

控制与决策

Control and Decision

在 (p, N) -策略控制下耐烦服务员不中断多重休假M/G/1排队的最优控制策略

尹伶玉, 唐应辉, 旷欣宇

引用本文:

尹伶玉, 唐应辉, 旷欣宇. 在 (p, N) -策略控制下耐烦服务员不中断多重休假M/G/1排队的最优控制策略[J]. 控制与决策, 2025, 40(7): 2185-2193.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0798>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定

[Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules](#)

控制与决策. 2021, 36(7): 1592-1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

控制与决策. 2021, 36(6): 1435-1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

基于多目标优化的Holonic-C2组织协作式资源动态调度方法

Holonic-C2 organization collaborative resource dynamic scheduling method based on multi-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(6): 1472-1481 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1032>

有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599-608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

一种基于MOEA/D的组合权重方法

A combination weight method based on MOEA/D

控制与决策. 2021, 36(12): 3056-3062 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0592>

在 (p, N) -策略控制下耐烦服务员不中断 多重休假 M/G/1 排队的最优控制策略

尹伶玉¹, 唐应辉^{1†}, 旷欣宇²

(1. 四川师范大学 数学科学学院, 成都 610068; 2. 四川轻化工大学 数学与统计学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 研究在 (p, N) -策略控制下耐烦服务员不中断多重休假 M/G/1 排队系统, 其中每当系统变空时, 服务员去进行一次不中断的休假, 当服务员休假回来时, 若系统中等待服务的顾客数大于等于事先设置的正整数阈值 $N(N \geq 1)$, 则服务员立即开始服务直到系统再次空竭; 若系统中有顾客但顾客数少于 N 个, 则服务员以概率 $p(0 \leq p \leq 1)$ 开始服务, 以概率 $1 - p$ 不服务, 处于通常的闲期, 直到系统中的顾客数累积到 N 时才服务. 通过系统稳态队长的随机分解定理得到系统稳态队长分布的概率母函数和平均队长表达式, 同时应用 Little 公式得到任意顾客的平均等待时间表达式. 然后建立系统的费用结构模型, 利用更新报酬定理推得系统长期运行单位时间的期望成本费用函数. 进一步, 在没有平均等待时间和有平均等待时间约束下, 通过数值实例分别讨论系统的优化控制问题, 并确定使系统费用最小的一维最优控制策略 N^* 和当休假时间为 T 时的二维最优控制策略 (N^*, T^*) .

关键词: M/G/1 排队; (p, N) -策略; 不中断多重休假; 队长的随机分解; 最优控制策略

中图分类号: 60K25; O226 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0798

引用格式: 尹伶玉, 唐应辉, 旷欣宇. 在 (p, N) -策略控制下耐烦服务员不中断多重休假 M/G/1 排队的最优控制策略 [J]. 控制与决策, 2025, 40(7): 2185-2193.

Optimal control policy of an M/G/1 queue with a patient server and uninterrupted multiple vacations under the control of (p, N) -policy

YIN Ling-yu¹, TANG Ying-hui^{1†}, KUANG Xin-yu²

(1. School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: This paper studies an M/G/1 queueing system with a patient server and uninterrupted multiple vacations under the control of (p, N) -policy. In which, when the system becomes empty, the server goes on a uninterrupted vacation, and when the server returns from the vacation and finds at least $N(N \geq 1)$ customers in the system, the server immediately starts serving until the system becomes empty again. If there are customers but less than N , then the server starts serving with probability $p(0 \leq p \leq 1)$, or waits with probability $1 - p$ until N customers are reached. We first apply the stochastic decomposition property of the steady-state queue size to derive its probability generating function and the average queue size. Also, the average waiting time of an arbitrary customer is obtained using the Little's formula. Finally, we establish the cost structure model of the system and use the renewal reward theorem to derive the explicit expression of the long-run expected cost per unit time of the system. Furthermore, the cost optimization problems with (without) the expected waiting time constraints are respectively discussed. Numerical examples are provided to determine the one-dimensional optimal control policy N^* that minimizes the system cost as well as the two-dimensional optimal control policy (N^*, T^*) when the vacation time is a fixed time length T .

Keywords: M/G/1 queue; (p, N) -policy; uninterrupted multiple vacation; stochastic decomposition of queue size; optimal control policy

0 引言

要是单重休假、多重休假与多级适应性休假等. 启动在可控排队系统研究中, 服务员的休假机制主 服务的控制策略主要有 T -策略、 N -策略和 D -策略

收稿日期: 2024-07-05; 录用日期: 2024-08-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71571127); 四川师范大学学科建设专项基金项目 (XKZX2021-04); 企业信息化与物联网测控技术四川省高校重点实验室开放基金项目 (2023WZJ02).

责任编辑: 王光臣.

†通信作者. E-mail: tangyh@sicnu.edu.cn.

等, 这些方面的经典研究概述可见文献 [1-3]. 基于博弈论, 文献 [4] 系统地介绍了排队博弈理论, 丰富和扩展了经典排队论研究. 随着研究的深入与发展, 许多运筹学与控制论专家提出了一些更复杂的可控排队模型^[5-29], 例如文献 [5] 讨论了一个有工作休假的离散时间 GI/Geo/1 排队模型; 文献 [6] 研究了一个有服务中断和启动时间的 N -策略 M/G/1 排队; 文献 [7] 分析了带 N -策略的离散时间 Geo/G/1 排队系统, 并将其应用于无线传感器网络中; 文献 [8] 将 N -策略与服务员休假相结合, 研究了基于单重休假的 $\text{Min}(N, V)$ -策略的 M/G/1 排队系统, 详细分析了队长的瞬态概率分布; 文献 [9-12] 考虑了由 N -策略和 D -策略同时控制的排队系统, 提出了二维控制策略 $\text{Min}(N, D)$ -策略和 $\text{Max}(N, D)$ -策略. $\text{Min}(N, D)$ -策略指当系统累积到 N 个顾客, 或者系统等待服务顾客的总服务时间不小于阈值 D , 无论先发生哪一个, 系统都将开始服务直到系统再次变空, 而 $\text{Max}(N, D)$ -策略则是需要同时满足前面两种条件才开始服务. 在实际系统中, 由于设备在运行时可能发生故障而停止工作, 此时管理者不得不对设备进行修理, 于是学者们提出了可修排队模型. 对这类可修排队系统的研究, 不仅要研究系统的排队性能指标, 而且还要分析系统的可靠性指标^[13-17]. 文献 [15] 考虑了一个超指数工作休假排队模型; 文献 [16] 将“服务员的休假”引入到可靠性模型中, 研究了多维修台异步多重休假的温贮备冗余系统的可靠性; 文献 [17] 研究了修理设备可故障且有提前采购期的 $k/n(G)$ 表可修系统. 在系统的空闲期间, 管理者通常会关闭服务设备以节约能源等运行成本. 然而在某些制造系统中, 由于启动系统生产的费用较高, 因此频繁地从空闲状态转换到忙期状态会增加较多的费用. 为了减少频繁启动设备的费用, 文献 [18-22] 提出了双阈值 (m, N) -策略, 即当系统变空时, 管理者关闭系统, 只有当系统中顾客数到达一个事先设定的启动阈值 m 时才启动系统. 此外, 启动系统需要一定时间, 因此在系统启动完毕后, 当系统中的顾客数达到另一个事先设定的开始服务的阈值 N ($N \geq m$) 时才开始服务. 这样的控制策略虽然降低了系统频繁启动的费用, 但是增加了顾客的等待时间, 可能会降低顾客的满意度, 造成顾客流失. 文献 [23] 提出了 (p, N) -策略, 该策略是指, 当系统变空时, 服务员就关闭系统, 直到系统中等待服务的顾客数等于设定的阈值 N ($N \geq 1$), 则以概率 p ($0 \leq p \leq 1$) 开始服务, 以

概率 $1 - p$ 不开始服务, 直到累积的顾客数多于 N 个时再开始服务. 文献 [24] 对 (p, N) -策略进行了推广, 提出双水平随机 (p, N_1, N_2) -策略, 即每当系统变空时, 服务员立即关闭系统. 当到达系统的顾客数量达到给定的低阈值 N_1 (≥ 1) 时, 服务员以概率 p ($0 \leq p \leq 1$) 开始工作, 或者以概率 $1 - p$ 不工作; 如果到达系统的顾客数量达到给定的高阈值 N_2 ($\geq N_1$), 则服务员必须提供服务直到系统再次变空. 文献 [25] 将 (p, N) -策略与不中断多重休假相结合, 提出一个新的排队模型——在随机启动 (p, N) -策略控制下不中断多重休假排队系统, 即每当系统变空时, 服务员就去进行一次不中断的休假. 当服务员休假回来时, 如果系统中等待服务的顾客数大于等于 N ($N \geq 1$) 个, 则服务员立即启动服务直到系统再次变空; 如果系统中有顾客但顾客数少于 N 个, 则服务员以概率 p ($0 \leq p \leq 1$) 启动服务, 以概率 $1 - p$ 不启动服务, 直到系统中的顾客数累积到 N 时才立即启动服务; 如果系统中没有顾客, 则服务员进行另一次不中断的休假. 在实际的生产制造系统中, 频繁的机器故障会严重影响生产任务的完成, 因此为了保证生产制造设备在运转中不发生故障或少发生故障, 管理者常常在系统空闲时期 (或生产制造设备运转了一段后) 就要安排维修工人对系统的设备进行检修, 以保障系统在下一个生产制造周期里能够不发生故障或少发生故障. 基于这样的实际背景, 文献 [26] 从另一个角度设计系统的检修策略和在系统的检修时间里顾客进入系统的控制策略, 提出了具有检修策略和顾客进入控制策略的 M/G/1 排队系统, 这样的排队模型可用于生产制造系统、服务系统 (例如医院的 CT 检查系统) 和通信系统等建模分析. 文献 [27] 基于流体材料的 3D 打印技术, 将“服务员休假”引入到排队库存系统中, 研究了一个服务员具有单重休假的流体型库存排队系统, 得到了一些重要排队指标和最优库存策略. 文献 [28] 考虑到实际生活中系统重新启动需要经历一段随机长度的启动 (预热) 时间, 将随机启动时间与 (p, N_1, N_2) -策略相结合. 文献 [29] 提出了具有 Bernoulli 检修策略和顾客进入控制策略的 M/G/1 可修排队系统, 讨论了系统的最优检修策略以及在检修期间内顾客进入系统的最优控制阈值. 文献 [30] 研究了无人机集群编队自组网的可靠性评估问题.

受到上述研究的启发, 本文提出在 (p, N) -策略控制下具有耐烦服务员和不中断多重休假的 M/G/1

排队模型. 在这个模型中, 当系统中没有顾客时则关闭系统, 服务员进行一次不中断休假或执行不可中断的辅助性任务. 当服务员休假回来时, 如果系统中等待服务的顾客数累积到一定数量 $N (N \geq 1)$ 时, 则服务员立即开始服务直到系统再次空竭; 若系统中有顾客但顾客数未达到 N 个时, 管理者会根据情况以某个概率 $p (0 \leq p \leq 1)$ 开启服务, 以概率 $1-p$ 不服务, 继续休假直到系统中的顾客数累积到 N 时才服务. 若服务员休假回来时, 如果系统中没有顾客, 则服务员呆在系统中经历一段随机长度的时间 (这段时间就称为服务员的耐烦期), 在此期间若有顾客到达, 则立即开启服务, 若耐烦期结束仍没有顾客到达, 服务员则开启新一轮的休假. 首先利用系统稳态队长的随机分解定理^[31], 得出稳态队长的随机分解结构和平均队长的表达式, 同时利用 Little 公式得到平均等待时间表达式; 然后建立系统的费用结构模型, 应用更新报酬定理^[32] 推导出系统期望成本费用函数; 最后在没有等待时间约束和有等待时间约束情况下分别讨论系统的费用优化问题, 并通过数值计算例子确定使系统费用最小的最优控制策略.

1 模型建立

本文建立的模型如下:

1) 顾客到达的时间间隔 τ 相互独立, 有分布函数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$; 顾客之间的服务是独立的, 每个顾客的服务时间 χ 有分布函数 $G(t)$, 其平均服务时间记为 $1/\mu (0 < \mu < \infty)$.

2) 耐烦服务员的不中断多重休假机制与启动服务的 (p, N) -策略: 每当系统变空时, 服务员去进行一次不中断的完整休假, 休假时间长度 V 服从一般分布 $V(t)$. 当服务员休假回来时, 如果系统中等待服务的顾客数大于等于事先设置的阈值 $N (N \geq 1)$, 则服务员立即开始服务直到系统再次空竭; 如果系统中有顾客但顾客数少于 N 个, 则服务员以概率 $p (0 \leq p \leq 1)$ 开始服务, 以概率 $1-p$ 不服务, 服务员处于通常的闲期直到系统中的顾客数累积到 N 时才服务. 若服务员休假回来时系统中没有顾客, 则服务员呆在系统中经历一段随机长度 U 的时间 (这段时间称为服务员的耐烦期), 其分布为一般分布 $U(t)$. 在耐烦期内, 若有顾客到达, 则服务员立即为顾客服务. 若在耐烦期结束时仍无顾客到达, 则服务员开启新一轮休假.

3) 顾客的到达间隔时间 τ 、顾客的服务时间 χ 、服务员的休假时间 V 、服务员的耐烦期 U 是彼此独立的.

2 系统稳态队长的随机分解结构

本节中, 利用排队系统稳态队长的随机分解定理^[1, 31] 得到稳态队长分布的母函数, 进一步通过代数运算得到平均队长以及附加队长的概率分布的显式表达式. 为了方便讨论, 本文给出如下定义与引理.

定义 1^[2] (服务员忙期) 从服务员开始服务的时刻起, 到系统再次变空的这段时间. 在本系统中, 由于服务员忙期开始时可能有多个顾客, 若令 b 表示从一个顾客开始的服务员忙期长度, $B(t) = P\{b \leq t\}, t \geq 0, b(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t)$, 则由文献 [2] 可得如下引理.

引理 1^[2] 对于 $\Re(s) > 0$ 有 $b(s)$ 是方程 $z = g(s + \lambda - \lambda z)$ 在 $|z| < 1$ 内的唯一解, 且 $B(t)$ 表示为

$$B(t) = \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda x} dG^{(k)}(x), t \geq 0; \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} b(s) = \begin{cases} 1, & \rho \leq 1; \\ \omega, & \rho > 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$E[b] = \begin{cases} \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, & \rho < 1; \\ \infty, & \rho \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\Re(s)$ 表示复变量 s 的实部, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 表示系统的交通强度, $\omega (0 < \omega < 1)$ 表示方程 $z = g(\lambda - \lambda z)$ 在 $(0, 1)$ 内的根. $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$ 表示相应 $G(t)$ 的拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换, $G^{(k)}(t)$ 表示 $G(t)$ 的 k 重卷积, $k \geq 1$, 且 $G^{(0)}(t) = 1, t \geq 0$.

又令 $b^{(i)}$ 为从 i 个顾客开始的服务员忙期长度, 由于顾客到达过程为 Poisson 过程, 则其分布为 $P\{b^{(i)} \leq t\} = B^{(i)}(t), t \geq 0, i \geq 1$.

定义 2^[2] (服务员非忙期) 从系统刚变空的时刻起, 直到其后服务员再次开始服务为止的这段时间, 其中包含服务员的休假时间和耐烦时间.

定义 3^[2] (系统的忙循环) 从一个服务员非忙期开始到紧接着的下一个服务员忙期结束的这段时间.

定理 1 令 $P(z)$ 为系统稳态队长分布的概率母函数, 则当 $\rho < 1, |z| < 1$ 时, 有

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z)) - z} \cdot \frac{v_0[1-u(\lambda)](1-z) + 1 - v(\lambda(1-z)) + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} (z^m - z^N)v_m}{(1-z)\Delta_N}, \quad (4)$$

且平均队长表示为

$$E[L] = \rho + \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 E[V^2] + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} [N(N-1) - m(m-1)] v_m}{2\Delta_N}, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} v(\lambda(1-z)) &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t} dV(t); \\ g(\lambda(1-z)) &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t} dG(t); \\ u(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dU(t); \\ v_m &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} dV(t), \quad m \geq 0; \\ \Delta_N &= v_0[1 - u(\lambda)] + \lambda E[V] + \\ &\quad (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} (N-m)v_m. \end{aligned}$$

证明 当 $\rho < 1$ 时, 即在系统达到稳态下, 系统的队长可分解成独立的两部分之和, 由文献 [1, 31] 稳态队长的随机分解定理可得

$$P(z) = P_{M/G/1}(z) \cdot L_d(z), \quad |z| < 1. \tag{6}$$

其中: $P_{M/G/1}(z)$ 为经典 M/G/1 排队系统稳态队长分布的概率母函数, $L_d(z)$ 为该系统附加队长 L_d 的概率母函数. 由文献 [1] 可知

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z)) - z}, \quad |z| < 1; \tag{7}$$

$$L_d(z) = \frac{1 - Q_b(z)}{E(Q_b) \cdot (1-z)}, \quad |z| < 1. \tag{8}$$

其中 Q_b 表示服务员忙期开始时系统中的顾客数.

令 $s_k = \sum_{i=1}^k (V_i + U_i)$, $l_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$, $k \geq 1$, $s_0 = l_0 = 0$, $\hat{\tau}$ 表示系统变空后的第 1 个顾客的到达间隔时间, $V(t) * U(t) = \int_0^t V(t-x)dU(x)$ 表示函数 $V(t)$ 与 $U(t)$ 的卷积, 则利用全概率分解技术可推得 Q_b 的概率分布为

$$\begin{aligned} P\{Q_b = 1\} &= \sum_{k=1}^\infty P\{s_{k-1} + V_k \leq \hat{\tau} < s_k\} + \\ &\quad p \sum_{k=1}^\infty P\{\hat{\tau} + l_0 \leq s_{k-1} + V_k < \hat{\tau} + l_1, \\ &\quad s_{k-1} \leq \hat{\tau} < s_{k-1} + V_k\} = \\ &\quad \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{U}(y)e^{-\lambda x} dF(y) \times \\ &\quad d[V^{(k)}(x) * U^{(k-1)}(x)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda y e^{-\lambda(x+y)} dV(y) \times \\ & d[V^{(k-1)}(x) * U^{(k-1)}(x)] = \\ & \frac{[1 - u(\lambda)]v_0 + pv_1}{1 - v_0u(\lambda)}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} P\{Q_b = m\} &= p \sum_{k=1}^\infty P\{s_{k-1} \leq \hat{\tau} < s_{k-1} + V_k, \\ & \hat{\tau} + l_{m-1} \leq s_{k-1} + V_k < \hat{\tau} + l_m\} = \\ & \frac{pv_m}{1 - v_0u(\lambda)}, \quad m = 2, 3, \dots, N-1; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} P\{Q_b = N\} &= (1-p) \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^{N-1} P\{s_{k-1} \leq \hat{\tau} < s_{k-1} + V_k, \\ & \hat{\tau} + l_{m-1} \leq s_{k-1} + V_k < \hat{\tau} + l_m\} + \\ & \sum_{k=1}^\infty P\{s_{k-1} \leq \hat{\tau} < s_{k-1} + V_k, \\ & \hat{\tau} + l_{N-1} \leq s_{k-1} + V_k < \hat{\tau} + l_N\} = \\ & \frac{(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} v_m + v_N}{1 - v_0u(\lambda)}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P\{Q_b = j\} &= \sum_{k=1}^\infty P\{s_{k-1} \leq \hat{\tau} < s_{k-1} + V_k, \\ & \hat{\tau} + l_{j-1} \leq s_{k-1} + V_k < \hat{\tau} + l_j\} = \\ & \frac{v_j}{1 - v_0u(\lambda)}, \quad j \geq N+1. \end{aligned} \tag{12}$$

因此, 服务员忙期开始时系统的平均顾客数为

$$E[Q_b] = \sum_{m=1}^\infty mP\{Q_b = m\} = \frac{\Delta_N}{1 - v_0u(\lambda)}, \tag{13}$$

且 Q_b 的概率母函数 $Q_b(z)$ 为

$$\begin{aligned} Q_b(z) &= \sum_{j=1}^\infty z^j P\{Q_b = j\} = \\ & \frac{[1 - u(\lambda)]v_0z + v(\lambda(1-z)) - v_0}{1 - v_0u(\lambda)} + \\ & \frac{(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} (z^N v_m - z^m v_m)}{1 - v_0u(\lambda)}, \quad |z| < 1. \end{aligned} \tag{14}$$

综上, 将式 (13) 和 (14) 代入 (8) 即得到附加队长分布的概率母函数, 再由 $E[L] = \frac{d}{dz}[P(z)] \Big|_{z=1}$ 得到式 (5). \square

定理 2 令 $E[W_q]$ 为顾客在系统中的平均等待时间, 则当 $\rho < 1$ 时, 有

$$E[W_q] = \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E[V^2]}{2\Delta_N} + \frac{(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} [N(N-1) - m(m-1)]v_m}{2\lambda\Delta_N} \tag{15}$$

证明 因为顾客的到达为参数 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松流,根据文献 [2] 附录第 9 部分的 Little 公式,即接受完服务的顾客离开时,留在系统的平均顾客数等于在该顾客的逗留时间内到达的平均顾客数,再结合式 (5) 即得证. \square

3 基于费用函数系统的最优控制策略

本文建立的费用模型如下: 1) a 为系统在一个更新周期内的固定启动费用; 2) c 为每个顾客在系统中逗留(包括等待时间与服务时间)的单位时间所产生的成本费用. 记 $F(N)$ 为系统长期运行单位时间内所产生的成本费用函数,由更新报酬定理^[32]得

$$F(N) = \frac{\text{一个更新周期内的期望成本}}{\text{一个更新周期内的期望长度}}$$

令 $E[B]$ 为本系统的服务员忙期的平均长度, $E[I]$ 为服务员非忙期的平均长度, $E[C]$ 为系统一个更新周期的平均长度. 由于服务员忙期开始时有 Q_b 个顾客, $E[B]$ 可表示为

$$E[B] = E[b]E[Q_b] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}E[Q_b] \tag{16}$$

又由于服务员忙期刚开始时系统中的顾客数为上一

$$F(N) = a \cdot \left\{ \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{2\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2 + \theta(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{[N(N-1) - m(m-1)]\lambda^m}{(\lambda + \theta)^{m+1}}}{2\left\{ \frac{\theta \cdot \lambda}{(\lambda + \theta)(\lambda + \alpha)} + \frac{\lambda}{\theta} + \theta(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)\lambda^m}{(\lambda + \theta)^{m+1}} \right\}} \right\} + \frac{c\lambda(1-\rho)\left(1 - \frac{\theta \cdot \alpha}{(\lambda + \theta)(\lambda + \alpha)}\right)}{\frac{\theta \cdot \lambda}{(\lambda + \theta)(\lambda + \alpha)} + \frac{\lambda}{\theta} + \theta(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)\lambda^m}{(\lambda + \theta)^{m+1}}} \tag{20}$$

由于式 (20) 包含系统的多个参数,且 $F(N)$ 是关于离散决策变量 N 的非线性函数,从理论上直接求出最小费用的最优决策解是非常困难的. 因此,本文借助 Matlab 软件,在系统相应的参数取具体数值的条件下,求出其数值解. 当然,对于不同的参数取值,所求得的最优决策的数值解是不同的.

取一组参数值 $\lambda = 0.6, \mu = 1.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.8, a = 10, c = 400$,应用 Matlab 软件分别计算在 $p = 0.2, p = 0.4, p = 0.6$ 下, $F(N)$ 在 $N = 1, 2, \dots$ 下的数值结果(保留小数点后 4 位),并将结果展示

个服务员非忙期中到达的顾客数,且顾客到达是参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松流,则 $E[I]$ 可表示为

$$E[I] = \frac{E[Q_b]}{\lambda} = \frac{\Delta_N}{\lambda(1-v_0u(\lambda))} \tag{17}$$

系统的一个更新周期(忙循环)是由一个服务员非忙期与其后的一个服务员忙期组成,所以系统的一个更新周期的平均长度可表示为

$$E[C] = E[B] + E[I] = \frac{\Delta_N}{\lambda(1-\rho)(1-v_0u(\lambda))} \tag{18}$$

这样可得到系统长期运行单位时间成本费用函数为

$$F(N) = aE[L] + \frac{c}{E[C]} = a\left\{ \rho + \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 E[V^2]}{2\Delta_N} + \frac{(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} [N(N-1) - m(m-1)]v_m}{2\Delta_N} \right\} + \frac{c\lambda(1-\rho)(1-v_0u(\lambda))}{\Delta_N} \tag{19}$$

3.1 在没有平均等待时间约束条件下系统的最优控制策略

实例 1 令服务时间分布为 $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, 休假时间分布为 $V(t) = 1 - e^{-\theta t}$, 服务员耐烦时间分布为 $U(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, 则系统长期运行单位时间成本费用函数 (19) 可表达为

在表 1 和图 1 中.

表1 不同p和N下F(N)的数值结果

N	p = 0.2	p = 0.4	p = 0.6	N	p = 0.2	p = 0.4	p = 0.6
1	84.011 2	84.011 2	84.011 2	9	67.079 8	68.709 2	71.179 1
2	76.041 8	77.842 1	79.762 0	10	70.059 3	71.291 2	73.200 3
3	68.612 4	71.640 1	75.131 9	11	73.380 1	74.247 1	75.616 4
4	63.995 1	67.403 8	71.623 1	12	76.962 3	77.496 3	78.353 6
5	61.904 9	65.190 8	69.503 6	13	80.748 8	80.979 6	81.355 3
6	61.647 9	64.582 4	68.621 2	14	84.698 2	84.652 6	84.577 5
7	62.660 8	65.162 4	68.740 8	15	88.779 6	88.481 8	87.985 5
8	64.556 9	66.613 4	69.649 7	16	92.969 4	92.441 0	91.551 4

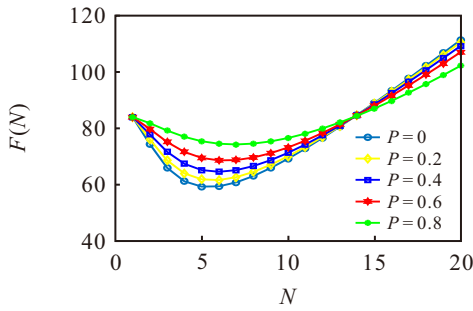


图1 $F(N)$ 随 p 和 N 的变化情况

根据表1和图1的结果,可以得出在参数值为

$$F(N, T) = a \cdot \left\{ \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{(\lambda T)^2 + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{[N(N-1) - m(m-1)](\lambda T)^m e^{-\lambda T}}{m!}}{2 \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right) e^{-\lambda T} + \lambda T + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)(\lambda T)^m e^{-\lambda T}}{m!} \right\}} \right\} + \frac{c\lambda(1-\rho) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right) e^{-\lambda T} \right)}{\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right) e^{-\lambda T} + \lambda T + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)(\lambda T)^m e^{-\lambda T}}{m!}} \quad (21)$$

根据式(21)可以看出, $F(N, T)$ 是关于离散变量 N 和连续变量 T 的二维非线性函数,比式(20)更复杂. 求解步骤如下: 1) 首先取定一组参数值; 2) 在取定的参数值下,先固定离散决策变量 N 的值,即离散决策变量 N 依次取 $N = 1, 2, \dots$,然后求解出使系统成本费用达到最小的对应值 T_1^*, T_2^*, \dots ; 3) 最后比较不同 N 值下 $F(N, T_N^*)$ 的大小,以此确定出使系统费用最小的二维最优控制策略 (N^*, T^*) . 结果见表2和图2~图4.

表2 不同 p 和 N 下 T^* 和 $F(N, T^*)$ 的数值结果

N	$p = 0.2$		$p = 0.4$		$p = 0.6$	
	T^*	$F(N, T^*)$	T^*	$F(N, T^*)$	T^*	$F(N, T^*)$
1	8.039 7	58.865 6	8.039 7	58.865 6	8.039 7	58.865 6
2	7.804 4	58.600 0	7.867 6	58.669 6	7.927 7	58.737 0
3	7.144 0	57.801 3	7.422 9	58.110 2	7.657 5	58.385 9
4	6.219 3	56.523 8	6.838 6	57.255 2	7.320 0	57.868 4
5	5.849 0	55.797 7	6.552 5	56.705 7	7.134 1	57.507 7
6	6.023 8	56.301 0	6.663 8	56.996 8	7.190 5	57.650 2
7	6.450 6	57.857 1	7.012 1	58.148 7	7.427 3	58.404 3

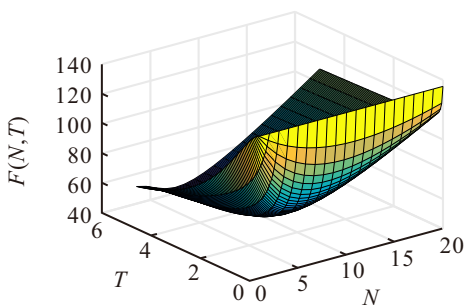


图2 $p = 0.2$ 时, $F(N, T)$ 随 N 和 T 的变化

$\lambda = 0.6, \mu = 1.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.8, a = 10, c = 400$ 时,不同 p 值下的最优控制策略 N^* 以及相应的最小系统成本费用.例如,在 $p = 0.4$ 的情况下,可以得出当 $N^* = 6$ 时系统的成本费用 $F(N)$ 取得最小值64.582 4.

实例2 当休假时间为定长 $T (T \geq 0)$ 时,即 $P\{V=T\}=1$,在 $\rho < 1, G(t) = 1 - e^{-\mu t}, U(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ 下,经过计算,系统长期运行单位时间成本费用函数可表示为

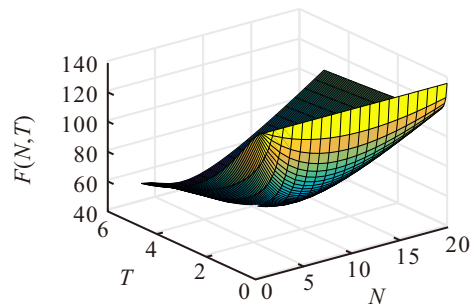


图3 $p = 0.4$ 时, $F(N, T)$ 随 N 和 T 的变化

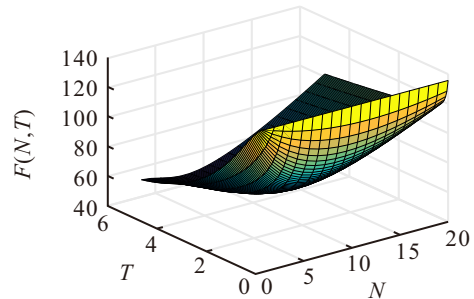


图4 $p = 0.6$ 时, $F(N, T)$ 随 N 和 T 的变化

根据表2的结果,可以得出在参数值为 $\lambda = 0.6, \mu = 1.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.8, a = 10, c = 400$ 时,不同 p 值下的最优控制策略 (T^*, N^*) 以及相应的最小系统成本费用.例如,在 $p = 0.4$ 的情况下,当 $(T^*, N^*) = (6.552 5, 5)$ 时系统的成本费用 $F(N, T)$ 取得最小值56.705 7.

3.2 在平均等待时间约束下系统的最优控制策略

尽管 (p, N) -策略有效地减少了系统频繁启动的费用,但同时增加了顾客的等待时间,这样会降低顾

客的满意度, 甚至带来顾客的流失. 因此, 为了提高顾客的满意度, 管理者就需要考虑顾客的等待时间问题. 下面增加等待时间约束, 建立如下的约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_N & F(N); \\ \text{s.t.} & E[W_q] \leq E[W_{q0}]. \end{aligned} \quad (22)$$

$$E[W_q] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{2\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2 + \theta(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{[N(N-1) - m(m-1)]\lambda^m}{(\lambda+\theta)^{m+1}}}{2\left\{\frac{\theta \cdot \lambda}{(\lambda+\theta)(\lambda+\alpha)} + \frac{\lambda}{\theta} + \theta(1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)\lambda^m}{(\lambda+\theta)^{m+1}}\right\}}. \quad (23)$$

设置参数值 $\lambda = 0.6, \mu = 1.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.8, a = 10, c = 400$, 利用 Matlab 软件计算出 $F(N)$ 和 $E[W_q]$ 的数值结果见表 3, 保留小数点后 4 位.

表3 在不同 p 和 N 下 $F(N)$ 和 $E[W_q]$ 的数值结果

N	$p = 0.2$		$p = 0.4$		$p = 0.6$	
	$F(N)$	$E[W_q]$	$F(N)$	$E[W_q]$	$F(N)$	$E[W_q]$
1	84.011 2	2.554 0	84.011 2	2.554 0	84.011 2	2.554 0
2	76.041 8	2.599 2	77.842 1	2.655 9	79.762 0	2.716 4
3	68.612 4	2.986 6	71.640 1	3.139 8	75.131 9	3.316 5
4	63.995 1	3.647 7	67.403 8	3.946 8	71.623 1	4.317 0
5	61.904 9	4.472 0	65.190 8	4.963 7	69.503 6	5.609 2
6	61.647 9	5.386 4	64.582 4	6.107 5	68.621 2	7.100 0
7	62.660 8	6.350 2	65.162 4	7.327 3	68.740 8	8.725 0

其中: $F(N)$ 由式 (19) 给出, $E[W_q]$ 由式 (15) 确定, $E[W_{q0}]$ 表示预先设定的平均等待时间阈值.

实例 3 令服务时间分布为 $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, 休假时间分布为 $V(t) = 1 - e^{-\theta t}$, 服务员耐烦时间分布为 $U(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, 约束优化问题形式同式 (22). 其中: $F(N)$ 见式 (20), $E[W_q]$ 表示为

由表 3 可知, 若取 $E[W_{q0}] = 5$, 在 $p = 0.2$ 的情况下, 当 $N^* = 5$ 时, 则取得最小值 $F(N^*) = 61.9049$; 在 $p = 0.4$ 的情况下, 当 $N^* = 5$ 时, 则可取得最小值 $F(N^*) = 65.1908$; 在 $p = 0.6$ 的情况下, 当 $N^* = 5$ 时, 取得最小值 $F(N^*) = 69.5036$.

实例 4 当休假时间为定长 $T(T \geq 0)$ 时, 即 $P\{V = T\} = 1$, 在 $\rho < 1, G(t) = 1 - e^{-\mu t}, U(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ 下, 约束优化问题为

$$\begin{aligned} \min_{(N,T)} & F(N, T); \\ \text{s.t.} & E[W_q] \leq E[W_{q0}]. \end{aligned} \quad (24)$$

其中: $F(N, T)$ 见式 (21), $E[W_q]$ 表示为

$$E[W_q] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{(\lambda T)^2 + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{[N(N-1) - m(m-1)](\lambda T)^m e^{-\lambda T}}{m!}}{2\left\{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)e^{-\lambda T} + \lambda T + (1-p) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)(\lambda T)^m e^{-\lambda T}}{m!}\right\}}, \quad (25)$$

取参数值 $\lambda = 0.6, \mu = 1.2, \theta = 0.5, \alpha = 0.8, a = 10, c = 400$, 利用 Matlab 软件计算出 $F(N, T)$ 、 $E[W_q]$ 以及 T 的数值结果见表 4, 保留小数点后 4 位.

由表 4 可知, 若取 $E[W_{q0}] = 4.7$, 在 $p = 0.2$ 的情况下, 当 $(N^*, T^*) = (5, 5.8490)$ 时, 取得最小值 $F(N^*, T^*) = 55.7977$; 在 $p = 0.4$ 的情况下, 当 $(N^*, T^*) = (5, 6.5525)$ 时, 取得最小值 $F(N^*, T^*) = 56.7057$; 在 $p = 0.6$ 的情况下, 当 $(N^*, T^*) = (4,$

$7.3200)$ 时, 取得最小值 $F(N^*, T^*) = 57.8684$.

4 结论

本文基于实际背景提出了在 (p, N) -策略控制下具有耐烦服务员和不中断多重休假的 M/G/1 排队模型, 利用系统稳态队长的随机分解定理得到了稳态队长分布的概率母函数, 并通过代数运算得到了平均队长和顾客的平均等待时间表达式. 通过建立费用模型, 利用更新报酬定理推出了系统在单位时间

表4 不同 p 和 N 下 T^* 、 $F(N, T^*)$ 以及 $E[W_q]$ 的数值结果

N	$p = 0.2$			$p = 0.4$			$p = 0.6$		
	T^*	$F(N, T^*)$	$E[W_q]$	T^*	$F(N, T^*)$	$E[W_q]$	T^*	$F(N, T^*)$	$E[W_q]$
1	8.039 7	58.865 6	4.849 5	8.039 7	58.865 6	4.849 5	8.039 7	58.865 6	4.849 5
2	7.804 4	58.600 0	4.710 3	7.867 6	58.669 6	4.749 6	7.927 7	58.737 0	4.786 9
3	7.144 0	57.801 3	4.323 6	7.422 9	58.110 2	4.503 5	7.657 5	58.385 9	4.655 1
4	6.219 3	56.523 8	3.853 4	6.838 6	57.255 2	4.249 3	7.320 0	57.868 4	4.566 2
5	5.849 0	55.797 7	3.834 9	6.552 5	56.705 7	4.296 5	7.134 1	57.507 7	4.704 1
6	6.023 8	56.301 0	4.154 1	6.663 8	56.996 8	4.639 3	7.190 5	57.650 2	5.095 3

内的期望费用目标函数, 分别在有平均等待时间约束和有平均等待时间约束下讨论了系统的费用优化问题, 并通过数值例子确定了使系统费用最小的最优控制策略. 研究结论表明: 在顾客对其等待时间不敏感的一些系统中, 可不考虑等待时间的约束, 系统管理者采取以达到最小成本的控制策略; 当顾客对其等待时间较为敏感时, 系统管理者在顾客可接受的等待时间范围内采取使系统成本最小的控制策略是可取的管理策略, 这样即可达到顾客的满意度, 又可以最大限度降低自身的成本. 因此本文研究可为系统管理者做决策提供一定的理论依据, 具有实际的应用价值.

参考文献 (References)

- [1] 田乃硕. 休假随机服务系统[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
(Tian N S. Vacation random service system[M]. Beijing: Peking University Press, 2001.)
- [2] 唐应辉, 唐小我. 排队论: 基础与分析技术[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
(Tang Y H, Tang X W. Queuing theory: Fundamentals and analytical techniques[M]. Beijing: Science Press, 2006.)
- [3] 田乃硕, 徐秀丽, 马占友. 离散时间排队论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
(Tian N S, Xu X L, Ma Z Y. Discrete-time queuing theory[M]. Beijing: Science Press, 2008.)
- [4] 王金亭. 排队博弈论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
(Wang J T. Fundamentals of queuing game theory[M]. Beijing: Science Press, 2016.)
- [5] Yu M M, Tang Y H, Fu Y H, et al. GI/Geom/1/MWV queue with changeover time and searching for the optimum service rate in working vacation period[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(8): 2170-2184.
- [6] Wang K H, Wang T Y, Pearn W L. Optimal control of the N -policy M/G/1 queueing system with server breakdowns and general startup times[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, 31(10): 2199-2212.
- [7] Lee D H, Yang W S. The N -policy of a discrete time Geo/G/1 queue with disasters and its application to wireless sensor networks[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(23): 9722-9731.
- [8] 唐应辉, 吴文青, 刘云颇. 基于单重休假的 $\text{Min}(N, V)$ -策略 M/G/1 排队系统分析[J]. *应用数学学报*, 2014, 37(6): 976-996.
(Tang Y H, Wu W Q, Liu Y P. Analysis of M/G/1 queueing system with $\text{Min}(N, V)$ -policy based on single server vacation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2014, 37(6): 976-996.)
- [9] 魏瑛源, 唐应辉, 余妙妙. 基于 $\text{Min}(N, D)$ -策略的 M/G/1 排队系统的队长分布及最优策略[J]. *系统科学与数学*, 2015, 35(6): 729-744.
(Wei Y Y, Tang Y H, Yu M M. Queue length distribution and optimum policy for M/G/1 queueing system under $\text{Min}(N, D)$ -policy[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2015, 35(6): 729-744.)
- [10] Gu J X, Wei Y Y, Tang Y H, et al. Queue size distribution of Geo/G/1 queue under the $\text{Min}(N, D)$ -policy[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2016, 29(3): 752-771.
- [11] 刘仁彬, 唐应辉, 余妙妙. 基于 $\text{Max}(N, D)$ 策略的 M/G/1 排队系统的稳态指标[J]. *系统工程理论与实践*, 2020, 40(4): 1031-1044.
(Liu R B, Tang Y H, Yu M M. Steady-state indices of M/G/1 queueing system based on the $\text{Max}(N, D)$ -policy[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2020, 40(4): 1031-1044.)
- [12] Luo L, Tang Y H, Yu M M, et al. Optimal control policy of M/G/1 queueing system with delayed randomized multiple vacations under the modified $\text{Min}(N, D)$ -policy control[J]. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2023, 11(4): 857-874.
- [13] 杨喜娟, 李忠学, 黎锁平, 等. 带启动时间和工作故障的 M/M/1/N 排队系统性能分析[J]. *控制理论与应用*, 2019, 36(4): 561-569.
(Yang X J, Li Z X, Li S P, et al. Performance analysis of M/M/1/N queue with setup time and working breakdown[J]. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 561-569.)
- [14] 黎锁平, 杨喜娟, 彭铎, 等. 带启动时间和可修服务台的 M/M/1/N 工作休假排队系统[J]. *控制与决策*, 2020, 35(2): 319-328.
(Li S P, Yang X J, Peng D, et al. Analysis of M/M/1/N working vacation queueing system with setup times and repairable service station[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(2): 319-328.)
- [15] Yu M M, Tang Y H. Analyzing a single hyper-exponential working vacation queue from its governing difference equation[J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2023, 37(4): 997-1019.
- [16] 尹东亮, 胡涛, 陈童, 等. 考虑多维修台异步多重休假的温贮备冗余系统可靠性模型[J]. *控制与决策*, 2020, 35(4): 973-984.
(Yin D L, Hu T, Chen T, et al. Reliability analysis for warm standby redundancy system considering multiple asynchronous vacations of multiple maintenance stations[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(4): 973-984.)
- [17] Wu W Q, Zuo K, Tang Y H, et al. Analysis of an k -out-of- n : G system with redundant dependency and repair equipment procurement[J]. *Journal of Control and Decision*, 2021, 8(4): 403-414.
- [18] Lee H W, Park N I, Jeon J. Queue length analysis of batch arrival queues under bilevel threshold control with early set-up[J]. *International Journal of Systems Science*, 2003, 34(3): 195-204.
- [19] Ke J C. Bi-level control for batch arrival queues with an early startup and un-reliable server[J]. *Applied*

- [Mathematical Modelling](#), 2004, 28(5): 469-485.
- [20] Begum M I A, Fijy P J, Kalpana K. A batch arrival queue with a second optional service channel under (m, N) -policy and single bernoulli vacation[J]. *Journal of Engineering Computers & Applied Sciences*, 2014, 3(10): 10-15.
- [21] 高文萍, 唐应辉. 双阈值 (m, N) -策略不中断单重休假 M/G/1 排队分析[J]. *数学学报: 中文版*, 2023, 66(2): 363-388.
(Gao W P, Tang Y H. Analysis of M/G/1 queueing system with bi-level threshold (m, N) -policy and uninterrupted single vacation[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2023, 66(2): 363-388.)
- [22] 旷欣宇, 唐应辉. 带启动时间与双阈值 (m, N) -策略的 M/G/1 可修排队系统的最优控制策略[J]. *运筹与管理*, 2021, 30(10): 64-70.
(Kuang X Y, Tang Y H. Optimal control policy for the M/G/1 repairable queueing system with random start-up time and bi-level threshold (m, N) -policy[J]. *Operations Research and Management Science*, 2021, 30(10): 64-70.)
- [23] Jain M, Kaur S. (p, N) -policy for unreliable server bulk queue with bernoulli feedback[J]. [International Journal of Applied and Computational Mathematics](#), 2020, 6(6): 170.
- [24] Kuang X Y, Tang Y H, Yu M M, et al. Performance analysis of an M/G/1 queue with bi-level randomized (p, N_1, N_2) -policy[J]. [RAIRO - Operations Research](#), 2022, 56(1): 395-414.
- [25] 袁雨梅, 唐应辉, 刘雨欣, 等. 在随机启动 (p, N) -策略控制下不中断多重休假排队系统的性能分析[J]. *应用数学*, 2023, 36(4): 1069-1085.
(Yuan Y M, Tang Y H, Liu Y X, et al. Performance analysis for a queueing system with uninterrupted multiple vacations under the control of randomized setup (p, N) -policy[J]. *Mathematica Applicata*, 2023, 36(4): 1069-1085.)
- [26] 柯淇淋, 唐应辉, 余纱妙. 具有检修策略和顾客进入控制策略的排队系统分析[J]. *系统科学与数学*, 2023, 43(8): 2164-2181.
(Ke Q L, Tang Y H, Yu M M. Analysis of a queueing system with admission control and overhaul policy[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2023, 43(8): 2164-2181.)
- [27] Yu M M, Tang Y H, Wei Y Y. Production fluid-type inventory model associated with a single vacation queue arising from additive manufacturing in the food sector[J]. [Applied Mathematical Modelling](#), 2024, 128: 242-259.
- [28] 陈镰元, 唐应辉, 袁雨梅, 等. 在双水平 (p, N_1, N_2) -策略下随机启动时间 M/G/1 排队的性能与约束优化[J]. *系统科学与数学*, 2024, 44(7): 2088-2111.
(Chen L Y, Tang Y H, Yuan Y M, et al. Performance and constraint optimization of M/G/1 queue with randomized startup time and the bi-level (p, N_1, N_2) -Policy[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2024, 44(7): 2088-2111.)
- [29] 刘雨欣, 唐应辉, 陈镰元, 等. 有 Bernoulli 检修与顾客进入控制策略的 M/G/1 可修排队的队长分布与费用优化[J]. *应用数学学报*, 2024, 47(4): 567-591.
(Liu Y X, Tang Y H, Chen L Y, et al. Queue-length distribution and cost optimization for an M/G/1 repairable queue with bernoulli maintenance and admission control strategy[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2024, 47(4): 567-591.)
- [30] 齐小刚, 吴相远, 刘立芳. 无人机集群编队自组网可靠性评估[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 689-696.
(Qi X G, Wu X Y, Liu L F. Reliability evaluation of ad hoc network for UAV swarm formation[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(2): 689-696.)
- [31] Fuhrmann S W, Cooper R B. Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations[J]. [Operations Research](#), 1985, 33(5): 1117-1129.
- [32] Ross S M. *Stochastic processes*[M]. The 2nd edition. New York: John Wiley and Sons, 1996.

作者简介

尹伶玉 (2000-), 女, 硕士, 主要研究方向为排队论、决策理论及应用, E-mail: 1272666230@qq.com;

唐应辉 (1963-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为排队论、系统可靠性和决策理论及应用, E-mail: tangyh@sicnu.edu.cn;

旷欣宇 (1994-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为排队论、决策理论及应用, E-mail: 1351063503@qq.com.