加呈指数级增加,显然当预测时域略大时,由于在线计算的时间过长,常规控制的滚动优化问题的求解变得不可行,这种控制手段在传统CMPC上更加难以实现. 本文所提出方案的计算时间一直呈平缓线性增加,这是由于滚动优化过程中决策变量的维数被限制,在每个采样时刻MPC的计算复杂度大大降低.

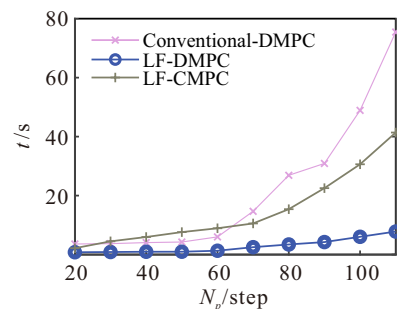


图11 不同MPC方案在线计算时间比较

5 结论

为实现多组分稀土萃取过程组分含量的稳定控制,本文提出了一种基于Laguerre的多组分稀土萃取分布式模型预测控制方法. 首先,基于多组分稀土萃取过程的串联结构,构造了非迭代递阶求解分布式目标优化函数,降低了控制器之间的通信负担;其次,与传统求解方法相比,本文将传统滚动优化过程转化为基于Laguerre形式的线性约束二次规划问题,显著降低了计算复杂度,提高了算法的工程实用性.

参考文献 (References)

- [1] 冯宗玉, 王猛, 赵龙胜, 等. 稀土元素萃取分离提纯技术发展现状与展望[J]. 中国稀土学报, 2021, 39(3): 469-478. (Feng Z Y, Wang M, Zhao L S, et al. Development status and prospect of rare earth extraction and separation technology[J]. Journal of the Chinese Society of Rare Earths, 2021, 39(3): 469-478.)
- [2] 廖春生, 程福祥, 吴声, 等. 串级萃取理论发展与稀土分离工业技术进步[J]. 中国稀土学报, 2022, 40(6): 909-919. (Liao C S, Cheng F X, Wu S, et al. Development of countercurrent extraction theory and technological progress in rare earth separation industry[J]. Journal of the Chinese Society of Rare Earths, 2022, 40(6): 909-919.)

- [3] 陆荣秀, 邓彪, 杨辉, 等. 基于改进的 GRA-即时学习算法的镨/钕元素组分含量预测[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 458-466.
(Lu R X, Deng B, Yang H, et al. Prediction of Pr/Nd component content based on improved GRA-just-in-time learning algorithm[J]. Control and Decision, 2024, 39(2): 458-466.)
- [4] Zhang Z Y, Zhu J Y, Xiong C, et al. Constrained model predictive control based on event triggering for the rare earth extraction process[J]. ACS Omega, 2023, 8(44): 41943-41952.
- [5] 朱建勇, 杨辉, 陆荣秀, 等. 基于静态设定和动态补偿的铈镨/钕萃取过程药剂量优化控制[J]. 自动化学报, 2019, 45(6): 1186-1197.
(Zhu J Y, Yang H, Lu R X, et al. Static setting and dynamic compensation based optimal control for the flow rate of the reagent in CePr/Nd extraction process[J]. Acta Automatica Sinica, 2019, 45(6): 1186-1197.)
- [6] Schwenzer M, Ay M, Bergs T, et al. Review on model predictive control: An engineering perspective[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2021, 117(5): 1327-1349.
- [7] Babayomi O, Zhang Z B, Dragicevic T, et al. Smart grid evolution: Predictive control of distributed energy resources — A review[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2023, 147: 108812.
- [8] Shorinwa O, Schwager M. Distributed model predictive control via separable optimization in multiagent networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2024, 69(1): 230-245.
- [9] Fu D F, Zhang H T, Dutta A, et al. A cooperative distributed model predictive control approach to supply chain management[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(12): 4894-4904.
- [10] 赵超轮, 戴邵武, 赵国荣, 等. 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1763-1771.
(Zhao C L, Dai S W, Zhao G R, et al. Formation control of multi-UAV based on distributed model predictive control algorithm[J]. Control and Decision, 2022, 37(7): 1763-1771.)
- [11] Hu J C, Ding B C. Output feedback MPC for nonlinear system in large operation range[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(12): 7903-7910.
- [12] Yu S Y, Qu T, Xu F, et al. Stability of finite horizon model predictive control with incremental input constraints[J]. Automatica, 2017, 79: 265-272.
- [13] Wang W R, Yan J H, Wang H, et al. Adaptive MPC trajectory tracking for AUV based on Laguerre function[J]. Ocean Engineering, 2022, 261: 111870.
- [14] Jeong D, Choi S B. Tracking control based on model predictive control using laguerre functions with pole optimization[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(11): 20652-20663.
- [15] 贾文君. 稀土萃取过程建模与智能优化控制方法的研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2007.
(Jia W J. Study on modeling and intelligent optimization control method of rare earth extraction process[D]. Shenyang: Northeastern University, 2007.)
- [16] 贾文君, 柴天佑. 稀土串级萃取分离过程的双线性模型及其参数辨识[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 717-723.
(Jia W J, Chai T Y. Bilinear model of rare earth cascade extraction process and its parameter identification[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(5): 717-723.)
- [17] Yeow Y L, Doan H A N, Doan P A N. A simplified method of obtaining the backmixing coefficient of a solvent extraction column from tracer pulse data[J]. Chemical Engineering Science, 2005, 60(11): 2871-2877.
- [18] 蔡星, 谢磊, 苏宏业, 等. 基于串联结构的分布式模型预测控制[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 510-518.
(Cai X, Xie L, Su H Y, et al. Distributed model predictive control based on cascade processes[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 510-518.)
- [19] Mayne D Q. Model predictive control: Recent developments and future promise[J]. Automatica, 2014, 50(12): 2967-2986.
- [20] Berberich J, Köhler J, Müller M A, et al. Data-driven model predictive control with stability and robustness guarantees[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(4): 1702-1717.

作者简介

朱建勇 (1977-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为复杂工业过程控制与优化、大数据分析, E-mail: zhujyemail@163.com;

张琳 (1998-), 男, 硕士生, 主要研究方向为复杂工业过程控制与优化, E-mail: 1363023718@qq.com;

陆荣秀 (1976-), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂系统建模、控制与优化, E-mail: rxlu_ecjtu@163.com;

杨辉 (1965-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程建模、控制与优化, E-mail: yhshuo@163.com.