

控制与决策

Control and Decision

一类耦合液位系统的固定时间控制

许涛, 于海生, 于金鹏

引用本文:

许涛, 于海生, 于金鹏. 一类耦合液位系统的固定时间控制[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 1035-1042.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0295>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

控制与决策. 2021, 36(8): 1955-1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 H_{∞} 控制

Non-fragile H_{∞} control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087-1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609-618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173-179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97-104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

一类耦合液位系统的固定时间控制

许涛^{1,2}, 于海生^{1,2†}, 于金鹏^{1,2}

(1. 青岛大学自动化学院, 山东 青岛 266071; 2. 山东省工业控制重点实验室, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对一类耦合液位系统, 提出一种基于端口受控哈密顿系统模型的固定时间控制策略。首先, 从物料平衡角度选择哈密顿函数, 构建耦合液位系统的端口受控哈密顿系统模型; 然后, 基于一种新型目标哈密顿函数, 结合匹配条件设计固定时间控制器, 使得系统在固定时间收敛在稳定域; 接着, 提出一种目标结构矩阵参数整定方法, 以降低控制器求解过程的复杂度, 并给出目标矩阵参数与收敛时间之间的内在关联; 最后, 结合 L_2 增益干扰抑制理论, 设计全局固定时间 H_∞ 控制器。所提出控制方法能够更好地实现设定值跟踪, 具有较好的鲁棒性, 控制器更为简洁。通过仿真结果验证了该控制策略的有效性。

关键词: 非线性系统; 固定时间控制; 端口受控哈密顿系统模型; 耦合液位控制系统; H_∞ 控制

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0295

引用格式: 许涛, 于海生, 于金鹏. 一类耦合液位系统的固定时间控制 [J]. 控制与决策, 2025, 40(3): 1035-1042.

Fixed-time control for a class of coupled liquid level systems

XU Tao^{1,2}, YU Hai-sheng^{1,2†}, YU Jin-peng^{1,2}

(1. College of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. Shandong Key Laboratory of Industrial Control Technology, Qingdao 266071, China)

Abstract: A fixed-time control strategy based on the port controlled Hamiltonian system model (PCHSM) is proposed for a class of coupled liquid level systems. The Hamiltonian function is selected from the perspective of material balance and the PCHSM is constructed for the coupled liquid level systems. The fixed-time controller is designed based on a novel objective Hamiltonian function, combined with matching conditions, to enable the system to converge in the stable domain within the fixed time. The method for tuning the parameters of the target structure matrix is proposed to reduce the complexity of the controller solving process, and the intrinsic correlation between the target matrix parameters and convergence time is provided. Based on the L_2 gain disturbance attenuation theory, the global fixed-time H_∞ controller is designed. The proposed control method can better achieve set-points tracking, has good robustness, and the controller is more concise. The effectiveness of the control strategy is verified through simulation results.

Keywords: nonlinear systems; fixed-time control; port-controlled Hamiltonian system model; coupled liquid level control system; H_∞ control

0 引言

耦合液位控制系统在轧机浇铸、核能开发和利用、有色金属浮选、化学化工等工业过程中被广泛应用, 其具有的强耦合、非线性、大时滞、大惯性、参数时变等特点所导致的控制难题, 引起了许多学者的广泛关注。许多先进控制方法已取得了不菲的成就, 如: 基于情感学习的多点跟踪控制^[1]、分数阶 PID

控制^[2]、反馈线性化方法^[3]、滑模控制^[4]、能量成形控制^[5]。在工业生产过程中, 既要使得控制目标到达并稳定在平衡点, 又要兼顾经济性, 这需要将收敛时间控制在相应的范围内。

有限时间稳定性的研究可追溯至 1963 年^[6]。有限时间控制技术具有收敛速度快、抗干扰能力强、精度高等优点。目前已提出许多方法来实现有限时间

收稿日期: 2024-03-21; 录用日期: 2024-07-24.

基金项目: 教育部“长江学者奖励计划”特聘教授项目 (T2022265); 国家自然科学基金项目 (62273189, 61973179); 山东省自然科学基金项目 (ZR2021MF005).

责任编辑: 关新平.

†通信作者. E-mail: yu.hs@163.com.

控制,包括终端滑模控制^[7]、神经网络^[8]、反步控制^[9]等。最近,文献[10]提出了一种有限时间命令滤波反步方法,文献[11]提出了一种基于神经网络的分布式自适应有限时间控制方案,文献[12]提出了一种用于欠驱动自主水面车辆运动路径跟随的有限时间反步控制。

尽管有限时间稳定性研究成果斐然,但是,其收敛时间依赖于系统的初始状态,而系统的初始状态在大量的实际工程中并不能精确测量,这促使了固定时间稳定性控制的形成。文献[13]针对机械臂系统力/位混合控制问题,提出了一种固定时间模糊自适应阻抗控制方法;文献[14]提出了一种适用于四旋翼机的鲁棒自适应固定时间滑模控制策略;文献[15]提出了一种基于非奇异快速终端滑模的固定时间分布式协同控制方案。为了实现一个更为简单的固定时间控制,端口受控哈密顿系统模型以及相关理论引起了学者们的注意。

端口受控哈密顿理论基于能量变换的观点,将能量函数作为 Lyapunov 函数,具有更加明晰的物理意义,其稳定性分析也更为直观简洁。因此,端口受控哈密顿理论已广泛应用于过程控制、水下无人艇、多轴机器人等。文献[16]研究了系统的全局有限时间稳定性;文献[17]针对无人艇,基于端口哈密顿模型提出了一种固定时间跟踪控制方案;文献[18]研究了一种有限时间扰动观测器;文献[19]针对磁悬浮系统提出了一种基于扰动补偿技术的新型自适应固定时间控制器。这些研究方法均非常有效,但是,很少应用于多容液位控制系统中。多容液位控制系统固有的复杂非线性给固定时间稳定性问题的求解带来了诸多不便。

针对以上讨论,本文针对一类耦合液位控制系统,提出一种固定时间控制方法。本文的主要内容如下:1)建立一类耦合液位控制系统的端口受控哈密顿模型;2)设计一类目标哈密顿函数,基于端口受控哈密顿原理提出一种针对耦合液位控制系统的固定时间 H_∞ 控制律;3)提出一种目标结构矩阵参数整定方法,减少满足控制器匹配条件的复杂度。

1 问题和引理

1.1 含扰动的耦合液位控制系统流体模型

考虑如图1所示的耦合液位控制系统,其模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gx_1} + \frac{1}{A_1}\frac{a_5}{a_5+a_8}u_1 + \kappa_1\omega, \\ \dot{x}_2 = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gx_2} + \frac{1}{A_2}\frac{a_6}{a_6+a_7}u_2 + \kappa_2\omega, \\ \dot{x}_3 = \frac{a_1}{A_3}\sqrt{2gx_1} - \frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gx_3} + \\ \quad \frac{1}{A_3}\frac{a_7}{a_6+a_7}u_2 + \kappa_3\omega, \\ \dot{x}_4 = \frac{a_2}{A_4}\sqrt{2gx_2} - \frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gx_4} + \\ \quad \frac{1}{A_4}\frac{a_8}{a_5+a_8}u_1 + \kappa_4\omega. \end{cases} \quad (1)$$

其中:状态变量 x_i 和 A_i ($i=1,2,3,4$),分别为容罐 i 的液位高度 h_i 和横截面积; u_j ($j=1,2$)为电控泵 pump_j 的输出流量; a_k ($k=1,2,\dots,8$)为阀门 mv_k 的横截面积; ω 为 L_2 意义下的系统扰动; κ_i ($i=1,2,3,4$)为相应扰动的权重系数。

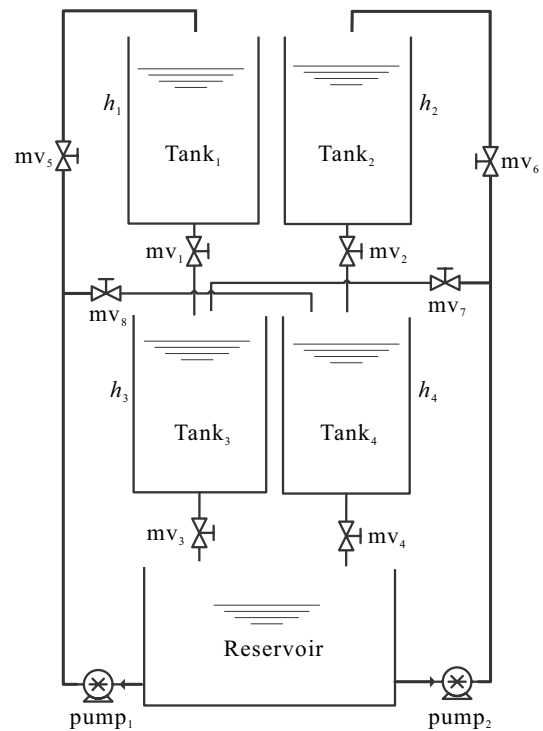


图1 耦合液位控制系统框架

系统的控制目标是求解一个固定时间控制律,使得容罐的液位从任意初始状态在收敛时间内达到目标液位。

1.2 端口受控哈密顿系统模型

考虑如下非线性端口受控哈密顿系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u + g_\omega(x)\omega, \\ z = M(x)g^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:状态变量 $x \in \mathbb{R}^n$,控制输入 $u \in \mathbb{R}^m$, $m < n$;

$H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为系统的哈密顿函数; 反对称矩阵 $J(x) = -J^T(x)$ 为结构矩阵; 半正定对称矩阵 $R(x) = R^T(x) \geq 0$ 为阻尼矩阵; $g_w(x) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 为扰动增益; $\omega \in \mathbb{R}^q$ 为 L_2 意义下的系统扰动; z 为系统的罚函数; $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为权重矩阵. 对于系统 (2), 当 $\omega = 0$ 时, 假设存在期望的闭环系统

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x). \quad (3)$$

这里

$$J_d(x) := J(x) + J_a(x) = -J_d^T(x); \quad (4)$$

$$R_d(x) := R(x) + R_a(x) = R_d^T(x) \geq 0; \quad (5)$$

$H_d(x)$ 为目标哈密顿函数, 且匹配条件

$$g^\perp(x)f(x) = g^\perp(x)[J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \quad (6)$$

成立, 其中 $g^\perp(x)g(x) = 0$, $H_d(x)$ 能够在 x^* 处取得最小值, 则在如下控制律作用下:

$$u = g^\dagger(x) \times \left\{ [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right\}, \quad (7)$$

闭环系统 (3) 在 x^* 处是 (局部) 稳定的, 这里 $g^\dagger(x) = [g^T(x)g(x)]^{-1}g^T(x)$. 此外, 若 x^* 为 $H_d(x)$ 的一个孤立极小值, 且闭环系统 (3) 包含于集合

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial^T H_d}{\partial x} R_d(x) \frac{\partial H_d}{\partial x} = 0 \right\} \quad (8)$$

内的最大不变集为 $\{x^*\}$, 则闭环系统在平衡点处是渐近稳定的.

下文将引入两个引理, 用于研究系统的固定时间稳定性控制.

引理 1^[20] 考虑一个动态系统

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x(t_0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

假设存在一个连续可微函数 $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$, 实数 $p > 1, k > 0$, 邻域 $U_\delta \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得 $V(x)$ 在 U_δ 上是正定的, 且从系统 (9) 任意始于 $x_0 \in U_\delta \subset \mathbb{R}^n$ 的轨线均满足

$$\dot{V} < -kV^{\frac{1}{p}}(x(t)), \quad (10)$$

则系统在原点处为局部有限时间稳定平衡点, 且收敛时间

$$T(x_0) \leq t_0 + \frac{p}{k(p-1)} V^{\frac{p-1}{p}}(x_0), \forall x_0 \in U_\delta. \quad (11)$$

引理 2^[21] x_i 为任意实数, 则对于所有 $1 \leq i \leq n$, 以下不等式恒成立:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p, \quad 0 < p \leq 1; \quad (12)$$

$$n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p, \quad 1 < p \leq +\infty. \quad (13)$$

2 建模和控制器设计

2.1 耦合液位控制系统的端口受控哈密顿系统模型

从物料平衡角度选择哈密顿函数 $H(x)$, 即

$$H(x) = \sum_{i=1}^4 A_i x_i = \sum_{i=1}^4 A_i (\sqrt{x_i})^2, \quad (14)$$

则系统 (2) 可变换为端口受控哈密顿系统模型, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & 0 & -\lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_2} \\ \sqrt{x_3} \\ \sqrt{x_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ \lambda_{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{bmatrix} \omega. \quad (15)$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{a_1 \sqrt{2g}}{A_1}, \lambda_2 = \frac{a_2 \sqrt{2g}}{A_2}, \quad (16)$$

$$\lambda_3 = \frac{a_3 \sqrt{2g}}{A_3}, \lambda_4 = \frac{a_4 \sqrt{2g}}{A_4}, \quad (17)$$

$$\lambda_5 = \frac{a_1 \sqrt{2g}}{A_3}, \lambda_6 = \frac{a_2 \sqrt{2g}}{A_4}, \quad (18)$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{A_1} \frac{a_5}{a_5 + a_8}, \lambda_8 = \frac{1}{A_2} \frac{a_6}{a_6 + a_7}, \quad (19)$$

$$\lambda_9 = \frac{1}{A_3} \frac{a_7}{a_6 + a_7}, \lambda_{10} = \frac{1}{A_4} \frac{a_8}{a_5 + a_8}. \quad (20)$$

显然, 有

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\lambda_5 \sqrt{x_1}}{2A_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_6 \sqrt{x_2}}{2A_2} \\ \frac{\lambda_5 \sqrt{x_1}}{2A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_6 \sqrt{x_2}}{2A_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$R(x) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \sqrt{x_1}}{A_1} & 0 & -\frac{\lambda_5 \sqrt{x_1}}{2A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 \sqrt{x_2}}{A_2} & 0 & -\frac{\lambda_6 \sqrt{x_2}}{2A_2} \\ -\frac{\lambda_5 \sqrt{x_1}}{2A_1} & 0 & \frac{\lambda_3 \sqrt{x_3}}{A_3} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_6 \sqrt{x_2}}{2A_2} & 0 & \frac{\lambda_4 \sqrt{x_4}}{A_4} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ \lambda_{10} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$g_\omega(x) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

注 1 在应用端口受控哈密顿模型对耦合液位系统 (1) 进行建模时, 哈密顿函数 $H(x)$ 的选择将影响后续的全部过程. 本文选择的函数 (14), 从物料平衡角度将耦合液位系统内的液位总量作为哈密顿函数, 物理意义更清晰, 系统模型更简洁.

2.2 耦合液位系统固定时间控制设计和稳定性分析

受文献 [19] 的启发, 选择耦合液位控制系统期望的哈密顿函数, 即

$$H_d(x) = \sum_{i=1}^4 [((x_i - x_i^*)^2)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} + ((x_i - x_i^*)^2)^{\frac{1}{2-\alpha}}], \quad (25)$$

其中 $1 < \alpha < 2$.

以下分两步求取固定时间控制器: **step 1** 根据匹配条件, 设定目标阻尼矩阵并求解目标结构矩阵; **step 2** 求取耦合液位系统的固定时间控制器.

step 1: 求取满足匹配条件 (6) 的目标结构矩阵 $J_d(x)$.

由式 (25), 可得到

$$\frac{\partial H_d(x)}{\partial x} = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_4]^T. \quad (26)$$

其中

$$\eta_i = \frac{2\alpha}{2\alpha-1} [(x_i - x_i^*)^2]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}} (x_i - x_i^*) + \frac{2}{2-\alpha} [(x_i - x_i^*)^2]^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} (x_i - x_i^*), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

由式 (23), 可得到

$$g^\perp(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_7} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_{10}} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_8} & -\frac{1}{\lambda_9} & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$g^\dagger(x) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_7}{\lambda_7^2 + \lambda_{10}^2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_{10}}{\lambda_7^2 + \lambda_{10}^2} \\ 0 & \frac{\lambda_8}{\lambda_8^2 + \lambda_9^2} & \frac{\lambda_9}{\lambda_8^2 + \lambda_9^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

为便于后续求取矩阵特征根, 并保证矩阵正定, 令目标阻尼矩阵

$$R_d(x) = \begin{bmatrix} r_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{d4} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

其中 $r_{di} > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 为可调系数.

令目标结构矩阵

$$J_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & j_{d12} & j_{d13} & j_{d14} \\ -j_{d12} & 0 & j_{d23} & j_{d24} \\ -j_{d13} & -j_{d23} & 0 & j_{d34} \\ -j_{d14} & -j_{d24} & -j_{d34} & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

将式 (21) ~ (23)、(26)、(28)、(30) 以及 (31) 代入 (6), 可得到

$$j_{d14} = \frac{m_1 + m_3 - m_4 - m_5 - m_6}{\eta_1/\lambda_{10} + \eta_4/\lambda_7}, \quad (32)$$

$$j_{d23} = \frac{m_2 - m_7 + m_8 - m_9 - m_{10}}{\eta_2/\lambda_9 + \eta_3/\lambda_8}. \quad (33)$$

其中

$$m_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_7} \sqrt{x_1} - \frac{\lambda_6}{\lambda_{10}} \sqrt{x_2} + \frac{\lambda_4}{\lambda_{10}} \sqrt{x_4}, \quad (34)$$

$$m_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_8} \sqrt{x_2} - \frac{\lambda_5}{\lambda_9} \sqrt{x_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_9} \sqrt{x_3}, \quad (35)$$

$$m_3 = \frac{r_{d1}\eta_1}{\lambda_7}, \quad (36)$$

$$m_4 = \left(\frac{j_{d12}}{\lambda_7} + \frac{j_{d24}}{\lambda_{10}} \right) \eta_2, \quad (37)$$

$$m_5 = \left(\frac{j_{d13}}{\lambda_7} + \frac{j_{d34}}{\lambda_{10}} \right) \eta_3, \quad (38)$$

$$m_6 = \frac{r_{d4}\eta_4}{\lambda_{10}}, \quad (39)$$

$$m_7 = \left(\frac{j_{d13}}{\lambda_9} - \frac{j_{d12}}{\lambda_8} \right) \eta_1, \quad (40)$$

$$m_8 = \frac{r_{d2}\eta_2}{\lambda_8}, \quad (41)$$

$$m_9 = \frac{r_{d3}\eta_3}{\lambda_9}, \quad (42)$$

$$m_{10} = \left(\frac{j_{d24}}{\lambda_8} - \frac{j_{d34}}{\lambda_9} \right) \eta_4. \quad (43)$$

这样, 求得满足匹配条件 (6) 的目标结构矩阵 $J_d(x)$.

注 2 匹配条件 (6) 的成立, 是保证系统在控制器作用下稳定的关键因素之一, 其中的目标结构矩阵和目标阻尼矩阵分别具有反对称性和对称正定性. 对于本文研究的耦合液位控制系统, 需要求解的目

标结构矩阵和目标阻尼矩阵参数多达 32 个, 而约束条件并不足以精确求出全部参数. 这将造成后续控制器求解中相关参数选择的任意性.

为了简化计算复杂度, 提高算法精确度, 文中将目标阻尼矩阵设置为式 (30) 的正定对角矩阵; 将目标结构矩阵设定为式 (31) 的形式, 将其对角线元素均设置为 0, 并设定 $j_{d12} = 0, j_{d13} = 1$, 通过式 (32) 和 (33) 求取目标结构矩阵相关参数. 这种目标结构矩阵参数整定方法避免了参数选择的任意性, 减小了计算复杂度. 实际工程应用中, 也可使用其他预先设定方案, 而后通过匹配条件 (6) 求解目标结构矩阵.

step 2: 求取固定时间控制律.

将式 (29) ~ (31) 代入 (7), 可得到

$$u_0(x) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_7}{\lambda_7^2 + \lambda_{10}^2} \theta_1 + \frac{\lambda_{10}}{\lambda_7^2 + \lambda_{10}^2} \theta_4 \\ \frac{\lambda_8}{\lambda_8^2 + \lambda_9^2} \theta_2 + \frac{\lambda_9}{\lambda_8^2 + \lambda_9^2} \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

其中

$$\theta_1 = -r_{d1} \eta_1 + j_{d12} \eta_2 + j_{d13} \eta_3 + j_{d14} \eta_4 + \lambda_1 \sqrt{x_1}, \quad (45)$$

$$\theta_2 = -j_{d12} \eta_1 - r_{d2} \eta_2 + j_{d23} \eta_3 + j_{d24} \eta_4 + \lambda_2 \sqrt{x_2}, \quad (46)$$

$$\theta_3 = -j_{d13} \eta_1 - j_{d23} \eta_2 - r_{d3} \eta_3 + j_{d34} \eta_4 - \lambda_5 \sqrt{x_1} + \lambda_3 \sqrt{x_3}, \quad (47)$$

$$\theta_4 = -j_{d14} \eta_1 - j_{d24} \eta_2 - j_{d34} \eta_3 - r_{d4} \eta_4 - \lambda_6 \sqrt{x_2} + \lambda_4 \sqrt{x_4}. \quad (48)$$

下面给出耦合液位控制系统的固定时间 H_∞ 控制器.

定理 1 对于含扰动的耦合液位控制系统 (1), 给定目标哈密顿函数 $H_d(x)$ (式 (25)), 固定时间稳定域 U 为

$$U = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow T_c} x(t; 0, x_0) = x^*\}, \quad (49)$$

其边界 ∂U 为

$$\partial U = \{x_0 \in U : x(t; 0, x_0)|_{t < T_c} \neq x^*\}. \quad (50)$$

扰动补偿水平 $\gamma > 0$, 目标阻尼矩阵 $R_d(x)$ 满足

$$R_d(x) + \frac{1}{2\gamma^2} [g(x)g^T(x) - g_\omega(x)g_\omega^T(x)] \geq 0, \quad (51)$$

则耦合液位控制系统 (1) 的全局固定时间 H_∞ 控制器为

$$u(x) = u_0(x) + u_\gamma(x) = u_0(x) - \left[\frac{1}{2} M^T(x)M(x) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g^T(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x). \quad (52)$$

当 $\omega \neq 0$ 时, 收敛时间为

$$T(x_0) \leq T_{\max} = \frac{(2\alpha - 1)^2}{4k\alpha(\alpha - 1)} c^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{(2 - \alpha)^2 n^{(\alpha-1)}}{4k(\alpha - 1)c^{(\alpha-1)}}. \quad (53)$$

其中

$$k = \min_{1 \leq i \leq n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\sigma_i^{R_d(x)} > 0\} + \min_{1 \leq i \leq n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\sigma_i^{R_r(x)} > 0\}, \quad (54)$$

$$R_r(x) = g(x) \left[\frac{1}{2} M^T(x)M(x) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g^T(x). \quad (55)$$

这里: $\sigma_i^{R_d(x)}$ 和 $\sigma_i^{R_r(x)}$ 分别为矩阵 $R_d(x)$ 和 $R_r(x)$ 的正特征根, $M(x)$ 为权重矩阵, $c = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} H_d(x)$.

证明 受文献 [20] 的启发, 将控制器 (52) 代入系统 (1), 可得到

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x) \times \left\{ u_0(x) - \left[\frac{1}{2} M^T(x)M(x) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g^T(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \right\} + \\ & g_\omega(x)\omega = \\ & (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u_0(x) - \\ & g(x) \times \left[\frac{1}{2} M^T(x)M(x) + \frac{1}{2\gamma^2} I_m \right] g^T(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) + \\ & g_\omega(x)\omega = \\ & \left[J_d(x) - (R_d(x) + R_r(x)) \right] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) + g_\omega(x)\omega. \end{aligned} \quad (56)$$

当 $\omega = 0$ 时, $H_d(x)$ 沿轨迹 (55) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(x) = & - \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} (R_d(x) + R_r(x)) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \leq \\ & - k \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \leq \\ & - k \left[\left(\frac{2\alpha}{2\alpha - 1} \right)^2 \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{1}{2\alpha-1}} + \left(\frac{2\alpha}{2 - \alpha} \right)^2 \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

由于 $\alpha > 1$, 由引理 2, 得到

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(x) \leq & -k\left(\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\right)^2 \sum_{i=1}^n [(x_i^2)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}]^\frac{1}{\alpha} - \\ & k\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2 \sum_{i=1}^n [(x_i^2)^{\frac{1}{2-\alpha}}]^\alpha \leq \\ & -k\left(\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\right)^2 \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} \right]^\frac{1}{\alpha} - \\ & kn^{1-\alpha} \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2 \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right]^\alpha. \end{aligned} \quad (58)$$

由引理 1, 可得到不等式 (57) 右侧第 1 项确保了系统状态 $x \in U$ 在固定时间 $T_c = \frac{(2\alpha-1)^2}{4k\alpha(\alpha-1)} c^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ 收敛于目标设定值 x^* ; 若令 $\beta = \alpha$, 则不等式 (57) 右侧第 2 项确保了系统状态 $x \in R^n - U$ 在固定时间 $T_\infty = \frac{(2-\alpha)^2 n^{\alpha-1}}{4k(\alpha-1)c^{\alpha-1}}$ 收敛于目标设定值 x^* . 这样, 耦合液位控制系统 (1) 在控制器 (51) 下是全局固定时间稳定的.

当 $\omega \neq 0$ 时, 在考虑惩罚函数的基础上, 计算 $H_d(x)$ 沿轨迹 (55) 的导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(x) = & \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} [J_d(x) - (R_d(x) + R_r(x))] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} + \\ & \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} (x) g_\omega(x) \omega = \\ & \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} [J_d(x) - (R_d(x) + R_r(x))] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - \\ & \frac{1}{2} \left\| \gamma \omega - \frac{1}{\gamma} g_\omega^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \right\|^2 + \\ & \frac{1}{2} (\gamma^2 \|\omega\|^2 - \|z\|^2) + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} g(x) M^T(x) M(x) g^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} + \\ & \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} g_\omega(x) g_\omega^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} = \\ & - \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} \left\{ R_d(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \times \right. \\ & \left. [g(x)g^T(x) - g_\omega(x)g_\omega^T(x)] \right\} \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - \\ & \frac{1}{2} \left\| \gamma \omega - \frac{1}{\gamma} g_\omega^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \right\|^2 + \\ & \frac{1}{2} (\gamma^2 \|\omega\|^2 - \|z\|^2) \leq \\ & - \frac{\partial H_d^T(x)}{\partial x} \left\{ R_d(x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{2\gamma^2} [g(x)g^T(x) - g_\omega g_\omega^T(x)] \right\} \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} + \\ & \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\omega\|^2 - \|z\|^2 \} \leq \\ & \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\omega\|^2 - \|z\|^2 \}. \end{aligned} \quad (59)$$

由此, 耦合液位控制系统的 L_2 增益在给定扰动抑制水平 ω 下是有界的. \square

注 3 收敛时间 (52) 中参数 k 与目标阻尼矩阵以及扩展矩阵的特征值相关, 为了得出预先设定收敛时间, 将上述矩阵设置为对角元素相同的正对角矩阵, 并适当设置对角元素, 可有效实现预先设定收敛时间.

3 仿真实验

本文仿真耦合液位控制系统的参数值如表 1 所示: 权重矩阵 M 取单位矩阵, 固定时间控制器参数 $c=2$, 经计算 $k=1.1361$, 最大收敛时间 $T=2.726$ s.

表1 耦合液位控制系统参数

参数及其单位	参数值	参数及其单位	参数值
a_1/cm^2	0.2	a_2/cm^2	0.5
a_3/cm^2	0.2	a_4/cm^2	0.5
a_5/cm^2	0.4	a_6/cm^2	0.4
a_7/cm^2	0.6	a_7/cm^2	0.6
A_1/cm^2	196	A_2/cm^2	196
A_3/cm^2	196	A_4/cm^2	196
x_1^*/cm	10	x_2^*/cm	12
r_{d1}	1	r_{d2}	1
r_{d3}	1	r_{d4}	1
α	6/5	$g/(\text{cm}/\text{s}^2)$	981

为了验证固定时间不受初始值影响, 选取两组不同的系统初值: $x^1(0) = [0, 0, 0, 0]^T$, $x^2(0) = [16, 11, 2, 10]^T$. 仿真结果如图 2 和图 3 所示. 由图 2 和图 3 可见, 所设计固定时间控制器能够实现不同初始值状态下的目标液位控制, 且收敛时间相同.

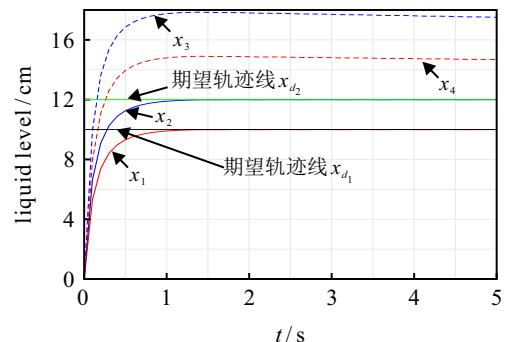


图2 初始值为 $[0, 0, 0, 0]^T$ 的液位

为了验证耦合液位控制系统有扰动情况下固定

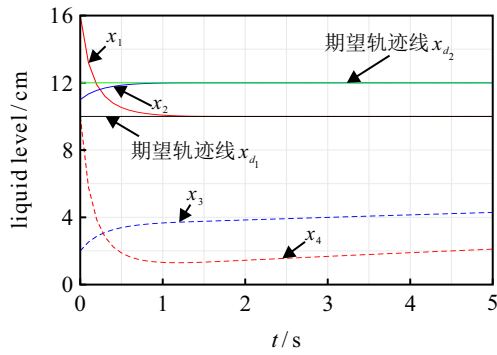


图3 初始值为 $[16, 11, 2, 10]^T$ 的液位

时间控制器的控制效果,在 $[3 \sim 3.1]$ s时,为液位2和液位3增加一方波扰动,仿真结果如图4所示。由图4可见,耦合液位控制系统受到干扰时可迅速回到稳态设定值并保持稳定。

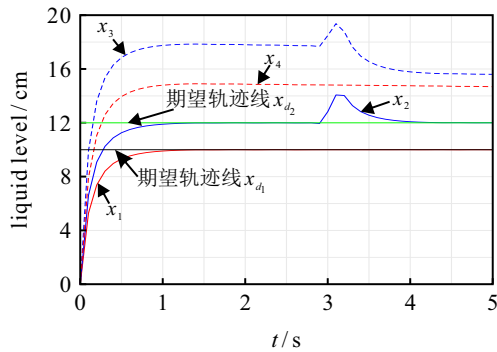


图4 有扰动时的液位

在外部扰动的影响下,为了验证所提出固定时间控制器的优越性,与自适应扰动抑制控制方法^[22]对比。在相同系统模型参数情况下,初始状态均为 $[0, 0, 0, 0]^T$ 。选择自适应扰动抑制控制方法参数为 $\lambda = 0.001, \rho = 1 \times 10^{-9}$ 。对比仿真结果如图5所示。由图5可见:在发生外部扰动时,自适应扰动抑制控制方法需要更长的时间才能使得系统达到稳态;而所设计固定时间控制器能够较好地处理扰动带来的影响,体现出更优的性能。

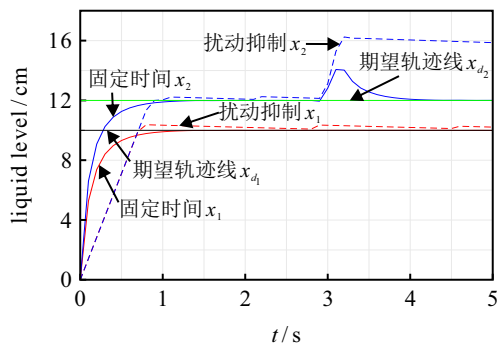


图5 与文献 [22] 对比

4 结论

针对一类耦合液位控制系统的固定时间控制问

题,本文提出了基于目标哈密顿函数和端口受控哈密顿原理的 H_∞ 固定时间控制方法。首先,利用目标端口哈密顿函数的两类形式,对任意系统初始状态收敛时间进行计算,得出固定时间控制器,证明了稳定性,结合 L_2 增益对系统进行扰动抑制;然后,对目标阻尼矩阵和目标结构矩阵提出了两类特殊结构,以简化参数计算,给出目标矩阵与收敛时间之间的内在关联;最后,通过仿真结果验证了所给出方案的有效性。今后,将针对液位控制系统中的大时滞、参数不确定性等特性进行进一步研究。

参考文献 (References)

- [1] Debnath B, Mija S J. Emotional learning based controller for quadruple tank system — An improved stimuli design for multiple set-point tracking[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 68(11): 11296-11308.
- [2] Agitha T, Sivarani T S. Deep neural fuzzy based fractional order PID controller for level control applications in quadruple tank system[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2023, 45(1): 1847-1861.
- [3] Meng X X, Yu H S, Zhang J, et al. Disturbance observer-based feedback linearization control for a quadruple-tank liquid level system[J]. *ISA Transactions*, 2022, 122: 146-162.
- [4] Shah D H, Patel D M. Design of sliding mode control for quadruple-tank MIMO process with time delay compensation[J]. *Journal of Process Control*, 2019, 76: 46-61.
- [5] Yu H S, Yu J P, Wu H R, et al. Energy-shaping and integral control of the three-tank liquid level system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(4): 2149-2156.
- [6] Rang E. Isochrone families for second-order systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1963, 8(1): 64-65.
- [7] Sun R J, Zhou Z, Zhu X P. Finite-time terminal sliding mode attitude control for tailless full-wing configuration UAVs based on extended state observers and auxiliary compensators[J]. *ISA Transactions*, 2024, 144: 282-307.
- [8] Xu Y H, Wu X Q, Zheng W X. Finite-time pth moment asymptotically bounded for stochastic nonlinear systems and its application in neural networks synchronization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, 54(4): 2402-2413.
- [9] Jiang W T, Wang M H, Li X K, et al. Autonomous finite-time backstepping control for decentralized economic power dispatch in DC microgrids toward large-signal stability[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(3): 2942-2954.
- [10] Yu J P, Shi P, Zhao L. Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems[J].

- Automatica*, 2018, 92: 173-180.
- [11] Zhao L, Yu J P, Lin C, et al. Adaptive neural consensus tracking for nonlinear multiagent systems using finite-time command filtered backstepping[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(11): 2003-2012.
- [12] Jin L N, Yu S H, Shi G Y, et al. Finite-time kinematic path-following control of underactuated ASV with disturbance observer[J]. *Automatika*, 2024, 65(1): 303-311.
- [13] 周玥欣, 于金鹏, 刘加朋, 等. 考虑输入饱和的不确定机械臂系统固定时间阻抗控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 3919-3926.
(Zhou Y X, Yu J P, Liu J P, et al. Fixed time impedance control for uncertain manipulator systems with input saturation[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(12): 3919-3926.)
- [14] Yogi S C, Behera L, Tripathy T. Neural-FxSMC: A robust adaptive neural fixed-time sliding mode control for quadrotors with unknown uncertainties[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2024, 9(6): 5927-5934.
- [15] 王元慧, 任哲达, 邵兴超, 等. 基于非奇异快速终端滑模的多水面船固定时间协同控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2637-2646.
(Wang Y H, Ren Z D, Shao X C, et al. Fixed-time cooperative control for multiple surface vessels based on non-singular fast terminal sliding mode[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(8): 2637-2646.)
- [16] Wang Y Z, Feng G. On finite-time stability and stabilization of nonlinear port-controlled Hamiltonian systems[J]. *Science China Information Sciences*, 2013, 56(10): 1-14.
- [17] Jin L N, Yu S H, Zhao Q, et al. Fixed-time H_∞ tracking control of unmanned underwater vehicles with disturbance rejection via port-Hamiltonian framework[J]. *Ocean Engineering*, 2024, 293: 116533.
- [18] Fu B Z, Li S H, Guo L, et al. Finite-time stabilization of port-controlled Hamiltonian systems with nonvanishing disturbances[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2018, 40(10): 2973-2981.
- [19] Wang J X, Rong J Y, Yang J. Adaptive fixed-time position precision control for magnetic levitation systems[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2023, 20(1): 458-469.
- [20] Liu X G, Liao X F. Fixed-time H_∞ control for port-controlled Hamiltonian systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(7): 2753-2765.
- [21] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5): 678-682.
- [22] Shen T L, Mei S W, Lu Q, et al. Adaptive nonlinear excitation control with L_2 disturbance attenuation for power systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(1): 81-89.

作者简介

许涛 (1978-), 男, 高级实验师, 博士生, 主要研究方向为复杂工业过程控制、非线性系统控制, E-mail: xutao7805@126.com;

于海生 (1963-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程控制、非线性系统控制, E-mail: yu.hs@163.com;

于金鹏 (1978-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为电机控制、非线性系统控制, E-mail: yjp1109@126.com.