

# 控制与决策

Control and Decision

全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间混合无扰切换故障检测

梁占红, 姚利娜, 高金峰

引用本文:

梁占红, 姚利娜, 高金峰. 全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间混合无扰切换故障检测[J]. *控制与决策*, 2025, 40(5): 1705-1713.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0759>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计](#)

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty  
*控制与决策*. 2021, 36(9): 2074-2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

[基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 \$H\_\infty\$ 控制](#)

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model  
*控制与决策*. 2021, 36(5): 1087-1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

[基于模型依赖驻留时间的异步切换控制](#)

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 609-618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

[基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制](#)

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger  
*控制与决策*. 2021, 36(10): 2467-2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

[基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制](#)

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm  
*控制与决策*. 2021, 36(1): 173-179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

# 全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间混合 无扰切换故障检测

梁占红, 姚利娜<sup>†</sup>, 高金峰

(郑州大学 电气与信息工程学院, 郑州 450001)

**摘要:** 研究全部子系统均不稳定切换线性系统在模态依赖区间驻留时间 (MDIDT) 切换下的有限时间混合无扰切换故障检测滤波器 (FDF) 设计问题. 首先, 为了改善故障检测系统的暂态性能, 提出一种直接限制切换时刻残差信号和速率信号总颠簸幅度的混合无扰切换性能描述; 然后, 通过将驻留时间区间分段, 构造保守性更低的时变离散 Lyapunov 函数, 得到增广系统在 MDIDT 切换下有限时间稳定且满足有限时间  $H_\infty$  性能的充分条件; 接着, 在此基础上, 给出有限时间混合无扰切换 FDF 的设计条件; 最后, 通过数值仿真验证所提出方法的有效性和优越性.

**关键词:** 切换线性系统; 不稳定子系统; 无扰切换; 故障检测; 有限时间稳定; 模态依赖区间驻留时间

中图分类号: TP277 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0759

**引用格式:** 梁占红, 姚利娜, 高金峰. 全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间混合无扰切换故障检测 [J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1705-1713.

## Finite-time hybrid bumpless transfer fault detection for switched linear systems with all subsystems unstable

LIANG Zhan-hong, YAO Li-na<sup>†</sup>, GAO Jin-feng

(School of Electrical and Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** This paper investigates the design of a finite-time hybrid bumpless transfer fault detection filter (FDF) for switched linear systems with all subsystems unstable under mode-dependent interval dwell time (MDIDT) switching. Firstly, in order to improve the transient performance of the fault detection system, a hybrid bumpless transfer performance description is proposed, which directly limits the total amplitude of residual and rate bumps at switching instants. Then, by dividing the dwell time interval into segments, a less conservative time-varying discretized Lyapunov function is constructed, and sufficient conditions for ensuring the finite-time stability and finite-time  $H_\infty$  performance of the augmented system under MDIDT switching are obtained. On this basis, the design conditions of the finite-time hybrid bumpless transfer FDF are given. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness and superiority of the proposed method.

**Keywords:** switched linear systems; unstable subsystems; bumpless transfer; fault detection; finite-time stability; mode-dependent interval dwell time

## 0 引言

切换系统是一类特殊混杂系统, 由若干连续或离散时间子系统 (模态) 和一个表征各子系统间切换顺序的切换信号组成. 许多实际系统, 如电力电子变换器<sup>[1]</sup>、化学反应过程<sup>[2]</sup>、航空发动机<sup>[3]</sup>等, 均可描述为切换系统. 由于切换系统具有广泛的应用背景, 近年来研究人员对其稳定性、控制、滤波等问题展现出

了极大的研究兴趣<sup>[4-6]</sup>.

实际系统在运行过程中不可避免地会发生故障. 切换机制的存在会导致切换系统更复杂, 更易发生故障. 故障检测可以及时、有效地发现故障, 是确保实际系统安全、可靠运行的关键. 切换系统的故障检测方法通常是通过构建切换的观测器或滤波器来产生残差信号, 再利用特定的残差评价机制来判断故

收稿日期: 2024-06-27; 录用日期: 2024-10-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61973278, 61374128); 河南省杰出青年基金项目 (222300420019); 河南省高等学校重点科研项目计划基础研究专项项目 (21zx007).

责任编辑: 方华京.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: yaoln@zzu.edu.cn.

障是否发生<sup>[7-8]</sup>.

近年来,含不稳定子系统的切换系统的故障检测研究取得了一些进展<sup>[9-11]</sup>.文献[12]采用基于平均驻留时间(ADT)区间分段的离散 Lyapunov 函数(DLF)方法,研究了全部子系统均不稳定切换线性系统的 $H_2/H_\infty$ 故障检测观测器设计问题;文献[13]采用类似的 DLF 方法,讨论了全部子系统均不稳定切换线性系统的 $H_\infty$ 故障检测滤波器(FDF)设计问题.

对于化学反应<sup>[14]</sup>、飞行控制<sup>[15]</sup>等许多实际系统,考虑故障检测系统在有限时间区间内的稳定性,即有限时间故障检测问题,更具有实际意义.文献[16]针对全部子系统均不稳定的切换奇异系统,采用了基于 ADT 区间分段的 DLF 方法,给出了一种有限时间 FDF 设计方法;文献[17]在文献[16]的基础上,研究了全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间 FDF 设计问题.

由于不同观测器或滤波器具有不同的参数,相邻观测器或滤波器间的切换不可避免地会导致残差信号的突然跳变.这种信号颠簸可能会降低故障检测系统的暂态性能,导致信号饱和、设备疲劳和机械损伤等不良影响<sup>[18-19]</sup>.无扰切换控制为抑制切换系统中特定信号的切换颠簸,如输入信号<sup>[20]</sup>、状态信号<sup>[21]</sup>、速率信号<sup>[22]</sup>等,提供了一种有效的无扰切换控制器设计方法.文献[23]针对切换系统的 $H_\infty$ 控制问题,提出了一种输入和速率混合无扰切换性能条件.

与无扰切换控制的丰硕研究成果相比,无扰切换故障检测的研究结果尚不多见.文献[24]采用多 Lyapunov 函数方法,研究了切换线性系统的 $H_2/H_\infty$ 残差无扰切换 FDF 设计问题;文献[25]针对全部子系统均稳定的切换线性系统,基于多不连续 Lyapunov 函数的分段思想,提出了一种 $H_\infty$ 残差无扰切换分段 FDF 设计方法;文献[26]在文献[25]的基础上,研究了部分子系统不稳定切换线性系统的 $H_\infty$ 残差无扰切换分段 FDF 设计问题.然而,上述研究仅考虑了残差信号的颠簸抑制,没有考虑模态切换对滤波器速率信号的影响.实际上,残差颠簸和速率颠簸均有可能对故障检测系统的暂态行为产生不良影响,而速率颠簸严重时还有可能会导致故障检测系统失去稳定<sup>[27]</sup>.因此,在设计 FDF 时,有必要同时考虑残差信号和速率信号的颠簸抑制,即混合无扰切换故障检测问题.

基于以上考虑,本文采用基于驻留时间区间分段的 DLF 方法,研究全部子系统均不稳定切换线性系统的有限时间混合无扰切换 FDF 设计问题.本文的主要内容如下:1) 本文首次讨论切换系统的有限

时间无扰切换故障检测问题,与文献[16-17]不同,本文不仅考虑了故障检测系统的稳态性能(有限时间 $H_\infty$ 性能),还考虑了其暂态性能(混合无扰切换性能);2) 为了同时抑制残差信号和速率信号的切换颠簸,提出一种残差和速率混合无扰切换性能条件,与文献[24-26]提出的残差无扰切换约束条件相比,所提出混合无扰切换性能条件进一步改善了故障检测系统的暂态行为;3) 构造一种基于驻留时间区间分段的时变离散 Lyapunov 函数(DLF),得到增广系统在模态依赖区间驻留时间(MDIDT)切换下有限时间稳定且满足有限时间 $H_\infty$ 性能的充分条件,与文献[16-17]采用的基于 ADT 区间分段的准时变 DLF 方法相比,所提出方法降低了 Lyapunov 函数的保守性.

## 1 问题描述

考虑如下全部子系统均不稳定的切换线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}d(t) + E_{\sigma(t)}f(t), \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}d(t) + F_{\sigma(t)}f(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  和  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  分别为系统状态和系统输出;  $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  和  $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$  分别为属于  $L_2[0, \infty)$  的干扰信号和故障信号;  $\sigma(t) \in \mathfrak{N} = \{1, 2, \dots, n\}$  为切换信号,对于  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\sigma(t) = i \in \mathfrak{N}$  表示第  $i$  个子系统在时间区间  $[t_k, t_{k+1})$  上被激活,这里  $t_k$  和  $t_{k+1}$  分别为第  $k$  个和第  $k+1$  个切换时刻,  $[t_k, t_{k+1})$  称为第  $k$  个驻留时间区间;  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$  为已知矩阵,  $i \in \mathfrak{N}$ .

切换系统(1)不存在任何稳定子系统,太小或太大的驻留时间均无法使得系统渐近稳定.因此,本文采用模态依赖区间驻留时间(MDIDT)切换信号.下面给出 MDIDT 的定义.

**定义 1** 给定切换信号  $\sigma(t)$ .若存在常数  $N_{0i} \geq 0$ ,  $\tau_{i,\min} > 0$ ,  $\tau_{i,\max} > 0$  ( $i \in \mathfrak{N}$ ), 满足

$$N_{\sigma_i}(a_1, a_2) \leq N_{0i} + \frac{T_i(a_1, a_2)}{\tau_{i,\min}}, \quad \forall a_2 \geq a_1 \geq 0$$

和

$$N_{\sigma_i}(a_1, a_2) \geq N_{0i} + \frac{T_i(a_1, a_2)}{\tau_{i,\max}}, \quad \forall a_2 \geq a_1 \geq 0,$$

其中  $N_{\sigma_i}(a_1, a_2)$  和  $T_i(a_1, a_2)$  分别为第  $i$  个模态在时间区间  $(a_1, a_2)$  内的激活次数和总运行时间,则称切换信号  $\sigma(t)$  具有模态依赖区间驻留时间  $\tau_{i,k} \in [\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}]$  ( $k=0, 1, \dots, i \in \mathfrak{N}$ ).所有具有模态依赖区间驻留时间  $\tau_{i,k} \in [\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}]$  ( $k=0, 1, \dots, i \in \mathfrak{N}$ ) 的切换信号构成的集合记为  $\mathfrak{D}_{[\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}]}$ .

为了实现故障检测,构建如下故障检测滤波器

作为残差发生器:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_{f\sigma(t)}x_f(t) + B_{f\sigma(t)}y(t), \\ r(t) &= C_{f\sigma(t)}x_f(t) + D_{f\sigma(t)}y(t). \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  为滤波器状态,  $r(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$  为残差信号,  $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi} (i \in \mathfrak{N})$  为待确定的参数矩阵.

令  $e_r(t) = r(t) - f(t)$ ,  $\xi(t) = [x^T(t) \ x_f^T(t)]^T$ ,  $\omega(t) = [d^T(t) \ f^T(t)]^T$ . 结合式 (1) 和 (2), 得到如下增广系统:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \tilde{A}_{\sigma(t)}\xi(t) + \tilde{B}_{\sigma(t)}\omega(t), \\ e_r(t) &= \tilde{C}_{\sigma(t)}\xi(t) + \tilde{D}_{\sigma(t)}\omega(t), \\ r(t) &= \tilde{C}_{\sigma(t)}\xi(t) + \tilde{E}_{\sigma(t)}\omega(t). \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_i & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & E_i \\ B_{fi}D_i & B_{fi}F_i \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_i &= [D_{fi}C_i \ C_{fi}], \quad \tilde{D}_i = [D_{fi}D_i \ D_{fi}F_i - I], \\ \tilde{E}_i &= [D_{fi}D_i \ D_{fi}F_i]. \end{aligned}$$

对于增广系统 (3), 不难发现对于任意切换时刻  $t_k$ , 有  $r(t_k^+) \neq r(t_k^-)$ ,  $\dot{x}_f(t_k^+) \neq \dot{x}_f(t_k^-)$ , 表明切换时刻残差信号和速率信号均有可能会出现突然的跳变. 这两种信号颠簸均有可能降低故障检测系统的暂态性能, 造成信号饱和、设备疲劳和机械损伤等不良影响, 而速率颠簸严重时还有可能会使得故障检测系统失去稳定. 为了同时抑制残差颠簸和速率颠簸, 本文给出如下混合无扰切换性能定义.

**定义 2** 对于给定切换信号  $\sigma(t)$  和任意切换时刻  $t_k (k \in \mathbb{Z}^+)$ . 若存在常数  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , 满足如下不等式:

$$\beta \|\dot{x}_f(t_k^+) - \dot{x}_f(t_k^-)\|^2 + (1 - \beta) \|r(t_k^+) - r(t_k^-)\|^2 \leq \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 + \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2, \quad (4)$$

则称系统 (3) 关于  $(\sigma(t), \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  具有混合无扰切换性能, 其中  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  称为混合无扰切换性能水平.

**注 1** 受文献 [23] 启发, 为了同时抑制残差颠簸和速率颠簸, 本文提出了一种残差、速率混合无扰切换性能描述. 在定义 2 中, 式 (4) 描述了对切换时刻残差信号  $r(t)$  和速率信号  $\dot{x}_f(t)$  总颠簸幅度的限制. 由式 (3) 可知, 残差信号  $r(t)$  和速率信号  $\dot{x}_f(t)$  均受到状态  $\xi(t)$  和干扰  $\omega(t)$  的影响. 因此, 通过状态  $\xi(t_k)$  和干扰  $\omega(t_k)$  可以限制  $t_k$  时刻残差信号  $r(t)$  和速率信号  $\dot{x}_f(t)$  的总颠簸幅度. 这意味着条件 (4) 对残差颠簸和速率颠簸均有抑制作用.  $\beta$  值越大, 条件 (4) 对速率颠簸的抑制作用越强;  $\beta$  值越小, 条件 (4) 对残差颠簸的抑制作用越强. 特别地, 当  $\beta = 1$  时, 条件 (4) 将退化为如下速率无扰切换性能条件:

$$\|\dot{x}_f(t_k^+) - \dot{x}_f(t_k^-)\|^2 \leq \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 + \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2; \quad (5)$$

当  $\beta = 0$  时, 条件 (4) 将退化为文献 [25] 中的残差无扰切换性能条件, 即

$$\|r(t_k^+) - r(t_k^-)\|^2 \leq \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 + \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2. \quad (6)$$

**定义 3** [28] 给定切换信号  $\sigma(t)$ , 正定矩阵  $Q$  和正常数  $c_1, c_2, T_f$ , 且  $c_1 < c_2$ . 对于  $\forall t \in [0, T_f]$ , 当  $\omega(t) = 0$  时, 若  $\xi^T(0)Q\xi(0) \leq c_1 \Rightarrow \xi^T(t)Q\xi(t) \leq c_2$ , 则称系统 (3) 关于  $(\sigma(t), Q, c_1, c_2, T_f)$  是有限时间稳定的.

本文讨论的  $H_\infty$  有限时间混合无扰切换故障检测问题归纳如下.

1) 设计残差发生器: 对于切换系统 (1), 设计故障检测滤波器 (2), 使得增广系统 (3) 在 MDIDT 切换下有限时间稳定, 并在零初始条件下满足

$$\int_0^{T_f} e_r^T(t)e_r(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t)dt, \quad (7)$$

其中  $\gamma > 0$  称为有限时间  $H_\infty$  性能水平, 同时满足混合无扰切换性能 (4).

2) 构建残差评价机制: 选择如下评价函数  $J(t)$  和阈值  $J_{th}$ :

$$J(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t r^T(s)r(s)ds}, \quad (8)$$

$$J_{th} = \sup_{0 \neq d \in L_2, f=0} \{J(t) : t \in [0, T]\}, \quad (9)$$

其中  $T$  为确定阈值的最小评价时间窗口. 根据如下判据确定故障是否发生:

$$\begin{cases} J(t) > J_{th} \Rightarrow \text{故障发生} \Rightarrow \text{报警}, \\ J(t) \leq J_{th} \Rightarrow \text{故障未发生}. \end{cases}$$

## 2 主要结果

本节首先分析增广系统 (3) 的有限时间稳定性和有限时间  $H_\infty$  性能, 然后给出有限时间混合无扰切换 FDF 的设计条件.

### 2.1 有限时间 $H_\infty$ 性能分析

为了降低 Lyapunov 函数的保守性, 本文提出一种基于驻留时间区间分段的离散 Lyapunov 函数 (DLF) 构造方法, 其主要思想叙述如下: 对于第  $i$  个子系统的任意切换区间  $[t_k, t_{k+1}) (k=0, 1, \dots)$ , 将其分割为等长的  $L_i$  段, 每段长度均为  $h_{i,k} = \tau_{i,k}/L_i$ . 若第  $l$  段记为  $\mathcal{M}_{k,l} = [t_k + \theta_{k,l}, t_k + \theta_{k,l+1})$ ,  $\theta_{k,l} = lh_{i,k} = l\tau_{i,k}/L_i, l \in \mathfrak{P}_i = \{0, 1, \dots, L_i - 1\}$ , 则有  $[t_k, t_{k+1}) = \bigcup_l \mathcal{M}_{k,l}$ . 选择一组矩阵  $P_{i,l} (l \in \mathfrak{P}_i = \{0, 1, \dots, L_i\}, i \in \mathfrak{N})$ , 对于任意  $t \in \mathcal{M}_{k,l}$ , 应用线性插值公式, 构造连续矩阵函数  $P_i(t)$ , 即

$$P_i(t) = (1 - \alpha)P_{i,l} + \alpha P_{i,l+1}. \quad (10)$$

其中:  $\alpha = (t - t_k - \theta_{k,l})/h_{i,k}, i \in \mathfrak{N}$ . 相应的第  $i \in \mathfrak{N}$

个子系统的时变离散 Lyapunov 函数为

$$V_i(t) = \xi^T(t)P_i(t)\xi(t). \quad (11)$$

然后,应用 DLF 方法分析增广系统 (3) 在 MDIDT 切换下的有限时间稳定性和有限时间  $H_\infty$  性能.

**定理 1** 给定标量  $0 < c_1 < c_2, T_f > 0, \lambda_i > 0, 0 < \mu_i < 1, 0 < \tau_{i,\min} \leq \tau_{i,\max} (i \in \mathfrak{N})$  和矩阵  $Q > 0$ , 若存在标量  $\gamma > 0$ , 矩阵  $P_{i,l} > 0 (i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i)$ , 对于  $\forall l \in \mathfrak{P}_i, \forall i, j \in \mathfrak{N}$ , 满足

$$P_{i,0} \leq \mu_i P_{j,L_j}, \quad i \neq j; \quad (12)$$

$$\Phi_{1i}^{(l)} = \begin{bmatrix} \Omega_{1i}^{(l)} & P_{i,l}\tilde{B}_i + \tilde{C}_i^T\tilde{D}_i \\ * & \tilde{D}_i^T\tilde{D}_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0; \quad (13)$$

$$\Phi_{2i}^{(l)} = \begin{bmatrix} \Omega_{2i}^{(l)} & P_{i,l+1}\tilde{B}_i + \tilde{C}_i^T\tilde{D}_i \\ * & \tilde{D}_i^T\tilde{D}_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0; \quad (14)$$

$$\rho_1 c_1 e^{-\min_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_f} < \rho_2 c_2; \quad (15)$$

$$\frac{-\ln(\min_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i) T_f}{\ln(\rho_2 c_2) - \ln(\rho_1 c_1) + \min_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_f} < \tau_{i,\max} < -\frac{\ln \mu_i}{\lambda_i}. \quad (16)$$

其中:  $\Omega_{1i}^{(l)} = \text{He}\{P_{i,l}\tilde{A}_i\} + \Psi_i^{(l)} - \lambda_i P_{i,l} + \tilde{C}_i^T\tilde{C}_i$ ,  $\Omega_{2i}^{(l)} = \text{He}\{P_{i,l+1}\tilde{A}_i\} + \Psi_i^{(l)} - \lambda_i P_{i,l+1} + \tilde{C}_i^T\tilde{C}_i$ ,  $\Psi_i^{(l)} = L_i \times (P_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - P_{i,l}/\tau_{i,\max}) (i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i)$ ;  $\rho_1 = \max_{i \in \mathfrak{N}} (\lambda_{\max}(\bar{P}_{i,0}))$ ,  $\rho_2 = \min_{i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i} (\lambda_{\min}(\bar{P}_{i,l}))$ ,  $\bar{P}_{i,l} = Q^{-\frac{1}{2}} P_{i,l} Q^{-\frac{1}{2}} (i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i)$ . 则对于任意 MDIDT 切换信号  $\sigma(t) \in \mathcal{D}[\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}]$ , 增广系统 (3) 关于  $(\sigma(t), Q, c_1, c_2, T_f)$  有限时间稳定, 并满足有限时间  $H_\infty$  性能  $\tilde{\gamma} = \gamma e^{\bar{h}T_f/2}$ , 这里  $\bar{h} = \max_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i - \frac{\ln(\min_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i)}{\min_{i \in \mathfrak{N}} \tau_{i,\min}} > 0$ .

**证明** 首先,证明增广系统 (3) 的有限时间稳定性. 假设  $t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}$  为时间区间  $[t_0, T_f)$  上的切换时刻, 其中  $t_0 = 0$ . 假设  $\sigma(t_k) = i (i \in \mathfrak{N})$ . 对于  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ , 必存在  $\mathcal{M}_{k,l} (l \in \mathfrak{P}_i)$ , 使得  $t \in \mathcal{M}_{k,l}$ . 选择形如式 (11) 所示的离散 Lyapunov 函数  $V_i(t)$ , 则  $V_i(t)$  沿系统 (3) 轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= \xi^T(t)[\tilde{A}_i^T P_i(t) + P_i(t)\tilde{A}_i]\xi(t) + \\ &2\xi(t)P_i(t)\tilde{B}_i\omega(t) + \xi^T(t)\dot{P}_i(t)\xi(t). \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (10), 可得到  $P_i(t)$  的导数为

$$\dot{P}_i(t) = \frac{L_i(P_{i,l+1} - P_{i,l})}{\tau_{i,k}}. \quad (18)$$

令  $\Gamma(t) = e_r^T(t)e_r(t) - \gamma^2\omega^T(t)\omega(t)$ , 由式 (3)、(10)、(11)、(17) 和 (18), 可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) - \lambda_i V_i(t) + \Gamma(t) &\leq \\ (1 - \alpha)\zeta^T(t)\Phi_{1i}^{(l)}\zeta(t) + \alpha\zeta^T(t)\Phi_{2i}^{(l)}\zeta(t). \end{aligned} \quad (19)$$

其中:  $\zeta(t) = [\xi^T(t) \quad \omega^T(t)]^T$ ,  $\Phi_{1i}^{(l)}$  和  $\Phi_{2i}^{(l)}$  分别与式 (13) 和 (14) 相同. 由式 (13)、(14)、(19), 可得到

$$\dot{V}_i(t) - \lambda_i V_i(t) + \Gamma(t) \leq 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (20)$$

将式 (20) 两边积分, 可得到

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(t_k) - \\ &\int_{t_k}^t e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-s)} \Gamma(s) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

假设  $\sigma(t_k^-) = j (j \in \mathfrak{N}, j \neq i)$ . 由式 (12), 可得到

$$\begin{aligned} V_i(t_k^+) - \mu_i V_j(t_k^-) &= \xi^T(t_k)(P_{i,0} - \mu_i P_{j,L_j})\xi(t_k) \leq 0, \\ i, j \in \mathfrak{N}, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (21) 和 (22), 进一步得到

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq \\ &\mu_{\sigma(t_k)} e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)} V_{\sigma(t_{k-1})}(t_k^-) - \\ &\int_{t_k}^t e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-s)} \Gamma(s) ds \leq \dots \leq \\ &\prod_{j=1}^k \mu_{\sigma(t_j)} e^{\sum_{s=0}^k \lambda_{\sigma(t_j)}(\min\{t, t_{j+1}\} - t_j)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \prod_{j=N_s}^k \mu_{\sigma(t_j)} e^{\sum_{s=N_s}^k \lambda_{\sigma(t_j)}(\min\{t, t_{j+1}\} - \max\{t_j, s\})} \times \\ &\Gamma(s) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

这里:  $N_s = k - N_\sigma(s, t) + 1$ ,  $N_\sigma(s, t)$  为系统在时间区间  $(s, t)$  上的激活次数. 式 (23) 可重写为

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{N_{\sigma i}(t_0, t)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(t_0, t)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{N_{\sigma i}(s, t)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s, t)} \Gamma(s) ds, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $N_{\sigma i}(t_0, t)$  和  $T_i(t_0, t)$  分别为第  $i$  个子系统在时间区间  $(t_0, t)$  内的激活次数和总运行时间. 当  $\omega(t) = 0$  时, 由式 (24), 不难得到

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{N_{\sigma i}(t_0, t)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(t_0, t)} V_{\sigma(t_0)}(t_0). \quad (25)$$

由定义 1 可知,  $N_{\sigma i}(t_0, t) \geq T_i(t_0, t)/\tau_{i,\max} (i \in \mathfrak{N})$ . 令  $t_0 = 0$ , 由式 (25), 可得到

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} (\frac{\ln \mu_i}{\tau_{i,\max}} + \lambda_i) T_i(0, t)} V_{\sigma(0)}(0). \quad (26)$$

由式 (16) 可知,  $\frac{\ln \mu_i}{\tau_{i,\max}} + \lambda_i < 0 (i \in \mathfrak{N})$ . 于是, 有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} (-\frac{\ln \mu_i}{\tau_{i,\max}} - \lambda_i) T_i(0, T_f)} V_{\sigma(0)}(0) \leq \\ &e^{(-\frac{\ln(\min_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i)}{\min_{i \in \mathfrak{N}} \tau_{i,\max}} - \min_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i) T_f} V_{\sigma(0)}(0). \end{aligned} \quad (27)$$

令  $\bar{P}_i(t) = Q^{-\frac{1}{2}} P_i(t) Q^{-\frac{1}{2}}$ , 则式 (10) 可重写为

$$\begin{aligned} P_i(t) &= Q^{\frac{1}{2}} \bar{P}_i(t) Q^{\frac{1}{2}} = \\ (1 - \alpha) Q^{\frac{1}{2}} \bar{P}_{i,l} Q^{\frac{1}{2}} + \alpha Q^{\frac{1}{2}} \bar{P}_{i,l+1} Q^{\frac{1}{2}}, \quad l \in \mathfrak{P}_i, \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $\bar{P}_{i,l} = Q^{-\frac{1}{2}} P_{i,l} Q^{-\frac{1}{2}} (l \in \mathfrak{P}_i)$ . 于是, 有

$$V_{\sigma(0)}(0) = \xi^T(0)Q\frac{1}{2}\bar{P}_{\sigma(0)}(0)Q\frac{1}{2}\xi(0) \leq \lambda_{\max}(\bar{P}_{\sigma(0)}(0))\xi^T(0)Q\xi(0) \leq \rho_1 c_1, \quad (29)$$

$$V_{\sigma(t)}(t) = (1 - \alpha)\xi^T(t)Q\frac{1}{2}\bar{P}_{\sigma(t),l}Q\frac{1}{2}\xi(t) + \alpha\xi^T(t)Q\frac{1}{2}\bar{P}_{\sigma(t),l+1}Q\frac{1}{2}\xi(t) \geq \rho_2\xi^T(t)Q\xi(t). \quad (30)$$

这里:  $\rho_1 = \max_{i \in \mathfrak{N}}(\lambda_{\max}(\bar{P}_{i,0}))$ ,  $\rho_2 = \min_{l \in \mathfrak{P}_i}(\lambda_{\min}(\bar{P}_{i,l}))$ . 由式(16)、(27)、(29)和(30)可知,对于 $\forall t \in [0, T_f]$ ,有

$$\xi^T(t)Q\xi(t) \leq \frac{1}{\rho_2}V_{\sigma(t)}(t) \leq \frac{1}{\rho_2}e^{-\left(\frac{\ln(\min_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i)}{\min_{i \in \mathfrak{N}} \tau_{i,\max}} - \min_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i\right)T_f} \rho_1 c_1 \leq c_2. \quad (31)$$

因此,由定义3可知,增广系统(3)关于 $(\sigma(t), Q, c_1, c_2, T_f)$ 有限时间稳定.

接下来,证明增广系统(3)满足有限时间 $H_\infty$ 性能.在零初始条件下,由式(24),可得到

$$\int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{N_{\sigma_i}(s,t)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} e_r^T(s) e_r(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{N_{\sigma_i}(s,t)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} \omega^T(s) \omega(s) ds. \quad (32)$$

将式(32)两边同时乘以 $\prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{-N_{\sigma_i}(t_0,t)}$ ,可得到

$$\int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{-N_{\sigma_i}(t_0,s)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} e_r^T(s) e_r(s) ds \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{-N_{\sigma_i}(t_0,s)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} \omega^T(s) \omega(s) ds. \quad (33)$$

由定义1可知,  $N_{\sigma_i}(t_0, t) \leq T_i(t_0, t) / \tau_{i,\min} (i \in \mathfrak{N})$ . 于是,有

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t e_r^T(s) e_r(s) ds \leq \int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{-N_{\sigma_i}(t_0,s)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} e_r^T(s) e_r(s) ds \leq \\ & \gamma^2 \int_{t_0}^t \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i^{-N_{\sigma_i}(t_0,s)} e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i T_i(s,t)} \omega^T(s) \omega(s) ds \leq \\ & \gamma^2 \int_{t_0}^t e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} (\lambda_i T_i(s,t) - \frac{\ln \mu_i}{\tau_{i,\min}} T_i(t_0,s))} \omega^T(s) \omega(s) ds \leq \\ & \gamma^2 \int_{t_0}^t e^{\sum_{i \in \mathfrak{N}} (\lambda_i - \frac{\ln \mu_i}{\tau_{i,\min}}) T_i(t_0,t)} \omega^T(s) \omega(s) ds \leq \\ & \gamma^2 e^{\bar{h}(t-t_0)} \int_{t_0}^t \omega^T(s) \omega(s) ds, \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $\bar{h} = \max_{i \in \mathfrak{N}} \lambda_i - \frac{\ln(\min_{i \in \mathfrak{N}} \mu_i)}{\min_{i \in \mathfrak{N}} \tau_{i,\min}} > 0$ . 令  $t_0 = 0, t = T_f$ ,由式(34),可得到

$$\int_0^{T_f} e_r^T(s) e_r(s) ds \leq \gamma^2 e^{\bar{h}T_f} \int_0^{T_f} \omega^T(s) \omega(s) ds. \quad (35)$$

式(35)表明增广系统(3)满足有限时间 $H_\infty$ 性能 $\tilde{\gamma} = \gamma e^{\bar{h}T_f/2}$ .  $\square$

**注2** 本文针对全部子系统均不稳定的切换线性系统,通过将驻留时间区间分段来构造时变离散Lyapunov函数,以解决在MDIDT切换下的有限时间故障检测问题.与文献[16-17]采用的基于ADT区间分段的准时变DLF方法相比,所提出方法降低了Lyapunov函数的保守性.

**注3** 由式(16)可知,若对于某些 $\tau_{i,\max}^{1*} < \tau_{i,\max}^{2*}$ ,定理1成立,则对于任意 $\tau_{i,\max}^{1*} < \tau_{i,\max} < \tau_{i,\max}^{2*}$ ,定理1也一定成立.因此,给定标量 $c_1, c_2, T_f, \lambda_i, \mu_i, \tau_{i,\min}$ 和矩阵 $Q$ ,若式(12)~(14)有可行解,则最大容许驻留时间下界 $\tau_{i,\max}^{1*}$ 和最大容许驻留时间上界 $\tau_{i,\max}^{2*}$ 分别为

$$\begin{aligned} \tau_{i,\max}^{1*} &= \min_{\tau_{i,\max} > \tau_{i,\min}} \{ \tau_{i,\max} : \text{条件(15), (16)成立} \}, \\ \tau_{i,\max}^{2*} &= \max_{\tau_{i,\max} > \tau_{i,\min}} \{ \tau_{i,\max} : \text{条件(15), (16)成立} \}. \end{aligned}$$

### 2.2 有限时间混合无扰切换FDF设计

基于定理1的结果,本节给出有限时间混合无扰切换FDF的设计条件.

**定理2** 给定标量 $0 \leq \beta \leq 1, 0 < c_1 < c_2, T_f > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \lambda_i > 0, 0 < \mu_i < 1, 0 < \tau_{i,\min} \leq \tau_{i,\max} (i \in \mathfrak{N})$ 和矩阵 $Q > 0$ ,若存在标量 $\gamma > 0$ ,矩阵 $X_{i,l} > 0, V_{i,l} > 0, Y_{i,l} (i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i), M_{i,l}, S_{i,l} (i \in \mathfrak{N}, l \in \mathfrak{P}_i), N_i > 0, U_i > 0, \bar{A}_{fi}, \bar{B}_{fi}, \bar{C}_{fi}, \bar{D}_{fi} (i \in \mathfrak{N})$ ,对于 $\forall l \in \mathfrak{P}_i, \forall i, j \in \mathfrak{N}, i \neq j$ ,满足式(15)、(16)以及

$$\begin{bmatrix} X_{i,0} & Y_{i,0} \\ * & V_{i,0} \end{bmatrix} \leq \mu_i \begin{bmatrix} X_{j,L_j} & Y_{j,L_j} \\ * & V_{j,L_j} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1i,l} & \Sigma_{2i,l} & \Sigma_{3i,l} & 0 \\ * & \Sigma_{4i,l} & \Sigma_{3i,l} & \Sigma_{5i} \\ * & * & -\gamma^2 I & \Sigma_{6i} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1i,l} & \Sigma_{7i,l} & \Sigma_{3i,l} & 0 \\ * & \Sigma_{8i,l} & \Sigma_{3i,l} & \Sigma_{5i} \\ * & * & -\gamma^2 I & \Sigma_{6i} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{1ij} & \Upsilon_{5ij} \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & \Upsilon_{2ij} & \Upsilon_{6ij} \\ * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & \Upsilon_{3ij} & \Upsilon_{7ij} \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & \Upsilon_{4ij} & \Upsilon_{8ij} \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (39)$$

其中

$$\Sigma_{1i,l} = \begin{bmatrix} -\text{He}\{M_{i,l}\} & \Xi_{1i,l} \\ * & -\text{He}\{N_i\} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{2i,l} = \begin{bmatrix} \Xi_{2i,l} & \Xi_{3i,l} \\ \Xi_{6i,l} & \Xi_{7i,l} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{3i,l} = \begin{bmatrix} \Xi_{4i,l} & \Xi_{5i,l} \\ \Xi_{8i,l} & \Xi_{9i,l} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{4i,l} = \begin{bmatrix} \Xi_{10i,l} & \Xi_{11i,l} \\ * & \Xi_{12i,l} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{5i} = \begin{bmatrix} C_i^T \bar{D}_{fi}^T \\ \bar{C}_{fi}^T \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{6i} = \begin{bmatrix} D_i^T \bar{D}_{fi}^T \\ \Xi_{13i} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{7i,l} = \begin{bmatrix} \Xi_{14i,l} & \Xi_{15i,l} \\ \Xi_{16i,l} & \Xi_{17i,l} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{8i,l} = \begin{bmatrix} \Xi_{18i,l} & \Xi_{19i,l} \\ * & \Xi_{20i,l} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{1i,l} = -S_{i,l} - N_i,$$

$$\Xi_{2i,l} = X_{i,l} - M_{i,l} + M_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i,$$

$$\Xi_{3i,l} = Y_{i,l} - S_{i,l} + \bar{A}_{fi}, \quad \Xi_{4i,l} = M_{i,l}^T B_i + \bar{B}_{fi} D_i,$$

$$\Xi_{5i,l} = M_{i,l}^T E_i + \bar{B}_{fi} F_i,$$

$$\Xi_{6i,l} = Y_{i,l}^T - N_i + S_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i,$$

$$\Xi_{7i,l} = V_{i,l} - N_i + \bar{A}_{fi}, \quad \Xi_{8i,l} = S_{i,l}^T B_i + \bar{B}_{fi} D_i,$$

$$\Xi_{9i,l} = S_{i,l}^T E_i + \bar{B}_{fi} F_i,$$

$$\Xi_{10i,l} = \text{He}\{M_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i\} - \lambda_i X_{i,l} + L_i(X_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - X_{i,l}/\tau_{i,\max}),$$

$$\Xi_{11i,l} = A_i^T S_{i,l} + C_i^T \bar{B}_{fi}^T + \bar{A}_{fi} - \lambda_i Y_{i,l} + L_i(Y_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - Y_{i,l}/\tau_{i,\max}),$$

$$\Xi_{12i,l} =$$

$$\text{He}\{\bar{A}_{fi}\} - \lambda_i V_{i,l} + L_i(V_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - V_{i,l}/\tau_{i,\max}),$$

$$\Xi_{14i,l} = X_{i,l+1} - M_{i,l} + M_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i,$$

$$\Xi_{15i,l} = Y_{i,l+1} - S_{i,l} + \bar{A}_{fi},$$

$$\Xi_{16i,l} = Y_{i,l+1}^T - N_i + S_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i,$$

$$\Xi_{17i,l} = V_{i,l+1} - N_i + \bar{A}_{fi},$$

$$\Xi_{18i,l} = \text{He}\{M_{i,l}^T A_i + \bar{B}_{fi} C_i\} - \lambda_i X_{i,l+1} + L_i(X_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - X_{i,l}/\tau_{i,\max}),$$

$$\Xi_{19i,l} = A_i^T S_{i,l} + C_i^T \bar{B}_{fi}^T + \bar{A}_{fi} - \lambda_i Y_{i,l+1} + L_i(Y_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - Y_{i,l}/\tau_{i,\max}),$$

$$\Xi_{20i,l} = \text{He}\{\bar{A}_{fi}\} - \lambda_i V_{i,l+1} + L_i(V_{i,l+1}/\tau_{i,\min} - V_{i,l}/\tau_{i,\max}), \quad l \in \mathfrak{R}_i,$$

$$\Xi_{13i} = F_i^T \bar{D}_{fi}^T - I,$$

$$\Upsilon_{1ij} = \sqrt{\beta}(C_i^T \bar{B}_{fi}^T U_i^T - C_j^T \bar{B}_{fj}^T U_j^T),$$

$$\Upsilon_{2ij} = \sqrt{\beta}(\bar{A}_{fi}^T U_i^T - \bar{A}_{fj}^T U_j^T),$$

$$\Upsilon_{3ij} = \sqrt{\beta}(D_i^T \bar{B}_{fi}^T U_i^T - D_j^T \bar{B}_{fj}^T U_j^T),$$

$$\Upsilon_{4ij} = \sqrt{\beta}(F_i^T \bar{B}_{fi}^T U_i^T - F_j^T \bar{B}_{fj}^T U_j^T),$$

$$\Upsilon_{5ij} = \sqrt{1-\beta}(C_i^T \bar{D}_{fi}^T - C_j^T \bar{D}_{fj}^T),$$

$$\Upsilon_{6ij} = \sqrt{1-\beta}(\bar{C}_{fi}^T - \bar{C}_{fj}^T),$$

$$\Upsilon_{7ij} = \sqrt{1-\beta}(D_i^T \bar{D}_{fi}^T - D_j^T \bar{D}_{fj}^T),$$

$$\Upsilon_{8ij} = \sqrt{1-\beta}(F_i^T \bar{D}_{fi}^T - F_j^T \bar{D}_{fj}^T), \quad U_i = N_i^{-1},$$

则对于任意 MDIDT 切换信号  $\sigma(t) \in \mathfrak{D}_{[\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}]}$ , 增广系统 (3) 关于  $(\sigma(t), Q, c_1, c_2, T_f)$  有限时间稳定, 并满足有限时间  $H_\infty$  性能  $\tilde{\gamma}$  和混合无扰切换性能 (4), 这里  $\tilde{\gamma}$  与定理 1 相同. 此外, 混合无扰切换故障检测滤波器 (2) 的参数为

$$\begin{aligned} A_{fi} &= N_i^{-1} \bar{A}_{fi}, \quad B_{fi} = N_i^{-1} \bar{B}_{fi}, \\ C_{fi} &= \bar{C}_{fi}, \quad D_{fi} = \bar{D}_{fi}. \end{aligned} \quad (40)$$

**证明** 首先, 证明式 (37) 和 (38) 分别为式 (13) 和 (14) 的充分条件, 其证明过程与文献 [25-26] 中的定理 2 类似, 证明过程略.

接下来, 证明增广系统 (3) 满足混合无扰切换性能 (4). 对于任意切换时刻  $t_k$ , 假设系统从第  $j$  个子系统切换至第  $i$  个子系统, 有

$$\begin{aligned} & \beta \|\dot{x}_f(t_k^+) - \dot{x}_f(t_k^-)\|^2 + (1-\beta) \|r(t_k^+) - r(t_k^-)\|^2 - \\ & \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 - \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2 = \\ & \beta \|\tilde{A}_{fi} \xi(t_k) + \tilde{B}_{fi} \omega(t_k) - \tilde{A}_{fj} \xi(t_k) - \\ & \tilde{B}_{fj} \omega(t_k)\|^2 + (1-\beta) \|\tilde{C}_i \xi(t_k) + \tilde{E}_i \omega(t_k) - \\ & \tilde{C}_j \xi(t_k) - \tilde{E}_j \omega(t_k)\|^2 - \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 - \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2 = \\ & \begin{bmatrix} \xi(t_k) \\ \omega(t_k) \end{bmatrix}^T \Theta_{ij} \begin{bmatrix} \xi(t_k) \\ \omega(t_k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{fi} &= [B_{fi} C_i \quad A_{fi}], \quad \tilde{B}_{fi} = [B_{fi} D_i \quad B_{fi} F_i], \\ \Theta_{ij} &= \begin{bmatrix} \beta \Omega_{1ij}^T \Omega_{1ij} + (1-\beta) \Omega_{3ij}^T \Omega_{3ij} - \varepsilon_1 I & \rightarrow \\ * & \\ \leftarrow & \beta \Omega_{1ij}^T \Omega_{2ij} + (1-\beta) \Omega_{3ij}^T \Omega_{4ij} \\ & \beta \Omega_{2ij}^T \Omega_{2ij} + (1-\beta) \Omega_{4ij}^T \Omega_{4ij} - \varepsilon_2 I \end{bmatrix}, \\ \Omega_{1ij} &= \tilde{A}_{fi} - \tilde{A}_{fj}, \quad \Omega_{2ij} = \tilde{B}_{fi} - \tilde{B}_{fj}, \\ \Omega_{3ij} &= \tilde{C}_i - \tilde{C}_j, \quad \Omega_{4ij} = \tilde{E}_i - \tilde{E}_j. \end{aligned}$$

由式 (41) 可知, 对于任意  $i, j \in \mathfrak{N}, i \neq j$ , 若有

$$\Theta_{ij} < 0, \quad (42)$$

则  $\beta \|\dot{x}_f(t_k^+) - \dot{x}_f(t_k^-)\|^2 + (1-\beta) \|r(t_k^+) - r(t_k^-)\|^2 - \varepsilon_1 \|\xi(t_k)\|^2 - \varepsilon_2 \|\omega(t_k)\|^2 \leq 0$  必定成立. 对式 (42) 应用 Schur 补引理, 可得到

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 I & 0 & \sqrt{\beta} \Omega_{1ij}^T & \sqrt{1-\beta} \Omega_{3ij}^T \\ * & -\varepsilon_2 I & \sqrt{\beta} \Omega_{2ij}^T & \sqrt{1-\beta} \Omega_{4ij}^T \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

考虑到  $A_{fi} = N_i^{-1} \bar{A}_{fi}, B_{fi} = N_i^{-1} \bar{B}_{fi}, C_{fi} = \bar{C}_{fi}, D_{fi} = \bar{D}_{fi}$ , 令  $U_i = N_i^{-1}$ , 则式 (43) 等价于 (39). 因此, 若式 (39) 成立, 则对于任意切换时刻  $t_k (k \in \mathbb{Z}^+)$ , 增广系统 (3) 必定满足混合无扰切换性能 (4).  $\square$

**注 4** 定理 2 给出了求解切换系统 (1) 的  $H_\infty$  有限时间混合无扰切换 FDF 设计问题的充分条件. 式 (37) 和 (38) 保证了有限时间  $H_\infty$  性能, 而式 (39) 保证了混合无扰切换性能 (4).

式 (37) 和 (38) 存在矩阵  $N_i$ , 而式 (39) 中存在矩阵  $U_i = N_i^{-1}$ , 因此, 式 (37) ~ (39) 无法同时求解. 此外, 不等式 (39) 是非凸的, 很难直接求解. 本文给出如下求解算法.

**算法 1** 求解滤波器参数  $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}, i \in \mathfrak{N}$ .

step 1: 给定标量  $\beta, c_1, c_2, T_f, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_i, \mu_i, \tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}$  和矩阵  $Q$ , 通过如下优化问题计算  $N_i$ :

$$\min_{N_i} \{ \gamma : \text{条件(36) ~ (38)成立} \}. \quad (44)$$

若式 (44) 有解, 则计算  $\rho_1, \rho_2$ . 若  $\rho_1, \rho_2$  满足式 (15) 和 (16), 则转至 step 2; 否则, 增大  $c_2, \lambda_i, \mu_i, \tau_{i,\min}$  或减小  $\tau_{i,\max}$ , 重复 step 1.

step 2: 固定  $N_i$  和  $U_i = N_i^{-1}$ , 通过如下优化问题计算  $\bar{A}_{fi}, \bar{B}_{fi}, \bar{C}_{fi}, \bar{D}_{fi}$ :

$$\min_{\bar{A}_{fi}, \bar{B}_{fi}, \bar{C}_{fi}, \bar{D}_{fi}} \{ \gamma : \text{条件(36) ~ (39)成立} \}. \quad (45)$$

若式 (45) 有解, 则计算  $\rho_1, \rho_2$ . 若  $\rho_1, \rho_2$  满足式 (15) 和 (16), 则由式 (40) 计算  $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}$ ; 否则, 增大  $c_2, \lambda_i, \mu_i, \tau_{i,\min}$  或减小  $\tau_{i,\max}$ , 重复 step 1 和 step 2.

### 3 数值算例

考虑如下具有两个子系统的切换线性系统:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5.5 & 1.2 \\ 0.8 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.6 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.7 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.5 \ 1.4], D_1 = 0.5, F_1 = 1.3,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.8 \\ 1.5 & -8.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.5 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1.7 \ 0.8], D_2 = 0.8, F_2 = 0.5.$$

其中: 矩阵  $A_1$  和  $A_2$  的特征值分别为  $\lambda_{11} = -5.6723, \lambda_{12} = 0.0723$  和  $\lambda_{21} = 0.0405, \lambda_{22} = -8.6405$ , 表明  $A_1$  和  $A_2$  均是不稳定的.

为了验证所提出方法的有效性, 将所提出混合无扰切换 FDF 设计方法 (方法 1) 与文献 [16-17] 采用的传统非无扰切换 FDF 设计方法 (方法 2) 进行了对比研究. 令  $c_1 = 0.2, c_2 = 3.7048 \times 10^8, T_f = 20, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.75, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.8, \beta = 0.5, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1, L_1 = L_2 = 2, Q = I$ . 固定  $\tau_{1,\min} = 0.44, \tau_{2,\min} = 0.26$ , 由注 3 计算, 可得到  $\tau_{1,\max} = 0.47, \tau_{2,\max} = 0.29$ .

假设干扰信号  $d(t) = 0.2e^{-0.1t} \cos(2t)$ , 故障信号  $f(t) = 2$  在  $8 \sim 12$  s 之间出现. 令初始条件  $x(0) = [0.2 \ 0.3]^T, x_f(0) = [0 \ 0]^T$ , MDIDT  $\tau_{1,k} \in [0.44, 0.47], \tau_{2,k} \in [0.26, 0.29]$ . 图 1 为当  $d(t) = 0$  和  $f(t) = 0$  时增广系统状态  $\xi^T(t)Q\xi(t)$  的演化轨迹. 由图 1 可见, 方法 1 和方法 2 均满足  $\xi^T(t)Q\xi(t) < c_2$ , 表明两种方法均实现了增广系统的有限时间稳定. 图 2 ~ 图 4 分别为速率信号  $\dot{x}_{f1}(t), \dot{x}_{f2}(t)$ 、残差信号  $r(t)$  和评价函数  $J(t)$  的演化轨迹. 由图 2 ~ 图 4 可见, 所提出混合无扰切换 FDF 设计方法在实现故障检测的同时, 还取得了显著的残差颠簸和速率颠簸抑制效果.

令  $\tau_{1,\min} = 0.455, \tau_{2,\min} = 0.265, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ , 其他参数保持不变. 对方法 1 与方法 2 的无扰切换性能进行定量比较, 比较结果如表 1 所示, 其中符号

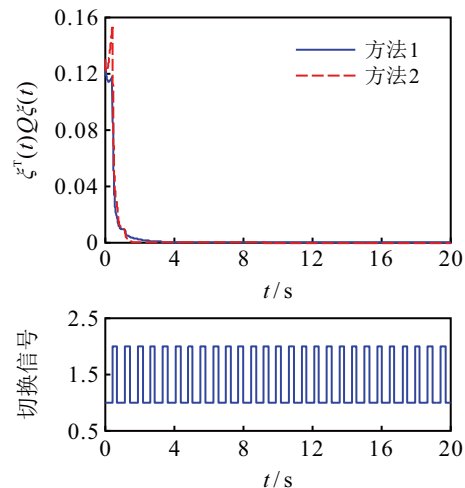


图1 状态轨迹  $\xi^T(t)Q\xi(t)$

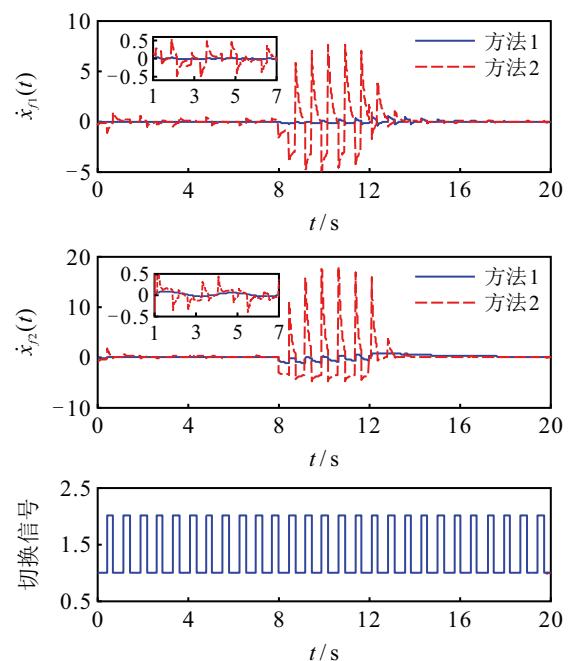


图2 速率信号  $\dot{x}_{f1}(t), \dot{x}_{f2}(t)$

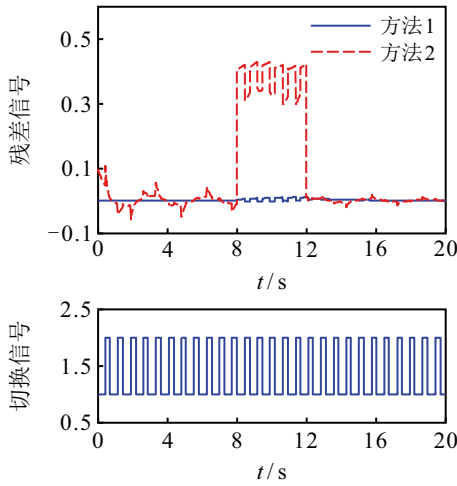
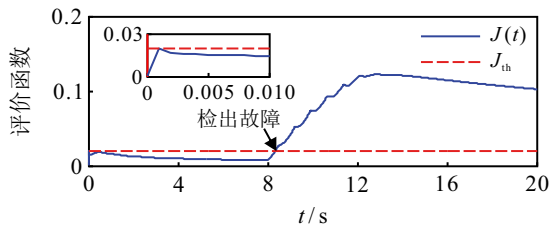
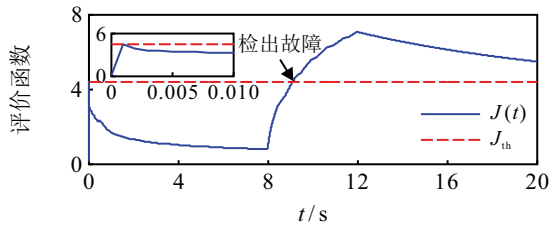


图3 残差信号 $r(t)$



(a) 方法1



(b) 方法2

图4 评价函数 $J(t)$

ARAB 和 AREB 分别为切换时刻的速率颠簸平均值和残差颠簸平均值. 由表1可见, 方法1的残差颠簸平均值和速率颠簸平均值均明显小于方法2, 验证了所提出混合无扰切换 FDF 设计方法的有效性.

表1 无扰切换性能的定量比较结果

	$L_1 = L_2 = 1$		$L_1 = L_2 = 2$		$L_1 = L_2 = 3$	
	ARAB	AREB	ARAB	AREB	ARAB	AREB
方法1	0.0088	0.0017	0.0093	0.0003	0.0098	0.0002
方法2	0.1162	0.0024	0.1149	0.0025	0.1120	0.0022

为了进一步验证所提出方法的优越性, 假设干扰信号

$$d(t) = \begin{cases} d_0 + 0.2e^{-0.1t} \cos(2t), & 8 \leq t \leq 8.1; \\ 0.2e^{-0.1t} \cos(2t), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中:  $d_0$  为正常数, 表示瞬时外界干扰. 令  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$ ,  $L_1 = L_2 = 2$ , 其他参数保持不变. 对方法1与方法2的故障检测性能进行定量比较, 比较结果如表2所示. 这里:  $t_d$  为检测延迟时间,  $f_{\min}$  为最小可检测故障,  $d_{0\max}$  为最大误检测干扰. 由表2可见: 与方法2相

表2 故障检测性能的定量比较结果

$\tau_{1,\min}$	$\tau_{2,\min}$	$t_d$		$f_{\min}$		$d_{0\max}$	
		方法1	方法2	方法1	方法2	方法1	方法2
0.46	0.26	0.399	0.764	0.36	0.98	5.34	3.93
0.45	0.26	0.355	0.893	0.31	1.07	5.48	5.18
0.44	0.26	0.328	1.111	0.31	1.24	9.24	14.62
0.44	0.27	0.353	0.680	0.33	0.91	5.91	4.10
0.44	0.28	0.404	0.697	0.36	0.94	5.87	3.81

比, 在  $(\tau_{1,\min} = 0.46, \tau_{2,\min} = 0.26)$ 、 $(\tau_{1,\min} = 0.45, \tau_{2,\min} = 0.26)$ 、 $(\tau_{1,\min} = 0.44, \tau_{2,\min} = 0.27)$  和  $(\tau_{1,\min} = 0.44, \tau_{2,\min} = 0.28)$  等情况下, 方法1可获得更小的故障检测时间和最小可检测故障, 以及更大的最大误检测干扰. 这表明通过设计适当的 MDIDT 切换信号, 方法1可以实现更好的故障检测性能.

### 4 结论

本文针对全部子系统均不稳定的切换线性系统, 提出了一种有限时间混合无扰切换 FDF 设计方法. 针对故障检测滤波器构建的残差发生器, 提出了一种直接限制切换时刻残差信号和速率信号总颠簸幅度的混合无扰切换性能描述. 通过构造基于驻留时间区间分段的时变离散 Lyapunov 函数, 得到了增广系统在 MDIDT 切换下有限时间稳定且满足有限时间  $H_\infty$  性能的充分条件, 并给出了有限时间混合无扰切换 FDF 的设计条件. 数值仿真验证了所提出方法的有效性和优越性.

### 参考文献 (References)

- [1] Beneux G, Riedinger P, Daafouz J, et al. Adaptive stabilization of switched affine systems with unknown equilibrium points: Application to power converters[J]. Automatica, 2019, 99: 82-91.
- [2] Luo H F, Shen S Y, Qi S. Design of a novel switched state observer for lipschitz nonlinear switched systems with finite-time boundedness concept and application to CSTR systems[J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2024, 35(2): 390-400.
- [3] 王娟, 朱帅东, 朱全民. 基于 CNF 的饱和切换系统的事件触发控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2631-2636. (Wang J, Zhu S D, Zhu Q M. Event-triggered control for saturated switched system based on composite nonlinear feedback[J]. Control and Decision, 2024, 39(8): 2631-2636.)
- [4] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [5] Yang D, Zong G D, Shi Y, et al. Adaptive tracking control of hybrid switching Markovian systems with its applications[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2023, 61(2): 434-457.

- [6] 王瑞华, 李福鹏, 胡硕洋, 等. 基于转移依赖 Lyapunov 函数离散时间切换系统的异步  $l_2$ - $l_\infty$  滤波[J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1231-1239.  
(Wang R H, Li F P, Hu S Y, et al. Asynchronous  $l_2$ - $l_\infty$  filtering of discrete-time switched systems based on transferring-dependent convex Lyapunov function[J]. Control and Decision, 2024, 39(4): 1231-1239.)
- [7] Huang J J, Hao X Z, Pan X Z. Asynchronous  $H_\infty$  filtering fault detection for discrete-time switched linear systems[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2022, 44(2): 314-323.
- [8] 王佳伟, 崔一鸣, 王振华, 等. 切换系统  $H_2/H_\infty$  异步切换故障检测滤波器设计[J]. 控制与决策, 2017, 32(2): 223-231.  
(Wang J W, Cui Y M, Wang Z H, et al.  $H_2/H_\infty$  asynchronous fault detection filter design for switched systems[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 223-231.)
- [9] Su Q Y, Fan Z X, Li J. Observer-based fault detection for switched systems with all unstable subsystems[J]. Journal of Control and Decision, 2021, 8(2): 116-123.
- [10] Huang J J, Hao X Z, Yang J M. Stability analysis and fault detection filter design for discrete-time switched systems with all modes unstable[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(12): 6824-6848.
- [11] Zhang Z G, Liu J H, Zhang S, et al. Event-triggered fault detection filter design for networked switched systems with all subsystems unstable and cyber attacks[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2023, 37(12): 3125-3150.
- [12] Su Q Y, Fan Z X, Li J.  $H_\infty/H_2$  fault detection for switched systems with all subsystems unstable[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(12): 1796-1803.
- [13] Su Q Y, Fan Z X. Robust fault detection filters design for switched systems with all subsystems unstable[J]. Asian Journal of Control, 2020, 22(4): 1721-1728.
- [14] Matsunaga T, Uemura R, Hori Y. Finite-time stability analysis for resource limited chemical reactions[J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(3): 815-820.
- [15] Dong C Y, Liu Y, Wang Q. Barrier Lyapunov function based adaptive finite-time control for hypersonic flight vehicles with state constraints[J]. ISA Transactions, 2020, 96: 163-176.
- [16] Su Q Y, Fan Z X, Zhang D Z, et al. Finite-time fault detection filtering for switched singular systems with all modes unstable: An ADT approach[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2019, 17(8): 2026-2036.
- [17] Su Q Y, Fan Z X, Li J. Finite-time fault detection filters design for switched systems with all subsystems unstable[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(3): 545-555.
- [18] Yang D, Zong G D, Nguang S K, et al. Bumpless transfer  $H_\infty$  anti-disturbance control of switching Markovian LPV systems under the hybrid switching[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 2833-2845.
- [19] Wu F Y, Wang D, Lian J. Bumpless transfer control for switched systems via a dynamic feedback and a bump-dependent switching law[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(8): 5372-5379.
- [20] Daafouz J, Geromel J C, Deaecto G S. A simple approach for switched control design with control bumps limitation[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(12): 1215-1220.
- [21] Shi J S, Zhao J. State bumpless transfer control for a class of switched descriptor systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2021, 68(9): 3846-3856.
- [22] Zhao Y, Zhao J, Fu J, et al. Rate bumpless transfer control for switched linear systems with stability and its application to aero-engine control design[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(6): 4900-4910.
- [23] Zhao Y, Fu J.  $H_\infty$  composite anti-bump switching control for switched systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(8): 4960-4968.
- [24] Zong G D, Huang C X, Yang D. Bumpless transfer fault detection for switched systems: A state-dependent switching approach[J]. Science China Information Sciences, 2021, 64(7): 172208.
- [25] Liang Z H, Gao J F, Yao L N. A bumpless transfer piecewise filtering approach for fault detection of switched linear systems[J]. Asian Journal of Control, 2024, 26(4): 2047-2064.
- [26] Liang Z H, Gao J F, Yao L N. Robust fault detection for switched systems with unstable modes: A bumpless transfer piecewise filtering approach[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(16): 11147-11174.
- [27] Mallocci I, Hetel L, Daafouz J, et al. Bumpless transfer for switched linear systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1440-1446.
- [28] Liu H, Shen Y, Zhao X D. Finite-time stabilization and boundedness of switched linear system under state-dependent switching[J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(3): 541-555.

## 作者简介

梁占红 (1977-), 男, 讲师, 博士生, 主要研究方向为切换系统、故障诊断、容错控制, E-mail: [liangzhanhong@zzu.edu.cn](mailto:liangzhanhong@zzu.edu.cn);

姚利娜 (1977-), 女, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为动态系统的故障诊断与容错控制、无人机控制、随机分布控制, E-mail: [yaoln@zzu.edu.cn](mailto:yaoln@zzu.edu.cn);

高金峰 (1963-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为电网储能与电池应用、机器学习、非线性系统理论及应用, E-mail: [jfgao@zzu.edu.cn](mailto:jfgao@zzu.edu.cn).