

控制与决策

Control and Decision

基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法

王博, 刘建昌, 张伟, 刘圆超, 谭树彬

引用本文:

王博, 刘建昌, 张伟, 等. 基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1619–1630.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0718>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for manyobjective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

基于分类的多策略预测方法求解动态多目标优化问题

[Classification-based multi-strategy prediction method for dynamic multiobjective optimization problems](#)

控制与决策. 2021, 36(7): 1569–1580 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1320>

基于向量角分解的高维多目标进化算法

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

基于分解的多目标多因子进化算法

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 637–644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

融合能量周期性递减与牛顿局部增强的改进HHO算法

[Improved harris hawks optimization coupling energy cycle decline mechanism and Newton local enhancement strategy](#)

控制与决策. 2021, 36(3): 629–636 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0810>

基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法

王博^{1,2}, 刘建昌^{1,2†}, 张伟^{1,2}, 刘圆超^{1,2}, 谭树彬^{1,2}

(1. 东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110819; 2. 工业智能与系统优化国家级前沿科学中心, 沈阳 110819)

摘要: 针对大多数现存高维多目标进化算法仍无法在高维空间中有效平衡种群收敛性与多样性的问题, 提出一种基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法 (AMEA). 该算法协作角分解机制与多阶段自适应删除策略逐一淘汰种群中性能较差的个体, 进而平衡种群的收敛性和多样性. 前者选取一对夹角最小的个体, 其意味着它们最为相似; 后者根据种群的进化状态自适应地淘汰这对个体中性能较差的个体. 当种群处于未收敛于 Pareto 前沿状态时, 删除策略淘汰收敛性较差的个体, 以加速种群收敛. 如果这对个体具有相同的收敛性, 删除策略则淘汰多样性较差的个体. 反之, 删除策略利用所设计的综合性能指标来淘汰收敛性和多样性都较差的个体, 以提升种群的综合性能. 此外, 所提出算法设计了基于径向空间投影的匹配选择策略来选取收敛性和多样性都良好的父代个体进入匹配池, 进而提高算法探索高维空间的能力. 实验结果表明, AMEA 在处理高维多目标优化问题时具有较强的竞争力, 能有效地平衡种群的收敛性与多样性.

关键词: 高维多目标优化; 进化算法; 角分解机制; 多阶段自适应删除策略

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0718

引用格式: 王博, 刘建昌, 张伟, 等. 基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法 [J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1619-1630.

Many-objective evolutionary algorithm based on angle decomposition assist in multi-stage

WANG Bo^{1,2}, LIU Jian-chang^{1,2†}, ZHANG Wei^{1,2}, LIU Yuan-chao^{1,2}, TAN Shu-bin^{1,2}

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. The National Frontiers Science Center for Industrial Intelligence and Systems Optimization, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: Aimed at the problem that most existing many-objective evolutionary algorithms still cannot effectively balance convergence and diversity of the population in the high-dimensional space, this paper proposes an angle-decomposition assisted multi-stage evolutionary algorithm for many-objective optimization (AMEA). This algorithm collaborates the angle-decomposition mechanism and a multi-stage adaptive deletion strategy to eliminate individuals with poor performance one-by-one, and thus balance convergence and diversity of the population. Specifically, the former selects a pair of individuals with the minimum angle, which means they are the most similar; The latter adaptively eliminates individuals with poor performance based on the evolutionary state of the population. When the population does not converge to the Pareto front, this deletion strategy eliminates individuals with poor convergence to accelerate population convergence. If these two individuals have the same convergence, the deletion strategy eliminates individuals with poor diversity. On the contrary, the deletion strategy utilizes the designed comprehensive performance indicators to eliminate individuals with poor convergence and diversity for improving the overall performance of the population. In addition, a mating selection strategy based on radial space projection is designed to select individuals with good convergence and diversity for variation, and further improves the ability of the AMEA to explore the high-dimensional space. Experimental results show that the AMEA has strong competitiveness in dealing with many-objective optimization problems compared with its competitors.

收稿日期: 2024-06-17; 录用日期: 2024-10-26.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (62273080); 中国博士后创新人才支持计划项目 (BX20240059); 中国博士后科学基金面上项目 (2024M750372); 高等学校学科创新引智计划“111 计划”项目 (B16009).

责任编委: 阳春华.

†通信作者. E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn.

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

Keywords: many-objective optimization; evolutionary algorithms; angle-decomposition mechanism; multi-stage adaptive deletion strategy

0 引言

高维多目标优化问题 (MaOPs)^[1] 广泛存在于实际生活中, 例如: 配水系统^[2]、电力调度系统^[3]、云计算任务分配^[4]等. 这类问题旨在同时优化 3 个以上相互冲突的目标, 其数学描述为

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), \dots, f_m(x)); \\ \text{s.t. } x &\in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $F(x)$ 为 m 维目标函数向量, m 代表相互冲突目标函数的个数, 且 $m > 3$; $f_i(x)$ 为第 i 个目标函数, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是决策空间 Ω 中的 n 维的决策变量向量. 由于各个目标之间相互冲突, MaOPs 无法找到一个解使各目标同时达到最优. 为使各目标尽可能达到最优^[5], 需要找到一组折衷解, 这组解在决策空间中称为 Pareto 最优解集 (PS), 其所对应的目标函数值称为 Pareto 最优前沿 (PF)^[6].

为了能够求解上述优化问题, 研究者们提出了许多高维多目标进化算法 (MaOEAs). 根据选择机制的不同, 现存的 MaOEAs 可以大致分为以下 3 类:

1) 基于分解的 MaOEA. 它通过使用均匀分布的参考向量将一个 MaOPs 分解为多个单目标优化问题, 然后通过协同优化的方式来求解这些单目标优化问题. 典型代表有 MOEA/D^[7]、REVA^[8]、NSGA-III-OSD^[9]、SdEA^[10] 等. 最近研究表明, 这些算法在处理不规则 PF 问题时无法取得较好的效果. 基于这一问题, 研究人员提出了一些有关参考向量自适应策略的算法, 如 DREA^[11]、g-DBEA^[12]、RVSPEA2^[13]、MOEA/D-LNA^[14] 等.

2) 基于指标的 MaOEA. 它通过所设计性能指标来指导环境选择, 进而引导种群的进化过程. 目前的性能指标主要有: Dhiman 等^[15] 提出的超体积 (HV) 指标, Li 等^[16] 提出的 R2 指标, Sun 等^[17] 提出的反世代距离 (IGD 指标). 除此之外还有 GD 指标^[18] 以及 $I_{\epsilon+}$ 指标^[19] 等.

3) 基于支配的 MaOEA. 它主要是通过改进或设计新的支配准则来扩大个体的支配区域, 从而增强种群个体的收敛性. 目前主要的支配方法有两种: 一种是通过修改 Pareto 支配关系的方法, 以此来增强算法的选择压力. 其典型代表有: $C\alpha$ 支配^[20]、CDAS^[21]、SDR^[22]、RP 支配^[23] 等; 另外一种是设计新的支配准则. 一些研究者将决策空间划分为一系列网格, 然后利用这些网格来设计新的支配关系, 如 ϵ 支配^[24]、grid 支配^[25]. 一些研究者也利用模糊逻辑关系设计

了一些新的支配关系, 如: $(1-k)$ 支配^[26]、 L 支配^[27]、模糊支配^[28] 等. 最近, 一些新的支配关系相继被提出, 如 APA 支配^[29]、RPS 支配^[30] 等.

除了以上方法, 还有一些充分利用以上各类算法优势的混合算法被提出, 如 Two-Arch2^[31]、SPEA/R^[32] 等. 一些研究者也提出一些基于两阶段的算法, 如 TS-NSGA-II^[33]、MaOEA-ITS^[34] 等. 最近, 一些基于向量角选择的算法被提出, 如 VaEA^[35]、MaOEA/IS-DED^[36] 等.

尽管很多的 MaOEAs 已被提出, 但大多数仍无法有效平衡种群收敛性与多样性, 尤其在具有不规则 PFs 的 MaOPs 上. 为此, 本文提出一种基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法, 该算法协作角分解机制与多阶段自适应删除策略来逐一淘汰种群中性能较差的个体, 进而平衡种群的收敛性和多样性. 本文的主要工作如下:

1) 开发一种协作机制来平衡种群的收敛性和多样性, 巧妙地融合了角分解机制与多阶段自适应删除策略. 首先, 角分解机制识别种群中最相近的一对个体; 然后, 多阶段自适应删除策略根据种群收敛状态删除性能较差的一个个体.

2) 提出一种基于第 2 角辅助的多样性评估来更精确地评估种群个体的拥挤程度. 首先, 自适应映射所有种群个体于一个超平面; 然后, 计算个体与其最近个体和第 2 近个体的角度值来评估种群个体的拥挤程度.

3) 充分利用径向空间投影的优势, 设计基于径向空间投影的匹配选择策略来选择收敛性和多样性良好的父代产生子代, 进而提升算法在高维空间中的搜索能力.

1 背景知识

1.1 径向投影的相关概念

径向投影的基本思想是通过两个投影权向量将高维空间中的解投影到二维径向空间中^[37]. 设 $F = f_1, f_2, \dots, f_m$ 是一个 m 维的点, 其中 f_i 的取值范围是 $[0, 1]$, 两个权向量 W_1, W_2 及投影过程如下:

$$\begin{aligned} W_1 &= (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \dots, \cos \theta_m)^T, \\ W_2 &= (\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots, \sin \theta_m)^T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{m}, \quad (3)$$

$$Y_i = (F'_i W_1 (F'_i T)^{-1}, F'_i W_2 (F'_i T)^{-1}). \quad (4)$$

其中: θ_i 是 i 维所对应的角; F 在径向空间中的坐标 $Y = (y_1, y_2)$, $y_1 = FW_1(Fl)^{-1}$, $y_2 = FW_2(Fl)^{-1}$, l 是 $m \times 1$ 的单位向量; Y_i 是最终得到的径向空间坐标^[38].

1.2 向量角的相关概念

向量角表示一个个体与其最近个体的角度值, 双目标空间中两个个体的向量角如图 1 所示. 在计算夹角前, 需用下式对每个个体的目标值进行归一化处理:

$$f'_i(x_j) = \frac{f_i(x) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

其中: $z_i^{\min} = \min_{x \in P}(f_i(x))$, $z_i^{\max} = \max_{x \in P}(f_i(x))$. 另外, 为避免式 (5) 出现分母为 0 的情况, 当 $z_i^{\max} - z_i^{\min} < 1e-6$ 时, z_i^{\min} 设置为 0. 值得说明的是, 进行归一化处理的原因是为了克服不同目标维度对计算个体间的向量角计算的影响. 经过归一化处理后, 个体 x_j 的目标值变为 $F'(x_j) = (f'_1(x_j), f'_2(x_j), \dots, f'_m(x_j))$. 个体 x_j 与个体 x_l 之间的向量角可由下式表示:

$$\theta(x_j, x_l) = \arccos \left| \frac{F'(x_j) \cdot F'(x_l)}{\|F'(x_j) \times F'(x_l)\|} \right|. \quad (6)$$

其中: $F'(x_j) \cdot F'(x_l)$ 是 $F'(x_j)$ 和 $F'(x_l)$ 的内积, $\|\cdot\|$ 表示计算向量的范数, $\theta_{x_j x_l} \in [0, \pi/2]$.

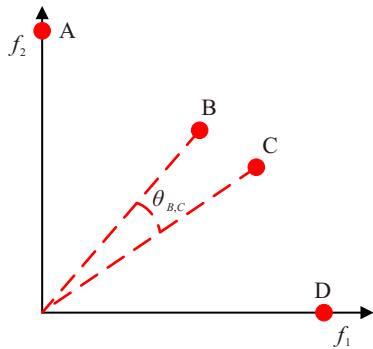


图1 双目标空间中最小向量角

2 所提出算法 AMEA

为了能够有效地平衡种群的收敛性与多样性, 提出 AMEA 算法. 本节主要阐述 AMEA 的具体实现, 包括 AMEA 的总体框架, 基于径向空间投影的匹配选择以及基于角分解辅助的多阶段自适应删除的环境选择.

2.1 AMEA 的总体框架

算法 1 呈现了所提出算法 AMEA 的总体框架. 具体地, 在决策空间中产生规模为 N 的初始化种群 P_0 , 初始化种群状态及计算初始化种群的平均收敛性值; 算法 AMEA 进入进化迭代过程. 首先, 利用基于径向空间投影的选择策略挑选精英父代来构建匹

配池 P' ; 然后, 通过模拟二进制交叉^[39] 和多项式变异^[40] 操作产生高质量子代种群, 之后再与父代种群合并形成规模为 $2N$ 的合并种群 U ; 最后, 通过环境选择从合并种群中选出 N 个收敛性和多样性都良好的精英个体进入下一代. 该过程一直循环迭代直到满足终止条件为止.

算法 1 AMEA 的总体框架.

输入: P (种群), t_{\max} (最大进化代数), parameters AS_1 and AS_2 ;

输出: P (新种群), and Pareto set.

- 1) 初始化种群(P)
- 2) Flag = 1
- 3) AveCon' = 计算平均收敛值(P) by to Eq.(11)
- 4) **while** termination criterion is not fulfilled **do**
- 5) $P' = \text{Mating Selection}(P)$
- 6) $P'' = \text{Reproduction}(P')$
- 7) $R = P \cup P''$
- 8) (P , Flag, AveCon' =) Environmental Selection(R , Flag, AS_1, AS_2 , AveCon')
- 9) $t = t + 1$
- 10) **end while**
- 11) **Return** P

2.2 基于径向空间投影的匹配选择

本节阐述基于径向空间投影的匹配选择过程以及收敛性和多样性的评估指标.

2.2.1 匹配选择过程

匹配选择的核心目标是为进化操作挑选收敛性与多样性都良好的父代个体, 进而提升算法在高维目标空间中的搜索效率. 有限的种群个体在高维空间中分布较为稀疏, 现存的匹配选择无法较为准确地评估种群个体的分布情况, 这会使得现存的匹配选择可能选择性能较差的个体产生子代, 进而恶化算法的性能. 为了克服这一缺陷, 在 AMEA 中引入径向空间投影来设计匹配选择. 采用径向空间投影的原因是径向空间投影能够在二维空间中较为准确地反映高维空间中解的分布情况, 正如文献 [37] 指出的.

算法 2 给出了基于径向空间投影匹配选择的详细过程. 具体的, 通过算法 3 将高维目标空间中的解投影到二维径向空间, 并采用自适应网格划分方法将这些投影解所占据的区域划分为多个相同的矩形. 之后分别采用同一矩形中个体的数目和各目标值的和来评估种群个体的拥挤程度(多样性)及收敛性. 完成评估后, 从拥挤度较小的矩形中选择出收敛性好的解来增强种群的收敛性, 直到选出 N 个个体作为下一代的亲本种群. 该过程一直重复直到满足终

止条件为止, 整个过程详见算法 2.

算法 2 匹配选择.

输入: P, G ;

输出: P' (父代种群).

- 1) $Q, P' \leftarrow 0$
- 2) $Crowd \leftarrow$ Calculate the crowding degrees of solutions in P by to Eq.(7)
- 3) $Con \leftarrow$ Calculate the convergence degrees of solutions in P by to Eq.(8)
- 4) **while** $|Q| < |P|$ **do**
- 5) Randomly select two rectangles x and y from G
- 6) **if** $Crowd(x) < Crowd(y)$ **then**
- 7) $Q \leftarrow Q \cup \{x\}$
- 8) **else**
- 9) $Q \leftarrow Q \cup \{y\}$
- 10) **end if**
- 11) **end while**
- 12) **for** $i \leftarrow 1: |P|$ **do**
- 13) $S \leftarrow$ Find the solution in the i th rectangle in Q
- 14) Randomly select two solutions a and b from S
- 15) **if** $Con(x) < Con(y)$ **then**
- 16) $P' \leftarrow P' \cup \{a\}$
- 17) **else**
- 18) $P' \leftarrow P' \cup \{b\}$
- 19) **end if**
- 20) **end for**

算法 3 径向空间映射.

输入: F (目标向量), N (种群大小);

输出: Y (径向空间坐标), G (生成矩形).

- 1) $P_N \leftarrow$ Normalize the objective vectors of P
- 2) **for** $i = 1 : m$ **do**
- 3) $\theta_i \leftarrow 2\pi(i-1)/m$
- 4) **end for**
- 5) $W_1 \leftarrow (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_m)$
- 6) $W_2 \leftarrow (\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_m)$
- 7) $Y \leftarrow (FW_1, FW_2)$
- 8) $d \leftarrow \sqrt{N}$
- 9) $B_l \leftarrow \min Y, B_u \leftarrow \max Y$
- 10) $G \leftarrow d(Y - B_l)/(B_u - B_l)$

2.2.2 多样性评估指标

在本文设计的匹配选择中, 矩形的拥挤度定义为同一矩形内种群个体数, 用来评估种群个体的多样性. 具体的数学描述如下:

$$Crowd(G_s) = |S|. \quad (7)$$

其中: S 为位于矩形 G_s 中解的集合; $|\times|$ 为集合 \times 中的元素个数, 个数越少代表种群的拥挤度越小, 最终选择拥挤度较小的矩形, 并对其矩形内的解进行收敛性评估.

2.2.3 收敛性评估

在本文设计的匹配选择中, 使用种群个体的各目标值的和来评估种群个体的收敛性, 具体的数学描述如下:

$$C_{x_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f'_i(x_j))^2}. \quad (8)$$

其中: $(f'_i(x_j))^2$ 是归一化后解 x_j 的目标向量; m 为目标个数; C_{x_j} 的值越小, 收敛性越好.

2.3 角分解辅助的多阶段自适应删除的环境选择

本节阐述角分解辅助的多阶段自适应删除的环境选择过程及核心步骤.

2.3.1 环境选择过程

环境选择旨在从合并后种群大小为 $2N$ 的种群中选择 N 个收敛性和多样性都良好的精英个体进入下一代. AMEA 的环境选择过程如算法 4 所示.

算法 4 环境选择($R, Flag, AS_1, AS_2, AveCon'$).

输入: R, N ;

输出: P (所得新种群), $Flag, AveCon$.

- 1) $H = 0, i = 1$
- 2) Compute convergence(R) by to Eq.(8)
- 3) $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) =$ Non-dominated sorting(R)
- 4) **while** $|H| + |Z_i| < N$ **do**
- 5) $H = H \cup Z_i, i = i + 1$
- 6) **end while**
- 7) Number of solutions to be deleted: $dL = |H| - N$
- 8) $(x, x') =$ Angle Decomposition Mechanism (R)
- 9) Del = Multi-stage Adaptive Deletion Strategy(dL)
- 10) $P = H(\text{Del})$
- 11) $AveCon =$ ComputeAverageConvergence(P) by to Eq.(10)
- 12) $Flag =$ PopulationConvergenceDetection($Flag, AveCon', AveCon, AS_1, AS_2$)
- 13) **return** $P, Flag, AveCon$

首先, 通过式 (5) 对合并种群进行归一化处理; 接着, 利用非支配排序将合并种群划分成不同的非支配前沿 (Z_1, Z_2, \dots, Z_l) ; 其次, 将前 l 层个体置于临时档案 T 中, 其中 $l = \arg \min_l \sum_{i=1}^l |Z_i \geq N|$; 然后, 利用角分解机制从 T 中找出一对夹角最小的解; 最

后, 多阶段自适应删除策略根据种群收敛状态删除其中一个性能较差的解. 具体的, 为了加速种群的收敛, 多阶段自适应删除策略首先删除两个个体中收敛性能较差的个体, 以提升种群的收敛性; 如果两个个体具有相同的收敛性, 则删除多样性较差的个体, 否则随机删除一个个体. 在种群收敛后, 为了提高种群的综合性能, 多阶段自适应删除策略删除综合性能较差的个体来提高种群的综合性能. 角分解机制协同多阶段自适应删除策略一直循环, 直到进入下一代的种群个体数等于 N 为止.

2.3.2 基于第 2 角辅助的多样性评估

在设计一个 MaOEA 时, 如何设计评估种群个体拥挤程度的多样性评估是一个至关重要的问题. 对于这个问题, 大多数现存的多样性评估采用欧式距离或者最近两个体的夹角来应对. 一些研究表明, 欧式距离和最近两个体的夹角不适合处理 MaOPs, 其主要原因是它们对 PF 形状的敏感性. 为此, 提出基于第 2 角辅助的多样性评估. 当评估个体的拥挤程度 (即多样性) 时, 首先采用下式将所有种群个体映射到一个超平面:

$$\bar{f}'_i(x) = \frac{f'_i(x)}{\left(\sum_{u=1}^M f'_u(x)^p\right)^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

其中: $f'_i(x)$ 表示通过式 (5) 归一化后的目标值; p 表示 PF 的曲率. p 可通过以下步骤获得:

- 1) 构建一个超平面, 其数学描述为

$$\sum_{i=1}^m f'_i(x) = 1. \quad (10)$$

- 2) 连接坐标原点 O 和最坏点 (z^{\max}), 构建一个参考向量 r .

- 3) 以步骤 1) 构建的参考向量来计算所有种群个体的成功表量化函数值 (ASF), 能够评估种群个体的收敛性^[41]. ASF 数学描述为

$$\text{ASF}(x, w) = \max_{k=1:m} \left\{ \frac{f_k(x)}{r} \right\}. \quad (11)$$

- 4) 基于步骤 3) 计算的 ASF 值, 找到 ASF 值最小的个体 x .

- 5) 计算个体 x 到坐标原点的距离 d 和计算个体 x 到步骤 1) 所构建的超平面的距离 d' .

- 6) 通过下式计算 PF 的曲率 p :

$$q = \frac{d}{d'}. \quad (12)$$

在完成映射后, 通过式 (6) 计算映射后种群个体间的角度值. 当计算个体 x 的拥挤程度时, 首先基于

计算出的角度值找到其最近的个体 y 和第 2 近个体 k ; 然后利用它们间的角度值计算个体 x 的拥挤程度.

$$D(x) = \theta(x, y) + \alpha\theta(x, k). \quad (13)$$

其中: α 是一个较小的数, 其设置为 10^{-4} ; $D(x)$ 越大, 表示个体 x 越是位于不拥挤区域 (即多样性好).

2.3.3 多阶段自适应删除策略

多阶段删除策略旨在根据种群收敛状态删除角分解机制选择出的两个最相似个体中性能较差的一个个体, 其具体执行过程如算法 5 所示. 值得说明的是, 执行多阶段自适应删除策略所使用到的种群收敛状态是根据算法 6 进行判断的. 对于角分解机制所选择的两个最相似个体 x' 和 x'' , 如果种群处于未收敛状态 (即 $\text{Flag} = 1$), 则删除收敛性较差的个体, 其个体的收敛性通过式 (8) 来评估. 如果这对个体具有相同的收敛性值, 则删除多样性较差的个体, 其个体的多样性通过式 (13) 来评估; 否则随机删除一个解. 如果种群处于收敛状态 (即 $\text{Flag} = 0$), 则删除这对个体中综合性能较差的个体, 其综合性能的数学描述为

算法 5 多阶段自适应删除策略.

输入: Del, Flag;

输出: Del.

- 1) 找到一对最小向量角的解 x' and x''
 - 2) **if** Flag==1 **then**
 - 3) **if** $C'_x < C''_x$ **then**
 - 4) Del(x'') = true
 - 5) **else if** $C'_x > C''_x$ **then**
 - 6) Del(x') = true
 - 7) **else**
 - 8) **if** $D'_x < D''_x$ **then**
 - 9) Del(x')=true
 - 10) **else if** $D'_x > D''_x$ **then**
 - 11) Del(x'')=true
 - 12) **else**
 - 13) Delete one randomly
 - 14) **end if**
 - 15) **end if**
 - 16) **else**
 - 17) **if** fitness $_{x'} <$ fitness $_{x''}$ **then**
 - 18) Del(x'') = true
 - 19) **else**
 - 20) Del(x') = true
 - 21) **end if**
 - 22) **end if**
 - 23) **return** Del
-

算法 6 种群收敛状态检测(Flag, AveCon', AveCon, AS₁, AS₂).

输入: Flag, AveCon', AveCon, AS₁, AS₂;

输出: Flag.

```

1) if Flag == 1 then
2)   if abs(AveCon' - AveCon) < AS1 then
3)     Flag = 0
4)   end if
5) else
6)   if abs(AveCon' - AveCon) > AS2 then
7)     Flag = 1
8)   end if
9) endif
10) return Flag

```

$$\text{fitness}(x) = C(x) - D(x). \quad (14)$$

其中: $C(x)$ 为种群个体的收敛性评估,可通过式(8)计算; $D(x)$ 为种群个体的多样性评估,可通过式(13)计算. fitness值越小表示个体的综合性能越好. 如此设计评估种群个体的综合性能的方式在求解 MaOPs 上已得到较多应用,如 SPEA2+SDE^[42]、MaOEA-FEGL^[43]等.

2.3.4 种群收敛状态检测

种群收敛状态检测的主要作用是检测种群是否处于收敛状态,用于多阶段自适应删除策略,其详细过程如算法 6 所示. 在初始阶段,默认种群处于未收敛状态,将Flag置为 1. 不断删除种群中性能较差的个体,直到生成新的种群后,计算当前代种群与前一一代种群的平均收敛值差值的绝对值. 值得说明的是,在种群处于未收敛状态时,多阶段自适应删除策略删除收敛性较差的个体;在种群处于收敛状态时,多阶段自适应删除策略删除多样性较差的个体. 如果差值的绝对值小于设定的阈值AS₁,则表示种群已处于收敛状态,将Flag置为 0,多阶段自适应删除策略将根据种群个体的综合性能来删除个体,直到生成新的种群. 随后,计算当前代种群与前一一代种群的平均收敛值差值的绝对值,如果该值大于设定的阈值AS₂,则表示种群处于未收敛状态,多阶段自适应删除策略将根据种群个体的收敛性来删除个体. 在本文中AS₁和AS₂分别设置为 0.008 和 0.2.

以上种群的平均收敛度值的数学描述如下:

$$\text{AveCon} = \frac{\sum_{i=1}^N C(x_i)}{N}. \quad (15)$$

其中: N 为种群大小; $C(x_i)$ 表示个体 x_i 的收敛性评

估值,可通过式(8)计算.

3 仿真实验及结果分析

通过以下实验验证所提出 AMEA 的性能:

1) 与 7 种先进的 MaOEA(RVEA^[8]、MaOEA-CSS^[44]、MaOEA-IT^[41]、MaOEA-RD^[45]、UIMaOTO^[46]、RPS-NSGA-II^[30]、MaOEAPDS^[47]) 在两个较为广泛使用的测试集下进行比较;

2) 对每个核心部分进行有效性分析.

3.1 实验设置

1) 测试问题. 采用两组测试集 (WFG1~WFG9 和 MaF1 ~ MaF15) 进行实验研究,目标数(m)设置为 5, 10 和 15.

2) 性能指标. 使用能够同时评价算法收敛性和多样性的 HV 指标以及 IGD 指标来评价算法的性能. IGD 的计算方法如下:

$$\text{IGD}(A, S) = \frac{1}{|S|} \sum_{i=1}^{|S|} \min_{j=1}^{|A|} d(s_i, a_j). \quad (16)$$

其中: $A = [a_1, a_2, \dots]$ 为目标空间所得到的解集, $|A|$ 为集合 A 中元素的个数, $S = [s_1, s_2, \dots]$ 为从已知的 Pareto 前沿得到的解集, $|S|$ 为集合 S 中元素的个数, $d(s_i, a_j) = \|s_i - a_j\|$ 是 $s_i - a_j$ 的欧氏距离,较小的 IGD 值表明更加接近真实的 Pareto 前沿和更好的多样性. HV 的计算方法如下:

$$\text{HV}(\Omega) = \text{Leb} \left(\bigcup_{x \in \Omega} [f_1(x), s_1^r] \times \dots \times [f_M(x), s_M^r] \right). \quad (17)$$

其中: x, M, Ω 和 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)$ 与式(1)的意义相同, s^r 的值设为 (1.0, 1.0, ..., 1.0). 为了提高计算效率,当目标数量超过 3 个时,采用 1 000 000 个采样点的蒙特卡罗方法近似计算 HV 值. HV 值越大表示算法的性能越好.

3) 参数设置. 测试问题的具体参数设置见表 1.

表1 种群参数设置

m	D	N	MaxFEs
5	14	210	100000
10	19	275	100000
15	24	135	100000

4) 交叉变异参数. 交叉概率和变异概率分别设置为 1 和 $1/D$, 其中 D 代表算法中的决策变量个数. 交叉分布指数和变异分布指数分别设置为 30 和 20.

5) 统计方法. 在每个测试问题上,算法都独立运行 20 次,最终的实验结果采用 Wilcoxon 秩和检验进行分析,且使用“+”“-”“ \approx ”分别来表示所提出算法劣于对比算法、优于对比算法、与对比算法无显著性差异.

6) 终止条件. 所有算法运行一次结束的条件是达到最大评估次数 (MaxFEs), 具体设置见表 1.

WFG9 和 MaF1 ~ MaF15) 与 7 种最先进的 MaOEA 的比较结果. 所提出算法与 7 个对比算法在 WFG1~WFG9 测试问题上获得的 HV 值的统计结果如表 2

3.2 算法在 WFG 测试问题上的对比分析

本小节将介绍 AMEA 在两组测试集中 (WFG1~

所示, 且在表 2 中突出显示了各算法在不同测试问

表2 各算法在 WFG 上获得的 HV 指标值的统计结果

problem	<i>m</i>	<i>D</i>	RVEA	MaOEACSS	MaOEAIT	MaOEARD	UIMaOTO	RPSNSGAI	MaOEAPDS	AMEA
WFG1	5	14	9.827 4e-1 (2.44e-2) ≈	9.892 5e-1 (1.10e-3) -	2.087 5e-1 (5.32e-2) -	8.722 7e-1 (1.97e-1) -	8.571 6e-1 (3.50e-2) -	9.895 9e-1 (1.98e-3) -	9.753 2e-1 (5.04e-3) -	9.967 7e-1 (3.87e-4)
	10	19	9.797 2e-1 (4.32e-2) -	9.965 4e-1 (6.95e-4) -	7.180 7e-2 (4.73e-2) -	7.383 3e-1 (1.51e-1) -	9.109 8e-1 (5.66e-2) -	9.983 7e-1 (8.10e-4) ≈	9.947 7e-1 (1.87e-3) -	9.987 1e-1 (4.33e-4)
	15	24	9.970 5e-1 (4.76e-4) -	9.880 6e-1 (3.47e-2) -	5.340 9e-2 (2.15e-2) -	6.725 6e-1 (2.35e-1) -	9.964 9e-1 (9.92e-4) -	9.994 9e-1 (3.73e-4) +	9.967 6e-1 (1.07e-3) -	9.976 5e-1 (6.94e-4)
WFG2	5	14	9.904 4e-1 (1.37e-3) -	9.502 9e-1 (9.81e-3) -	5.539 7e-1 (1.34e-1) -	9.727 4e-1 (3.06e-3) -	9.531 1e-1 (1.10e-2) -	9.774 1 e-1 (6.83e-3) -	9.491 1e-1 (6.19e-3) -	9.954 2e-1 (9.46e-4)
	10	19	9.802 2e-1 (4.11e-3) -	9.785 8e-1 (4.41e-3) -	5.833 4e-1 (1.27e-1) -	9.646 4e-1 (2.02e-2) -	9.749 7e-1 (5.52e-3) -	9.940 4e-1 (1.33e-3) -	9.542 5e-1 (8.26e-3) -	9.973 3e-1 (1.13e-3)
	15	24	9.708 7e-1 (9.00e-3) -	9.801 4e-1 (2.40e-3) -	5.338 1e-1 (6.91e-2) -	9.600 5e-1 (1.90e-2) -	9.775 9e-1 (4.36e-3) -	9.944 7e-1 (2.36e-3) -	9.354 2e-1 (1.11e-2) -	9.970 9e-1 (1.47e-3)
WFG3	5	14	1.499 9e-1 (1.69e-2) -	9.398 1e-5 (3.98e-4) -	5.835 2e-4 (1.86e-3) -	5.326 4e-3 (2.38e-2) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	1.875 9e-1 (2.68e-2) +	3.199 4e-4 (9.37e-4) -	1.724 1e-1 (1.62e-2)
	10	19	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	8.059 0e-3 (1.74e-2) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	2.408 6e-2 (1.59e-2)
	15	24	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
WFG4	5	14	7.993 0e-1 (1.77e-3) +	5.935 6e-1 (1.57e-2) -	3.331 7e-1 (6.37e-2) -	6.319 7e-1 (1.18e-2) -	6.000 4e-1 (1.82e-2) -	7.822 2e-1 (1.44e-3) -	7.081 3e-1 (1.27e-2) -	7.946 1e-1 (1.75e-3)
	10	19	9.226 5e-1 (6.56e-3) -	5.759 3e-1 (3.30e-2) -	3.311 0e-1 (1.11e-1) -	6.633 9e-1 (9.43e-2) -	5.967 7e-1 (2.81e-2) -	9.425 0e-1 (2.79e-3) -	4.966 8e-1 (3.80e-2) -	9.552 7e-1 (1.96e-3)
	15	24	9.698 8e-1 (6.25e-3) -	4.572 7e-1 (4.35e-2) -	3.008 5e-1 (8.07e-2) -	6.734 5e-1 (6.31e-2) -	4.893 1e-1 (3.44e-2) -	9.434 0e-1 (4.59e-3) -	4.155 7e-1 (4.95e-2) -	9.755 7e-1 (2.11e-3)
WFG5	5	14	7.594 7e-1 (6.94e-4) +	6.132 1e-1 (1.44e-2) -	2.864 6e-1 (2.92e-2) -	6.017 8e-1 (1.01e-2) -	6.008 9e-1 (1.36e-2) -	7.387 6e-1 (2.13e-3) -	6.601 2e-1 (1.10e-2) -	7.512 3e-1 (1.54e-3)
	10	19	8.886 0e-1 (2.58e-3) +	6.356 7e-1 (2.17e-2) -	2.942 8e-1 (2.54e-2) -	5.152 9e-1 (2.02e-2) -	6.302 6e-1 (1.95e-2) -	8.885 5e-1 (1.46e-3) +	6.086 3e-1 (1.89e-2) -	8.836 0e-1 (2.42e-3)
	15	24	9.160 2e-1 (3.14e-4) +	5.570 0e-1 (4.28e-2) -	2.377 6e-1 (1.74e-2) -	4.569 3e-1 (9.15e-2) -	5.329 2e-1 (4.35e-2) -	8.683 8e-1 (6.18e-3) -	5.433 4e-1 (2.46e-2) -	8.925 4e-1 (2.63e-3)
WFG6	5	14	7.393 8e-1 (1.37e-2) ≈	5.018 3e-1 (2.69e-2) -	2.799 8e-1 (1.27e-2) -	5.680 8e-1 (1.78e-2) -	5.223 9e-1 (2.06e-2) -	7.190 7e-1 (1.45e-2) -	6.407 8e-1 (3.37e-2) -	7.435 5e-1 (1.65e-2)
	10	19	8.404 1e-1 (1.81e-2) -	4.105 1e-1 (2.50e-2) -	2.901 6e-1 (5.42e-2) -	5.245 8e-1 (1.33e-1) -	4.668 0e-1 (2.82e-2) -	8.634 5e-1 (1.76e-2) -	2.274 4e-1 (8.34e-2) -	8.870 4e-1 (1.85e-2)
	15	24	6.747 0e-1 (7.26e-2) -	2.198 9e-1 (5.48e-2) -	2.685 9e-1 (3.69e-2) -	5.197 6e-1 (1.07e-1) -	3.041 4e-1 (2.75e-2) -	8.268 3e-1 (2.34e-2) -	1.200 7e-1 (2.95e-2) -	8.839 0e-1 (2.64e-2)
WFG7	5	14	8.036 6e-1 (7.94e-4) +	5.415 1e-1 (3.72e-2) -	3.409 1e-1 (2.22e-2) -	5.858 7e-1 (1.12e-2) -	5.953 3e-1 (2.40e-2) -	7.901 5e-1 (1.32e-3) -	7.006 5e-1 (1.03e-2) -	7.997 3e-1 (1.60e-3)
	10	19	9.338 9e-1 (3.89e-3) -	5.086 7e-1 (5.17e-2) -	3.612 8e-1 (4.09e-2) -	3.995 3e-1 (3.91e-2) -	5.516 1e-1 (3.08e-2) -	9.563 5e-1 (1.69e-3) -	4.548 5e-1 (4.37e-2) -	9.598 3e-1 (9.05e-4)
	15	24	8.697 4e-1 (1.27e-1) -	4.246 3e-1 (6.72e-2) -	3.365 9e-1 (2.41e-2) -	2.543 1e-1 (4.70e-2) -	4.445 4e-1 (4.55e-2) -	9.572 6e-1 (4.14e-3) -	2.997 3e-1 (1.43e-1) -	9.801 1e-1 (1.42e-3)
WFG8	5	14	6.909 5e-1 (1.46e-3) +	4.248 6e-1 (5.33e-2) -	2.755 6e-1 (2.28e-2) -	4.934 9e-1 (1.68e-2) -	4.353 8e-1 (2.75e-2) -	6.576 4e-1 (4.50e-3) -	6.086 8e-1 (1.80e-2) -	6.728 0e-1 (2.64e-3)
	10	19	7.284 2e-1 (6.88e-2) -	3.466 0e-1 (6.72e-2) -	3.066 9e-1 (5.01e-2) -	5.217 9e-1 (1.11e-1) -	3.169 7e-1 (7.82e-2) -	8.655 4e-1 (2.66e-2) ≈	3.786 7e-1 (8.78e-2) -	8.519 2e-1 (1.66e-2)
	15	24	6.233 2e-1 (1.28e-1) -	1.488 7e-1 (9.20e-2) -	2.697 9e-1 (5.02e-2) -	5.046 6e-1 (1.08e-1) -	3.096 9e-1 (1.64e-1) -	8.418 9e-1 (2.16e-2) -	4.901 9e-2 (4.67e-2) -	8.955 1e-1 (1.18e-2)
WFG9	5	14	7.583 2e-1 (3.51e-3) ≈	6.295 4e-1 (1.96e-2) -	2.742 8e-1 (1.79e-2) -	5.807 5e-1 (2.02e-2) -	6.172 4e-1 (1.70e-2) -	7.470 4e-1 (4.93e-3) -	6.666 6e-1 (1.13e-2) -	7.587 7e-1 (5.29e-3)
	10	19	8.465 0e-1 (1.87e-2) -	6.924 3e-1 (2.37e-2) -	3.297 5e-1 (1.82e-2) -	4.576 7e-1 (7.47e-2) -	6.685 3e-1 (2.24e-2) -	8.851 0e-1 (3.52e-2) ≈	5.748 1e-1 (3.76e-2) -	8.721 9e-1 (5.69e-2)
	15	24	7.991 8e-1 (5.17e-2) -	6.182 2e-1 (5.01e-2) -	2.670 6e-1 (5.17e-2) -	4.103 9e-1 (7.39e-2) -	5.968 7e-1 (2.88e-2) -	8.254 7e-1 (7.48e-2) -	4.613 3e-1 (5.63e-2) -	8.449 3e-1 (7.53e-2)
+ / - / ≈			6/17/4	0/26/1	0/26/1	0/26/1	0/26/1	3/20/4	0/26/1	

“+”表示此算法优于所提出算法,“-”表示此算法劣于所提出算法,“≈”表示与所提出算法性能相近.

题上获取的最好结果. 可以看出, AMEA 在 27 个测试问题上获得了 16 个最优 HV 结果.

WFG1~WFG3 是具有不规则 PF 的 3 类测试问题. 在这 3 类问题上, AMEA 的性能整体优于其他对比算法. 具体地, 对于具有凸 PF 的 WFG1, AMEA 所获得的 HV 结果均优于其他对比算法. 对于具有多模态和不连续的 PF 的 WFG2, AMEA 在此问题上表现出的性能最好. 这是因为向量角选择策略与多阶段自适应删除策略相互协作, 可以有效平衡种群的收敛性与多样性. WFG3 是一个具有退化的 PF 测试问题. RPS-NSGA-II 在此问题上表现最好, 其次是 AMEA. WFG4~WFG9 是具有相同凹状 PF 测试问题, 但在决策空间中具有不同的特性. 对于分别具有多模态特性的 WFG4 和决策变量不可分的 WFG6, AMEA 显著优于其他对比算法. 对于具有欺骗特性的 WFG5, 其所获得的 HV 结果劣于 RVEA. 这可能是因为 RVEA 所采用的参考点的分布与该问

题的 PF 分布一致所导致的. WFG7 ~ WFG9 引入不同的偏好特性, 以挑战算法维持种群多样性的能力. 相比于其他算法, AMEA 在大多数测试问题上都获得了最优性能, 而目标 5 的最优性能主要由 RPS-NSGA-II 所获得. 这可能是因为 RPS-NSGA-II 中的 Pareto 支配起效.

3.3 算法在 MaF 测试问题上的对比分析

所提出算法与 6 个对比算法在 MaF1 ~ MaF15 测试问题上获得的 HV 值的结果如表 3 所示, 各算法在每个测试问题上获得的最好结果突出显示. 由表 3 可知, AMEA 在 45 个测试问题上获得了 22 个最优结果.

MaF1 是具有倒置的 PF 的测试问题, UIMaOTO 和 MaOEA-CSS 在此问题上所表现的效果较为突出, 而其余算法在该问题上所取得的结果较为一般. MaF2 是有凹状 PF 的测试问题, 在 HV 方面, AMEA 在该测试问题上表现最佳. 在 HV 方面, AMEA 在 5

表3 各算法在 MaF 上获得的 HV 指标值的统计结果

Problem	<i>m</i>	<i>D</i>	RVEA	MaOEAcss	MaOEAIT	MaOEARd	UIMaOTO	RPSNSGAI	MaOEA-PDS	AMEA
MaF1	5	14	3.385 9e-3 (2.13e-4) -	1.302 5e-2 (9.26e-5) +	1.961 0e-3 (2.49e-3) -	9.538 3e-4 (2.54e-4) -	1.298 5e-2 (9.46e-5) +	7.159 4e-3 (4.39e-4) -	9.913 5e-3 (7.09e-4) -	1.226 7e-2 (1.25e-4)
	10	19	1.128 0e-8 (6.43e-9) -	8.316 9e-7 (9.53e-8) +	1.106 6e-8 (1.68e-8) -	7.064 3e-9 (2.37e-9) -	7.911 7e-7 (1.37e-7) +	5.535 3e-7 (4.72e-8) +	1.931 2e-7 (1.47e-7) +	1.500 0e-7 (3.66e-7)
	15	24	2.713 4e-14 (1.81e-14) +	1.787 4e-12 (1.09e-12) +	2.572 0e-14 (5.47e-14) +	5.190 4e-14 (2.06e-14) +	1.748 1e-11 (5.30e-11) +	2.590 0e-12 (1.53e-12) +	3.186 9e-13 (9.53e-14) +	0.000 0e+0 (0.00e+0)
MaF2	5	14	1.765 1e-1 (1.54e-3) -	1.864 4e-1 (3.20e-3) -	1.302 0e-1 (2.99e-2) -	4.076 9e-2 (6.99e-3) -	1.889 2e-1 (2.40e-3) -	1.851 2e-1 (2.46e-3) -	1.871 2e-1 (2.47e-3) -	2.023 3e-1 (1.32e-3)
	10	19	1.664 0e-1 (1.19e-2) -	2.005 1e-1 (4.06e-3) -	1.655 9e-1 (3.41e-2) -	4.806 2e-2 (2.50e-2) -	1.999 4e-1 (4.20e-3) -	2.067 8e-1 (3.47e-3) -	2.090 2e-1 (2.91e-3) -	2.271 4e-1 (1.94e-3)
	15	24	7.671 2e-2 (2.58e-2) -	1.728 2e-1 (8.78e-3) -	1.059 6e-1 (2.48e-2) -	4.129 2e-2 (4.25e-3) -	1.711 8e-1 (6.05e-3) -	1.580 2e-1 (6.69e-3) -	1.664 2e-1 (9.21e-3) -	1.873 8e-1 (4.70e-3)
MaF3	5	14	9.505 3e-1 (9.71e-2) -	9.890 2e-1 (2.96e-3) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	9.242 2e-1 (9.81e-2) -	7.367 9e-1 (3.61e-1) -	9.814 8e-1 (1.06e-2) -	6.904 5e-1 (4.17e-1) -	9.972 0e-1 (6.84e-4)
	10	19	5.736 8e-1 (4.39e-1) ≈	9.813 8e-1 (7.66e-2) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	7.607 6e-1 (2.84e-1) ≈	4.254 2e-2 (1.90e-1) -	8.016 0e-1 (1.70e-1) ≈	2.703 6e-1 (3.71e-1) -	5.151 4e-1 (4.31e-1)
	15	24	9.990 7e-1 (8.59e-4) +	9.970 3e-1 (1.06e-3) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	7.359 5e-1 (2.33e-1) +	9.709 8e-1 (6.31e-2) +	8.486 9e-1 (3.27e-1) +	9.878 2e-1 (3.73e-3) +	0.000 0e+0 (0.00e+0)
MaF4	5	14	3.940 9e-2 (1.39e-2) -	9.649 0e-2 (3.60e-3) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	1.915 0e-2 (1.84e-2) -	7.162 1e-2 (2.61e-2) -	1.004 6e-1 (4.96e-3) -	3.550 1e-2 (7.34e-3) -	1.282 8e-1 (2.61e-3)
	10	19	7.128 5e-8 (2.29e-8) -	4.239 1e-6 (2.08e-6) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	3.742 0e-5 (8.91e-5) -	2.282 9e-6 (2.37e-6) -	9.759 6e-5 (7.40e-5) -	1.132 3e-6 (1.04e-6) -	3.673 2e-4 (5.61e-5)
	15	24	1.201 4e-12 (3.09e-12) -	5.642 6e-12 (4.67e-12) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	1.643 5e-9 (2.56e-9) -	1.273 4e-11 (1.28e-11) -	1.710 9e-8 (3.00e-8) -	4.342 1e-12 (3.48e-12) -	7.231 3e-8 (5.90e-8)
MaF5	5	14	8.071 6e-1 (2.26e-2) +	6.434 9e-1 (1.98e-2) -	1.575 5e-1 (1.47e-1) -	7.379 6e-1 (1.86e-2) -	6.297 0e-1 (1.85e-2) -	7.928 1e-1 (1.57e-3) -	7.065 2e-1 (7.01e-3) -	8.059 9e-1 (1.53e-3)
	10	19	9.48 61e-1 (3.58e-3) +	6.707 7e-1 (2.55e-2) -	4.831 5e-2 (5.34e-2) -	7.454 6e-1 (2.50e-2) -	6.642 9e-1 (3.17e-2) -	9.575 5e-1 (2.90e-3) +	6.267 8e-1 (4.27e-2) -	9.438 2e-1 (7.24e-3)
	15	24	9.148 1e-1 (2.94e-2) -	5.775 5e-1 (3.88e-2) -	2.727 4e-2 (2.65e-2) -	6.883 4e-1 (8.03e-2) -	5.833 9e-1 (5.34e-2) -	9.578 0e-1 (7.97e-3) ≈	4.454 8e-1 (6.36e-2) -	9.546 4e-1 (1.38e-2)
MaF6	5	14	1.167 5e-1 (1.78e-3) -	1.022 e-1 (1.36e-2) -	1.205 4e-1 (2.56e-2) -	9.090 8e-2 (1.77e-6) -	1.340 0e-2 (1.03e-2) -	9.382 6e-2 (2.30e-2) -	6.526 8e-2 (1.63e-2) -	1.301 2e-1 (2.91e-4)
	10	19	9.437 3e-2 (1.04e-3) +	2.273 0e-2 (1.91e-2) -	8.022 9e-2 (3.48e-2) +	9.104 6e-2 (1.01e-3) +	1.993 9e-13 (8.91e-13) -	5.496 3e-2 (3.30e-2) -	3.208 1e-3 (6.95e-3) -	7.859 3e-2 (2.08e-2)
	15	24	9.175 8e-2 (3.44e-4) +	2.225 8e-2 (2.52e-2) +	1.401 5e-2 (2.94e-2) ≈	9.087 7e-2 (3.86e-5) +	4.406 3e-3 (1.04e-2) -	1.622 1e-2 (2.35e-2) +	6.181 5e-2 (2.18e-2) +	4.604 2e-3 (2.06e-2)

表 3 (续)

Problem	<i>m</i>	<i>D</i>	RVEA	MaOEACSS	MaOEAIT	MaOEARD	UIMaOTO	RPSNSGAI	MaOEAPDS	AMEA
MaF7	5	24	1.604 3e-1 (6.22e-2) -	1.484 9e-1 (2.85e-2) -	2.198 9e-2 (4.11e-2) -	1.446 2e-1 (3.48e-2) -	1.774 0e-1 (1.67e-2) -	2.602 8e-1 (5.51e-3) -	2.367 7e-1 (6.88e-3) -	2.657 9e-1 (1.77e-3)
	10	29	6.684 6e-2 (6.92e-2) -	5.242 8e-4 (7.40e-4) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	9.260 8e-3 (5.31e-3) -	3.239 6e-4 (1.74e-4) -	1.845 5e-1 (4.33e-3) +	2.919 6e-2 (7.21e-3) -	1.668 6e-1 (9.89e-3)
	15	34	5.987 3e-2 (6.15e-2) ≈	1.043 7e-9 (2.63e-9) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	8.230 2e-10 (3.68e-9) -	1.465 3e-1 (7.95e-3) +	6.211 6e-5 (2.51e-4) -	1.012 1e-1 (1.17e-2)
MaF8	5	2	7.781 9e-2 (4.05e-3) -	1.254 4e-1 (4.96e-4) -	7.832 7e-3 (1.19e-2) -	3.552 5e-2 (6.84e-3) -	1.250 5e-1 (4.98e-4) -	9.177 1e-2 (3.84e-3) -	1.196 9e-1 (9.86e-4) -	1.258 4e-1 (3.30e-4)
	10	2	3.550 3e-3 (7.69e-4) -	1.111 4e-2 (9.28e-5) +	2.855 2e-4 (5.52e-4) -	1.575 6e-3 (7.24e-4) -	1.096 9e-2 (9.08e-5) ≈	4.298 9e-3 (1.34e-3) -	1.000 8e-2 (2.96e-4) -	1.100 0e-2 (1.13e-4)
	15	2	1.343 7e-4 (4.63e-5) -	5.856 9e-4 (1.54e-5) +	2.129 5e-6 (4.61e-6) -	3.382 0e-5 (2.48e-5) -	5.785 3e-4 (1.29e-5) +	1.602 7e-4 (5.79e-5) -	4.353 6e-4 (2.09e-5) -	5.532 2e-4 (1.71e-5)
MaF9	5	2	2.281 0e-1 (1.14e-2) -	2.769 1e-1 (3.99e-3) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	7.098 8e-2 (1.78e-2) -	2.771 2e-1 (5.27e-3) -	2.465 6e-1 (1.69e-2) -	2.565 1e-1 (8.15e-3) -	3.248 1e-1 (8.07e-4)
	10	2	5.309 3e-3 (1.36e-3) -	1.582 1e-2 (2.03e-4) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	1.381 0e-3 (9.03e-4) -	1.379 7e-2 (2.17e-3) -	9.622 0e-3 (1.93e-3) -	1.187 5e-2 (9.46e-4) -	1.785 9e-2 (2.38e-4)
	15	2	1.375 9e-4 (8.26e-5) -	9.114 8e-4 (2.66e-5) -	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	5.205 1e-5 (3.90e-5) -	8.422 0e-4 (1.40e-4) -	2.168 7e-4 (1.27e-4) -	6.320 8e-4 (2.22e-4) -	1.118 3e-3 (3.31e-5)
MaF10	5	14	9.931 6e-1 (1.60e-2) ≈	9.888 3e-1 (1.29e-3) -	2.365 6e-1 (4.63e-2) -	7.409 2e-1 (3.02e-1) -	8.561 4e-1 (3.14e-2) -	9.853 1e-1 (1.33e-2) -	9.757 9e-1 (3.89e-3) -	9.967 5e-1 (3.48e-4)
	10	19	9.911 9e-1 (2.53e-2) -	9.966 0e-1 (1.05e-3) -	8.436 7e-2 (5.58e-2) -	8.414 4e-1 (7.41e-2) -	9.028 8e-1 (4.75e-2) -	9.983 6e-1 (8.80e-4) ≈	9.903 0e-1 (1.95e-2) -	9.987 1e-1 (3.17e-4)
	15	24	9.971 2e-1 (3.73e-4) -	9.903 8e-1 (2.45e-2) -	5.316 1e-2 (2.29e-2) -	7.241 4e-1 (2.44e-1) -	9.957 3e-1 (1.20e-3) -	9.995 4e-1 (3.71e-4) +	9.966 0e-1 (2.32e-3) -	9.977 1e-1 (1.02e-3)
MaF11	5	14	9.905 0e-1 (1.80e-3) -	9.550 6e-1 (7.60e-3) -	5.896 3e-1 (6.10e-2) -	9.719 9e-1 (2.96e-3) -	9.514 7e-1 (6.88e-3) -	9.745 3e-1 (7.38e-3) -	9.501 1e-1 (5.65e-3) -	9.951 9e-1 (8.96e-4)
	10	19	9.787 6e-1 (3.65e-3) -	9.777 2e-1 (4.71e-3) -	5.861 9e-1 (7.13e-2) -	9.552 9e-1 (1.93e-2) -	9.770 0e-1 (6.38e-3) -	9.938 9e-1 (1.72e-3) -	9.533 1e-1 (9.71e-3) -	9.972 5e-1 (1.04e-3)
	15	24	9.676 2e-1 (8.51e-3) -	9.783 6e-1 (5.44e-3) -	5.234 6e-1 (5.90e-2) -	9.608 7e-1 (1.34e-2) -	9.794 9e-1 (5.06e-3) -	9.947 0e-1 (2.06e-3) -	9.371 8e-1 (6.45e-3) -	9.969 8e-1 (1.19e-3)
MaF12	5	14	7.577 3e-1 (4.33e-3) ≈	6.253 8e-1 (8.91e-3) -	2.765 1e-1 (1.44e-2) -	5.788 2e-1 (1.61e-2) -	6.188 9e-1 (1.47e-2) -	7.524 5e-1 (5.64e-3) -	6.667 7e-1 (1.06e-2) -	7.595 0e-1 (4.39e-3)
	10	19	8.328 6e-1 (3.07e-2) -	6.965 5e-1 (2.04e-2) -	3.278 8e-1 (1.88e-2) -	4.624 0e-1 (6.24e-2) -	6.610 1e-1 (2.49e-2) -	8.833 5e-1 (3.74e-2) ≈	5.907 0e-1 (2.34e-2) -	8.856 9e-1 (1.67e-2)
	15	24	7.967 7e-1 (6.13e-2) -	6.543 2e-1 (4.70e-2) -	2.696 5e-1 (4.10e-2) -	4.314 2e-1 (8.17e-2) -	5.957 0e-1 (3.17e-2) -	8.438 0e-1 (5.27e-2) -	4.910 9e-1 (6.81e-2) -	8.680 5e-1 (6.29e-2)
MaF13	5	5	1.965 0e-1 (9.51e-3) -	2.693 9e-1 (5.21e-3) -	1.637 4e-2 (1.43e-2) -	1.047 5e-1 (2.32e-2) -	2.576 9e-1 (6.26e-3) -	1.385 1e-1 (3.96e-2) -	1.877 9e-1 (2.09e-2) -	2.785 7e-1 (5.97e-3)
	10	5	8.442 1e-2 (2.17e-2) -	1.378 5e-1 (1.29e-3) +	3.819 3e-3 (8.87e-3) -	5.299 9e-2 (1.92e-2) -	1.323 4e-1 (3.56e-3) -	1.782 4e-2 (2.57e-2) -	1.278 9e-1 (7.96e-3) -	1.352 7e-1 (4.08e-3)
	15	5	5.397 4e-2 (1.07e-2) -	8.738 9e-2 (1.18e-3) +	4.757 2e-6 (1.17e-5) -	2.975 2e-2 (2.36e-2) -	8.400 3e-2 (2.76e-3) +	8.559 2e-4 (2.77e-3) -	8.474 2e-2 (3.91e-3) +	8.098 5e-2 (4.45e-3)
MaF14	5	100	7.711 6e-2 (6.28e-2) ≈	2.767 2e-1 (1.40e-1) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	9.086 8e-2 (1.00e-4) ≈	1.239 0e-1 (5.44e-2) ≈	2.461 0e-3 (7.00e-3) -	8.253 3e-2 (6.44e-2) ≈	1.826 9e-1 (2.01e-1)
	10	200	6.072 6e-3 (1.50e-2) +	1.846 5e-4 (8.26e-4) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	8.637 6e-3 (1.85e-2) +	1.002 8e-3 (3.33e-3) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
	15	300	1.411 4e-2 (3.25e-2) ≈	1.299 4e-2 (2.87e-2) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	1.533 4e-3 (6.86e-3) ≈	2.742 9e-2 (4.21e-2) +	2.488 1e-4 (1.11e-3) ≈	3.510 9e-3 (1.08e-2) ≈	5.473 8e-3 (2.03e-2)
MaF15	5	100	1.823 5e-2 (9.12e-3) +	3.941 7e-2 (1.02e-2) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	8.757 2e-3 (2.75e-3) +	1.827 2e-2 (3.94e-3) +	1.117 4e-6 (3.61e-6) -	3.700 3e-2 (6.38e-3) +	4.488 2e-5 (8.02e-5)
	10	200	4.696 2e-8 (4.63e-8) +	1.752 8e-8 (2.70e-8) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	2.730 1e-10 (4.76e-10) +	4.023 3e-9 (1.46e-8) +	7.860 2e-11 (3.17e-10) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	3.162 7e-11 (1.41e-10)
	15	300	2.170 6e-14 (3.80e-14) +	1.584 8e-15 (7.09e-15) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
+ / - / ≈			10/29/6	11/29/5	2/37/6	7/34/4	9/32/4	8/29/8	6/34/5	

“+”表示此算法优于所提出算法,“-”表示此算法劣于所提出算法,“≈”表示与所提出算法性能相近。

目标上表现最好,在其他目标数上的最优结果由 RPS-NSGA-II 获得. MaF8 和 MaF9 是一种具有庞大搜索空间的测试问题. AMEA 在此问题上的结果明显优

于其他对比算法,说明了 AMEA 具有较好的搜索能力. 对于具有连续 PF 的 MaF10,高度非线性 PF 的 MaF11 和凹状 PF 的 MaF12, AMEA 在这 3 类测试问题上

的效果整体取得了最优结果. 说明该算法通过多阶段自适应删除策略与径向空间投影的匹配选择策略之间相互协作, 使算法能够更准确地搜索到 Pareto 最优解, 并能快速地收敛至 PF. 对于具有复杂决策变量的问题 MaF13, AMEA 的整体性能优于其他对比算法, 但算法的性能会随着目标数不断增加而逐渐变差, 这可能是由于算法的选择压力不足导致的. 对于具有许多决策变量的 MaF14 和 MaF15, HV 最优结果由 MaEOA-CSS 和 RVEA 获得.

为了直观地呈现各算法的性能, 绘制各算法在

20 个目标 MaF8 上获得的最终种群分布情况, 如图 2 所示. 由图 2 可知, AMEA 获得的种群分布最类似于真实 PF. 这说明 AMEA 能使种群收敛且均匀分布在 PF 上. MaOEAIT 无法使种群收敛于目标 1~目标 7, MaOEARD 无法使种群收敛于目标 1~目标 5. 对于 MaOEACSS、MaOEAPDS 和 UIMaOTO, 它们的一些目标值小于真实目标值. 这说明这两算法对位于中心 PF 的解具有一定的偏好, 进而无法使种群具有好的分布性. 至于其他算法, 它们获得的结果较为相似, 且种群个体主要分布于 PF 的边界或中心区域.

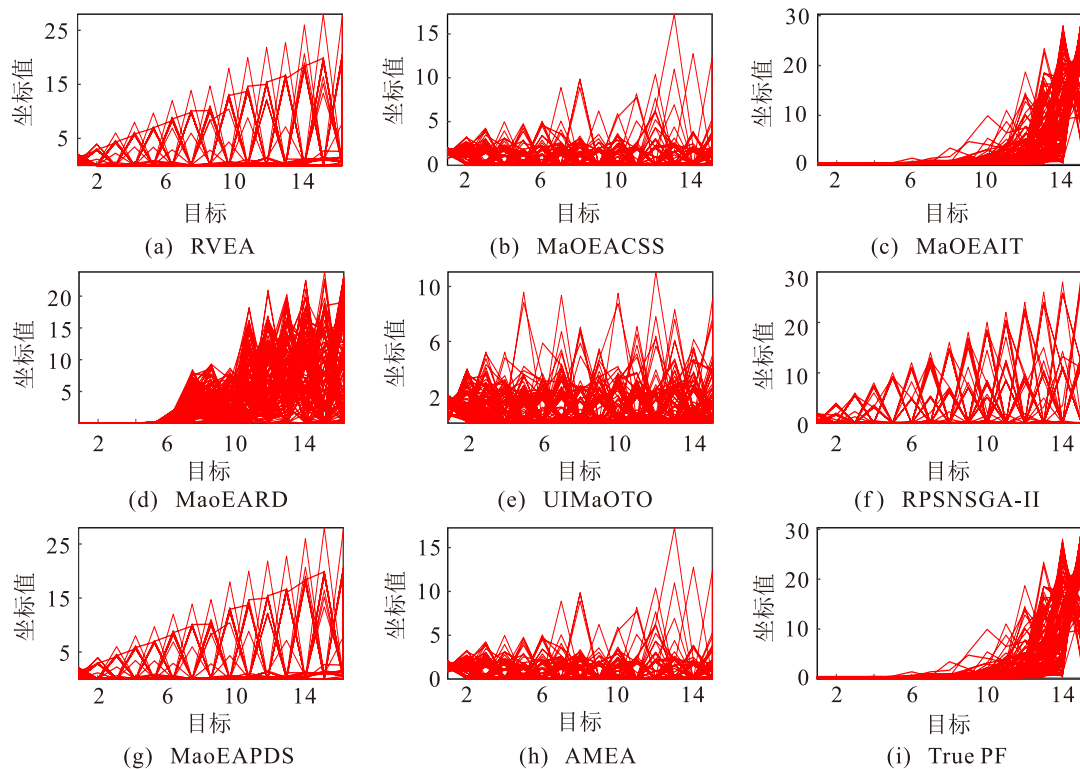


图2 各算法在 20 个目标 MaF8 上获得的最终种群分布

4 结论

针对大多数现存的高维多目标进化算法仍无法有效平衡种群收敛性与多样性的问题, 本文提出了一种基于角分解辅助的多阶段高维多目标进化算法 AEMA. 在环境选择过程中, AMEA 通过协作角分解辅助机制与多阶段自适应删除策略, 逐一淘汰种群中收敛性和多样性较差的个体, 进而解决了 MaOEAs 求解 MaOPs 时无法平衡种群收敛性与多样性的难题. 同时, 通过设计基于径向空间投影的匹配选择策略, 选取收敛性与多样性好的个体进入交配池, 能够提高算法探索高维空间的能力. 实验结果表明: 相比于其他算法, 不论是处理接近实际问题的 MaF 测试集, 还是处理广泛使用的 WFG 测试集, AMEA 都表现出较强的竞争力, 能有效地平衡种群的收敛性与多样性.

参考文献 (References)

- [1] 郭伟杰, 刘璐, 杜鑫, 等. 基于多目标的无人值守工业控制系统安全策略协同决策[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3617-3627.
(Guo W J, Liu L, Du X, et al. Multi-objective cooperative decision-making of security and safety strategies for unattended industrial control system[J]. Control and Decision, 2024, 39(11): 3617-3627.)
- [2] Fu G T, Kapelan Z, Kasprzyk J R, et al. Optimal design of water distribution systems using many-objective visual analytics[J]. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 2013, 139(6): 624-633.
- [3] 肖人彬, 李贵, 陈峙臻. 进化超多目标优化研究进展及展望[J]. 控制与决策, 2023, 38(7): 1761-1788.
(Xiao R B, Li G, Chen Z Z. Research progress and prospect of evolutionary many-objective optimization[J]. Control and Decision, 2023, 38(7): 1761-1788.)
- [4] 田家鑫, 李岩, 张伟, 等. 基于随机森林和自适应随机排序的昂贵多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024,

- 39(11): 3781-3790.
(Tian J X, Li Y, Zhang W, et al. A random forest and adaptive stochastic ranking based evolutionary algorithm[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3781-3790.)
- [5] 刘建昌, 李飞, 王洪海, 等. 进化高维多目标优化算法研究综述[J]. *控制与决策*, 2018, 33(5): 879-887.
(Liu J C, Li F, Wang H H, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(5): 879-887.)
- [6] 呼子宇, 李玉林, 魏之慧, 等. 面向复杂超多目标优化问题的自适应增强学习进化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2849-2859.
(Hu Z Y, Li Y L, Wei Z H, et al. Adaptive boosting learning evolutionary algorithm for complex many-objective optimization problems[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(11): 2849-2859.)
- [7] Zhou A M, Zhang Q F, Zhang G X. A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition and probability model[C]. 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Brisbane, 2012: 1-8.
- [8] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [9] Bi X J, Wang C. An improved NSGA-III algorithm based on objective space decomposition for many-objective optimization[J]. *Soft Computing*, 2017, 21(15): 4269-4296.
- [10] Pan L Q, Li L H, He C, et al. A subregion division-based evolutionary algorithm with effective mating selection for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3477-3490.
- [11] Zhang W, Liu J C, Tan S B, et al. A decomposition-rotation dominance based evolutionary algorithm with reference point adaption for many-objective optimization[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 215: 119424.
- [12] Asafuddoula M, Singh H K, Ray T. An enhanced decomposition-based evolutionary algorithm with adaptive reference vectors[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(8): 2321-2334.
- [13] Zhang L, Meng Q C. A reference-vector-based strength Pareto evolutionary algorithm 2[C]. The 8th International Conference on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems. Beijing, 2021: 396-401.
- [14] Junqueira P P, Meneghini I R, Guimaraes F G. Local neighborhood-based adaptation of weights in multi-objective evolutionary algorithms based on decomposition[C]. 2021 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Kraków, 2021: 1454-1461.
- [15] Dhiman G, Soni M, Pandey H M, et al. A novel hybrid hypervolume indicator and reference vector adaptation strategies based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Engineering with Computers*, 2021, 37(4): 3017-3035.
- [16] Li F, Cheng R, Liu J C, et al. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 67: 245-260.
- [17] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 173-187.
- [18] Liu Y, Wei J X, Li X, et al. Generational distance indicator-based evolutionary algorithm with an improved niching method for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 63881-63891.
- [19] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]. International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Berlin: Springer, 2004: 832-842.
- [20] Liu J H, Wang Y P, Cheung Y M. A α -dominance-based solution estimation evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2022, 248: 108738.
- [21] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs[C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Springer, 2007: 5-20.
- [22] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 331-345.
- [23] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A new decomposition-based NSGA-II for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(7): 1191-1210.
- [24] Hadka D, Reed P. Borg: An auto-adaptive many-objective evolutionary computing framework[J]. *Evolutionary Computation*, 2013, 21(2): 231-259.
- [25] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721-736.
- [26] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization[J]. *Evolutionary Computation*, 2002, 10(3): 263-282.
- [27] Zhang Z X, Zhao M K, Wang H, et al. An efficient interval many-objective evolutionary algorithm for cloud task scheduling problem under uncertainty[J]. *Information Sciences*, 2022, 583: 56-72.
- [28] He Z N, Yen G G, Zhang J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(2): 269-285.
- [29] Wang X W, Xie Z H, Zhou X, et al. A two-stage adaptive reference direction guided evolutionary algorithm with modified dominance relation for many-objective optimization[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2023, 78: 101272.
- [30] Gu Q H, Chen H Y, Chen L, et al. A many-objective evolutionary algorithm with reference points-based

- strengthened dominance relation[J]. *Information Sciences*, 2021, 554: 236-255.
- [31] Li B D, Li J L, Tang K, et al. An improved two archive algorithm for many-objective optimization[C]. 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Beijing, 2014: 524-541.
- [32] Jiang S Y, Yang S X. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346.
- [33] Ming F, Gong W Y, Wang L. A two-stage evolutionary algorithm with balanced convergence and diversity for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(10): 6222-6234.
- [34] 张伟, 刘建昌, 刘圆超, 等. 基于IGD+指标的两阶段选择高维多目标进化算法[J]. *控制理论与应用*, 2023, 40(5): 801-816.
(Zhang W, Liu J C, Liu Y C, et al. IGD+ indicator based many-objective evolutionary algorithm with two stage selection[J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 801-816.)
- [35] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152.
- [36] 张伟, 刘建昌, 谭树彬, 等. 基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(10): 2805-2814.
(Zhang W, Liu J C, Tan S B, et al. Indicator selection and density estimation deletion-based many-objective evolutionary algorithm[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(10): 2805-2814.)
- [37] He C, Tian Y, Jin Y C, et al. A radial space division based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 61: 603-621.
- [38] 顾清华, 周煜丰, 李学现, 等. 基于径向空间划分的昂贵多目标进化算法[J]. *自动化学报*, 2022, 48(10): 2564-2584.
(Gu Q H, Zhou Y F, Li X X, et al. Expensive many-objective evolutionary algorithm based on radial space division[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(10): 2564-2584.)
- [39] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. *Complex Systems*, 1994, 9: 1-34.
- [40] Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design[J]. *Computer Science and Informatics*, 1996, 26: 30-45.
- [41] Sun Y N, Xue B, Zhang M J, et al. A new two-stage evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(5): 748-761.
- [42] 田瑾然, 刘建昌, 张伟, 等. 基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2530-2540.
(Tian J R, Liu J C, Zhang W, et al. Many-objective evolutionary algorithm based on objective transferring and condition replacement[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(8): 2530-2540.)
- [43] 赵嘉晖, 温杰, 蔡星娟, 等. 基于高维多目标优化的少样本皮肤癌检测[J]. *控制与决策*, 2024, 39(11): 3597-3606.
(Zhao J H, Wen J, Cai X J, et al. Few-shot skin cancer detection based on many-objective optimization[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3597-3606.)
- [44] He Z N, Yen G G. Many-objective evolutionary algorithms based on coordinated selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(2): 220-233.
- [45] He Z N, Yen G G. Many-objective evolutionary algorithm: Objective space reduction and diversity improvement[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(1): 145-160.
- [46] Cai X J, Geng S J, Wu D, et al. Unified integration of many-objective optimization algorithm based on temporary offspring for software defects prediction[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 63: 100871.
- [47] Cai X J, Guo W W, Zhao M K, et al. A knowledge graph-based many-objective model for explainable social recommendation[J]. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2023, 10(6): 3021-3030.

作者简介

王博 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为多目标优化, E-mail: wangbo05112021@163.com;

刘建昌 (1960-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为多目标优化、故障诊断, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

张伟 (1997-), 男, 博士生, 主要研究方向为多目标优化, E-mail: 15940202607@163.com;

刘圆超 (1995-), 男, 讲师, 主要研究方向为多目标优化, E-mail: Yuanchaoliu@126.com;

谭树彬 (1974-), 男, 副教授, 主要研究方向为工业人工智能研究及应用、故障诊断与智能运维, E-mail: tanshubin@ise.neu.edu.cn.